Задача 1. Два камня

Дано:

- Начальная скорость: $v_0 = 20$ м/с
- Разность максимальных высот подъёма: $\Delta H = h = 10$ м
- Отношение времён полёта: $t_2 = 3t_1$
- Ускорение свободного падения: $g = 10$ м/с^2

Решение

1. Времена полёта камней Пусть α_1 и α_2 — углы бросания первого и второго камней к горизонту. Время полёта тела, брошенного под углом к горизонту, определяется формулой:

$$t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$$

Максимальная высота подъёма связывается со временем полёта соотношением:

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = \frac{gt^2}{8}$$

По условию $t_2 = 3t_1$ и $H_2 - H_1 = h$. Подставим выражения для высот:

$$\frac{gt_2^2}{8} - \frac{gt_1^2}{8} = h \implies \frac{g(9t_1^2 - t_1^2)}{8} = h \implies gt_1^2 = h$$

Находим время полёта первого и второго камней:

$$t_1 = \frac{h}{g} = \frac{10}{10} = 1 \text{ с}$$

$$t_2 = 3t_1 = 3 \cdot 1 = 3 \text{ с}$$

2. Промежуток времени между приземлениями Так как камни брошены одновременно, промежуток времени между их падениями равен разности времён их полёта:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 3 \text{ с} - 1 \text{ с} = 2 \text{ с}$$

3. Отношение дальностей полёта Найдём синусы и косинусы углов бросания из формулы времени полёта ($\sin\alpha = \frac{gt}{2v_0}$):

- Для первого камня: $\sin\alpha_1 = \frac{10 \cdot 1}{2 \cdot 20} = 0{,}25 \implies \cos\alpha_1 = \sqrt{1 - 0{,}25^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$.
- Для второго камня: $\sin\alpha_2 = \frac{10 \cdot 3}{2 \cdot 20} = 0{,}75 \implies \cos\alpha_2 = \sqrt{1 - 0{,}75^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Дальность полёта равна $L = v_0 \cos\alpha \cdot t$. Найдём отношение $\frac{L_2}{L_1}$:

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{v_0 \cos\alpha_2 \cdot t_2}{v_0 \cos\alpha_1 \cdot t_1} = 3 \cdot \frac{\sqrt{7}/4}{\sqrt{15}/4} = 3 \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{15}} = \sqrt{\frac{63}{15}} = \sqrt{4{,}2} \approx 2{,}049 \approx 2{,}0$$

Ответ к Задаче 1:

1. $t_1 = 1$ с, $t_2 = 3$ с
2. $\Delta t = 2$ с

3. В $2{,}0$ раза

Задача 2. Брусок на конвейере

Дано:

- Скорость ленты: $v = 3$ м/с
- Начальная скорость бруска относительно земли: $u = 4$ м/с (перпендикулярно краям ленты)
- Коэффициент трения: $\mu = 0{,}8$
- Ускорение свободного падения: $g = 10$ м/с^2

Решение

1. Время уменьшения относительной скорости в два раза Перейдём в инерциальную систему отсчёта (ИСО), связанную с лентой конвейера. Введём оси координат: ось Ox направим вдоль движения ленты, ось Oy — перпендикулярно краям ленты (по направлению начальной скорости u). В начальный момент скорость бруска относительно ленты имеет проекции:

$$v_{\text{отн }0x} = -v = -3 \text{ м/с}, \quad v_{\text{отн }0y} = u = 4 \text{ м/с}$$

Модуль начальной скорости бруска относительно ленты:

$$v_{\text{отн }0} = \sqrt{(-v)^2 + u^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ м/с}$$

