

Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике
для 11 класса
2026 — 2027 учебный год

Максимальное количество баллов за задачу — 7
Максимальное количество баллов за работу — 56

Задание № 1 Клон 1

Условие: Андрей и Борис тренируют броски в баскетболе. Однажды они выполнили в общей сложности 105 бросков на двоих, при этом каждый выполнил хотя бы один бросок. Андрей реализовал ровно $\frac{1}{3}$ своих бросков, а Борис — ровно $\frac{3}{5}$ своих. Какое максимальное количество успешных бросков они могли бы выполнить на двоих?

Решение: Андрей реализовал ровно $\frac{1}{3}$ своих бросков. Значит, число его бросков должно делиться на 3, то есть $3a$ бросков, из которых a успешных. Аналогично у Бориса $5b$ бросков, из которых $3b$ успешных.

По условию $3a + 5b = 105$, откуда $b = \frac{105-3a}{5} = 21 - \frac{3}{5}a$. Видим, что b — целое, только если a делится на 5. Значит, $a = 5k$ и $b = 21 - \frac{3}{5}a = 21 - 3k$. По условию каждый выполнил хотя бы один бросок, поэтому $k \geq 1$.

Нам нужно максимизировать успешные броски, то есть выражение $a + 3b = 5k + 3(21 - 3k) = 63 - 4k \leq 63 - 4 \cdot 1 = 59$.

Заметим, что 59 успешных бросков возможно: Андрей сделает 15 бросков, из которых $\frac{1}{3} \cdot 15 = 5$ успешных; Борис сделает 90 бросков, из которых $\frac{3}{5} \cdot 90 = 54$ успешных.

Ответ: 59.

Критерии: Точное совпадение — 76.

Задание № 1 Клон 2

Условие: Андрей и Борис тренируют броски в баскетболе. Однажды они выполнили в общей сложности 135 бросков на двоих, при этом каждый выполнил хотя бы один бросок. Андрей реализовал ровно $\frac{2}{5}$ своих бросков, а Борис — ровно $\frac{2}{3}$ своих. Какое максимальное количество успешных бросков они могли бы выполнить на двоих?

Решение: аналогично клону 1.

Ответ: 86.

Критерии: аналогичны клону 1.

Задание № 1 Клон 3

Условие: Андрей и Борис тренируют броски в баскетболе. Однажды они выполнили в общей сложности 154 бросков на двоих, при этом каждый выполнил хотя бы один бросок. Андрей реализовал ровно $\frac{1}{4}$ своих бросков, а Борис — ровно $\frac{2}{7}$ своих. Какое максимальное количество успешных бросков они могли бы выполнить на двоих?

Решение: аналогично клону 1.

Ответ: 43.

Критерии: аналогичны клону 1.

Задание № 1 Клон 4

Условие: Андрей и Борис тренируют броски в баскетболе. Однажды они выполнили в общей сложности 132 бросков на двоих, при этом каждый выполнил хотя бы один бросок. Андрей реализовал ровно $\frac{2}{5}$ своих бросков, а Борис — ровно $\frac{3}{4}$ своих. Какое максимальное количество успешных бросков они могли бы выполнить на двоих?

Решение: аналогично клону 1.

Ответ: 92.

Критерии: аналогичны клону 1.

Задание № 2 Клон 1

Условие: Какую сумму цифр может иметь число, делящееся на 13? Выберите все подходящие варианты:

- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 5
- ☐ 7
- ☐ 12
- ☐ 14

Решение: если число имеет сумму цифр 1, то оно имеет вид $10^n = 2^n \cdot 5^n$, что не делится на 13.

Числа 1001, 104, 52, 10452, 5252 делятся на 13 и имеют суммы цифр, равные 2, 5, 7, 12, 14 соответственно.

Ответ: 2; 5; 7; 12; 14.

Критерии:

- Точное совпадение — 7б.
- Только один верный вариант — 1б.
- Только два верных варианта — 2б.
- Только три верных варианта — 3б.
- Только четыре верных варианта — 5б.
- Есть хотя бы один неверный ответ — 0б.

Задание № 2 Клон 2

Условие: Какую сумму цифр может иметь число, делящееся на 13? Выберите все подходящие варианты:

- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 7
- ☐ 10
- ☐ 14
- ☐ 17

Решение: аналогично клону 1.

Ответ: 2, 7, 10, 14, 17.

Критерии: аналогичны клону 1.

Задание № 2 Клон 3

Условие: Какую сумму цифр может иметь число, делящееся на 13? Выберите все подходящие варианты:

- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 5
- ☐ 10
- ☐ 11
- ☐ 16

Решение: аналогично клону 1.

Ответ: 2, 5, 10, 11, 16.

Критерии: аналогичны клону 1.

Задание № 2 Клон 4

Условие: Какую сумму цифр может иметь число, делящееся на 13? Выберите все подходящие варианты:

- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 8
- ☐ 9
- ☐ 16
- ☐ 17

Решение: аналогично клону 1.

Ответ: 2, 8, 9, 16, 17.

Критерии: аналогичны клону 1.

Задание № 3 Клон 1

Условие: На плоскости расположены 20 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Некоторые из них покрасили в красный цвет, а остальные — в синий, причём есть точки обоих цветов. Потом провели всевозможные отрезки, соединяющие данные точки. Назовём отрезок *одноцветным*, если он соединяет точки одного цвета, иначе — *разноцветным*. Пусть было A разноцветных и B одноцветных отрезков.

а) Найдите наибольшее возможное значение разности $A - B$.

б) Найдите наименьшее возможное значение разности $A - B$.

Решение: пусть было x красных точек, $20 - x$ синих ($x \geq 1$ и $20 - x \geq 1$). Тогда разноцветных отрезков $A = x(20 - x)$. Заметим, что всего отрезков будет $\frac{20 \cdot 19}{2} = 190$, поэтому разность количества разноцветных и одноцветных отрезков равна разности удвоенного количества разноцветных и общего числа отрезков, то есть $2x(20 - x) - 190 = -2x^2 + 40x - 190$.

Введём функцию $f(x) = -2x^2 + 40x - 190$ при $1 \leq x \leq 19$. Данная парабола с ветвями вниз принимает наибольшее значение в вершине $x_0 = -\frac{40}{2 \cdot (-2)} = 10$. Тогда $f(10) = 10$.

Наименьшее значение принимается при значении аргумента, находящемся на наибольшем расстоянии от вершины. Поскольку $|1 - 10| = |19 - 10|$, то наименьшее значение равно $f(1) = -152$.

Ответ: а) 10; б) -152 .

Критерии:

- Точное совпадение — 7б.
- Верный ответ в пункте а) или б) — 3б.

Задание № 3 Клон 2

Условие: На плоскости расположены 18 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Некоторые из них покрасили в красный цвет, а остальные — в синий, причём есть точки обоих цветов. Потом провели всевозможные отрезки, соединяющие данные точки. Назовём отрезок *одноцветным*, если он соединяет точки одного цвета, иначе — *разноцветным*. Пусть было A разноцветных и B одноцветных отрезков.

а) Найдите наибольшее возможное значение разности $A - B$.

б) Найдите наименьшее возможное значение разности $A