Сила трения скольжения направлена строго против вектора относительной скорости бруска и сообщает ему постоянное по модулю ускорение:

$$a = \mu g = 0{,}8 \cdot 10 = 8 \text{ м/с}^2$$

Поскольку в системе отсчёта ленты ускорение всё время направлено против относительной скорости, брусок в этой ИСО движется прямолинейно равнозамедленно. Модуль относительной скорости меняется по закону $v_{\text{отн}}(t) = v_{\text{отн }0} - at$. Когда скорость уменьшится в 2 раза ($v_{\text{отн }1} = \frac{v_{\text{отн }0}}{2} = 2{,}5$ м/с), пройдёт время:

$$t_1 = \frac{v_{\text{отн }0} - v_{\text{отн }1}}{a} = \frac{5 - 2{,}5}{8} = \frac{2{,}5}{8} = 0{,}3125 \text{ с} \approx 0{,}3 \text{ с}$$

2. Модуль скорости бруска относительно земли в этот момент Так как в системе ленты движение прямолинейное, в момент t_1 вектор относительной скорости $v_{\text{отн }1}$ сохраняет своё первоначальное направление и равен половине начального вектора $v_{\text{отн }0}$:

$$v_{\text{отн }1x} = \frac{-v}{2} = -1{,}5 \text{ м/с}, \quad v_{\text{отн }1y} = \frac{u}{2} = 2 \text{ м/с}$$

Перейдём обратно в систему отсчёта Земли ($u_1 = v_{\text{отн }1} + v$):

$$u_{1x} = v_{\text{отн }1x} + v = -1{,}5 + 3 = 1{,}5 \text{ м/с}$$

$$u_{1y} = v_{\text{отн }1y} = 2 \text{ м/с}$$

Модуль скорости бруска относительно земли:

$$u_1 = \sqrt{u_{1x}^2 + u_{1y}^2} = \sqrt{1{,}5^2 + 2^2} = \sqrt{2{,}25 + 4} = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5 \text{ м/с}$$

3. Максимальная ширина ленты Направление скорости бруска поперёк ленты (вдоль оси Oy) задано однозначно (в одну сторону). Наименее благоприятный случай — когда в начальный момент брусок находится вплотную к тому краю ленты, *от которого* направлена его скорость u. Чтобы брусок гарантированно достиг противоположного края при любом начальном положении, ширина ленты D не должна превышать максимальное смещение бруска поперёк ленты S_y до полной остановки относительно ленты.

Полный тормозной путь бруска в системе отсчёта ленты:

$$S_{\text{отн}} = \frac{v_{\text{отн }0}^2}{2a} = \frac{5^2}{2 \cdot 8} = \frac{25}{16} \text{ м}$$

Так как траектория в системе ленты — прямая линия, смещение поперёк ленты (вдоль оси Oy) составляет:

$$D_{\max} = S_y = S_{\text{отн}} \cdot \frac{u}{v_{\text{отн }0}} = \frac{v_{\text{отн }0} \cdot u}{2\mu g} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 8} = \frac{20}{16} = 1{,}25 \text{ м} \approx 1{,}3 \text{ м}$$

Ответ к Задаче 2:

1. $0{,}3$ с (точное значение $0{,}3125$ с)
2. $2{,}5$ м/с
3. $1{,}3$ м (точное значение $1{,}25$ м)

Задача 3. Куб из резисторов

Дано:

- Сопротивление одного резистора: $R = 12$ Ом
- Напряжение источника: $U = 6$ В

Решение

1. Эквивалентное сопротивление после перегорания ребра Обозначим вершины куба, между которыми включён источник (концы перегоревшего ребра), как A и B. В целом (неповреждённом) кубе эквивалентное сопротивление между соседними вершинами A и B хорошо известно и находится методом симметрии (складыванием схемы относительно плоскости симметрии, проходящей через ребро AB):

$$R_{\text{цел}} = \frac{7}{12} R$$

Подставив $R = 12$ Ом, получаем сопротивление целого каркаса:

$$R_{\text{цел}} = \frac{7}{12} \cdot 12 = 7 \text{ Ом}$$

В целом кубе ребро AB (сопротивлением R) соединено параллельно со всей остальной частью куба (остальными 11 рёбрами), эквивалентное сопротивление которой и есть искомое сопротивление $R_{\text{экв}}$ после перегорания ребра AB:

$$\frac{1}{R_{\text{цел}}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_{\text{экв}}}$$

Отсюда находим $R_{\text{экв}}$:

$$\frac{1}{R_{\text{экв}}} = \frac{1}{R_{\text{цел}}} - \frac{1}{R} = \frac{12}{7R} - \frac{1}{R} = \frac{5}{7R} \implies R_{\text{экв}} = \frac{7}{5} R = 1{,}4R$$

Подставим $R = 12$ Ом:

$$R_{\text{экв}} = \frac{7}{5} \cdot 12 = 16{,}8 \text{ Ом}$$

2. Во сколько раз изменилось сопротивление Найдём отношение большего сопротивления ($R_{\text{экв}}$) к меньшему ($R_{\text{цел}}$):

$$k = \frac{R_{\text{экв}}}{R_{\text{цел}}} = \frac{\frac{7}{5}R}{\frac{7}{12}R} = \frac{12}{5} = 2{,}4$$

3. Тепловая мощность в каркасе после перегорания По закону Джоуля — Ленца полная выделяемая мощность при подключении к источнику с напряжением $U = 6$ В равна:

$$P = \frac{U^2}{R_{\text{экв}}} = \frac{6^2}{16{,}8} = \frac{36}{16{,}8} = \frac{15}{7} \text{ Вт} \approx 2{,}14 \text{ Вт}$$

Ответ к Задаче 3:

1. $16{,}8$ Ом
2. В $2{,}4$ раза
3. $\frac{15}{7}$ Вт $\approx 2{,}14$ Вт (или $2{,}1$ Вт)

Задача 4. Два зеркала

Дано:

- Угол между зеркалами: $\alpha = 60^\circ$
- Расстояние от источника S до каждого зеркала: $L = 10$ см

Решение

1. Количество различных изображений Поскольку источник равноудалён от обоих зеркал, он лежит на биссектрисе двугранного угла $\alpha = 60^\circ$ (под углом $\beta = 30^\circ$ к каждому зеркалу). Расстояние от источника S до ребра двугранного угла O (линии пересечения зеркал):

$$R_0 = \frac{L}{\sin 30^\circ} = \frac{10}{0{,}5} = 20 \text{ см}$$

Все изображения, даваемые плоскими зеркалами, лежат на окружности радиуса $R_0 = 20$ см с центром в точке O (в плоскости, перпендикулярной ребру угла). Для угла $\alpha = 60^\circ$, который укладывается в 360° целое чётное число раз ($n = \frac{360^\circ}{60^\circ} = 6$), общее количество различных изображений равно:

$$N = n - 1 = 6 - 1 = 5$$

(Проверка по координатам углов: пусть зеркала лежат под углами 0° и 60°, источник — под углом 30°. Отражения дают изображения под углами: $-30^\circ, 90^\circ$ (первое отражение); $-90^\circ, 150^\circ$ (второе отражение); -150° и 210° (третье отражение — эти две точки совпадают). Итого 5 различных точек).

2. Минимальное расстояние между двумя изображениями Источник (30°) и 5 его изображений ($90^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 270^\circ, 330^\circ$) располагаются на окружности радиуса $R_0 = 20$ см в вершинах правильного шестиугольника с угловым шагом $\Delta\varphi = 60^\circ$. Минимальное расстояние — это расстояние между двумя соседними изображениями (хорда, опирающаяся на центральный угол 60°):

$$d_{\min} = R_0 = 20 \text{ см}$$

3. Максимальное расстояние между двумя изображениями Среди 5 изображений есть пары диаметрально противоположных точек: например, изображения под углами 90° и 270° (или 150° и 330°). Угол между ними относительно центра O равен 180°. Максимальное расстояние равно диаметру окружности:

$$d_{\max} = 2R_0 = 2 \cdot 20 = 40 \text{ см}$$

4. Максимальное число последовательных отражений луча Используем метод развёртки (выпрямления лучей): вместо отражения луча от зеркала будем продолжать луч по прямой в зазеркалье, последовательно отражая сами зеркала (образующие сектора по 60°). Любой луч, вышедший из источника S в сторону зеркал (и не попавший прямо в вершину угла O), представляет собой прямую линию, не проходящую через центр O. Прямая на плоскости может пересечь лучи веера с угловым шагом 60° только в пределах развёрнутого угла (180°). Максимальное число пересечений границ секторов по 60° на интервале открытого полупространства 180° равно:

$$k_{\max} = \frac{180^\circ}{60^\circ} = 3$$

(Например, если пустить луч почти параллельно одному из зеркал по направлению к вершине угла, углы падения на зеркала при последовательных отражениях составят: $\approx 0^\circ \rightarrow$ 1-е отражение под углом $\approx 60^\circ$ к нормали $\rightarrow$ 2-е отражение под углом $\approx 0^\circ$ к нормали (перпендикулярно зеркалу) $\rightarrow$ 3-е отражение под углом $\approx 60^\circ$ к нормали, после чего луч уходит из угла наружу).

Ответ к Задаче 4:

1. 5 изображений
2. 20 см
3. 40 см
4. 3 отражения

Задача 5. Намокание

Анализ экспериментальных данных и линеаризация (пункты 2 и 3)

В момент $t = 0$ длина намокшей части уже равна $x_0 = 15$ мм (глубина погружения в воду). Следовательно, высота подъёма воды над уровнем жидкости за счёт капиллярных явлений равна:

$$\Delta x = x - x_0 = x - 15 \text{ (мм)}$$

По закону кинетики капиллярного впитывания (закон Лукаса — Уошберна) при подъёме жидкости на небольшую высоту (пока сила тяжести много меньше капиллярных сил) квадрат высоты подъёма пропорционален времени: $\Delta x^2 = k \cdot t$, откуда $\Delta x \propto \sqrt{t}$. Проверим эту гипотезу по экспериментальной таблице:

t, с	x, мм	$\Delta x = x - 15$, мм	Δx^2, мм^2	**Отношение** $k = \frac{\Delta x^2}{t}$, мм^2/с	$\sqrt{t}$, с$^{1/2}$	**Отношение** $a = \frac{\Delta x}{\sqrt{t}}$, мм/с$^{1/2}$
0	15	0	0	—	0	—
16	20	5	25	1,56	4,00	1,25
53	25	10	100	1,89	7,28	1,37
91	30	15	225	2,47	9,54	1,57
155	35	20	400	2,58	12,45	1,61
212	40	25	625	2,95	14,56	1,72
319	45	30	900	2,82	17,86	1,68
418	50	35	1225	2,93	20,45	1,71
552	55	40	1600	2,90	23,49	1,70
900	65	50	2500	2,78	30,00	1,67

(Примечание: В условии указано, что цена деления шкалы на бумаге равна $0{,}5$ см $= 5$ мм, поэтому абсолютная погрешность измерений координаты составляет около $\Delta_x \approx 2{,}5$ мм. Для первых точек при малых Δx относительная погрешность велика, а начиная с $t = 91$ с и вплоть до $t = 900$ с отношение $\frac{\Delta x}{\sqrt{t}}$ держится практически постоянным на уровне $1{,}67$–$1{,}72$ мм/с$^{1/2}$).

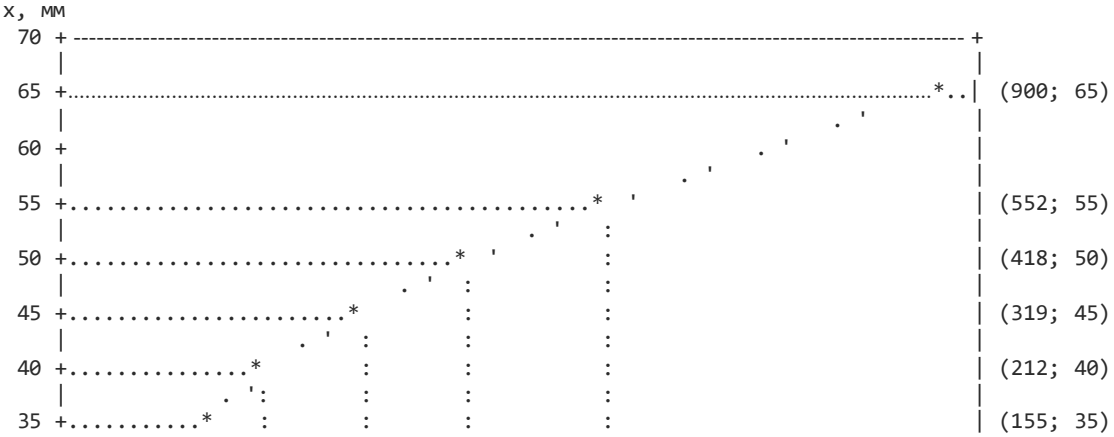
Таким образом, зависимость $x(t)$ с высокой точностью описывается корневой функцией:

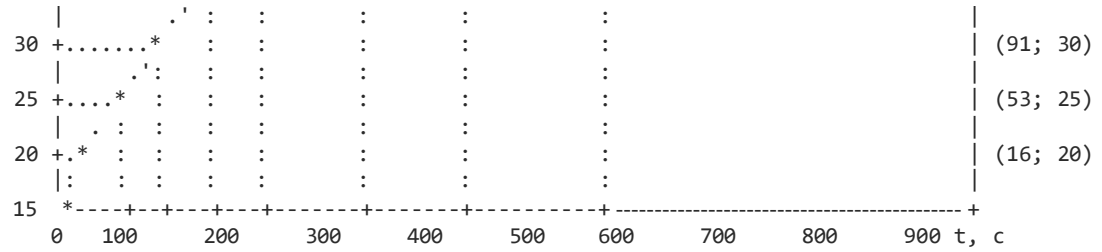
$$x(t) = x_0 + a \sqrt{t}$$

(или в эквивалентном виде: $(x - x_0)^2 = k \cdot t$*, где* $k = a^2$*).*

1. График зависимости $x(t)$

Ниже представлена координатная сетка для переноса на чистовик (по горизонтальной оси — время t в секундах, по вертикальной оси — длина x в миллиметрах). Плавная аппроксимирующая кривая проведена по формуле $x(t) = 15 + 1{,}67\sqrt{t}$:





Рекомендации по оформлению графика на бланке:

1. Выберите удобный масштаб на миллиметровке или клетчатом листе:
   - По оси абсцисс (t, с): 1 см (2 клетки) = 100 с (шкала от 0 до 900 с займёт 9 см).
   - По оси ординат (x, мм): 1 см (2 клетки) = 5 мм (шкала от 0 или от 10 мм до 70 мм займёт 12 см).
2. Нанесите все 10 экспериментальных точек из таблицы (крестиками или кружками) и проведите через них плавную параболическую кривую (ветвь параболы, выходящую из точки $(0; 15)$ круто вверх и постепенно выполаживающуюся).

2 и 3. Формула зависимости и значения постоянных величин

- Приближённая формула зависимости:

$$x(t) = x_0 + a \quad t$$

(Допустима также запись в виде: $x(t) = x_0 + \quad k \cdot t$*).*

- Численные значения и единицы измерения констант:
  1. Начальная длина намокшей части (при $t = 0$):

$$x_0 = 15 \text{ мм} \quad (\text{или } 0{,}015 \text{ м})$$

  2. Коэффициент скорости капиллярного намокания a (находится усреднением по точкам или методом наименьших квадратов: $a \approx \frac{65-15}{900} = \frac{50}{30} = \frac{5}{3}$ мм/с$^{1/2}$):

$$a = 1{,}67 \text{ мм/с}^{1/2} \quad (\text{допустимый диапазон в критериях жюри: } 1{,}6\text{–}1{,}7 \text{ мм/с}^{1/2} \text{ или } 1{,}67 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}^{1/2})$$

(Если используется формула с параметром k *под корнем* $x(t) = x_0 + kt$*, то* $k = a^2 \approx 2{,}8$ мм^2/с *с допустимым диапазоном* $2{,}6\text{–}3{,}0$ мм^2/с*).*
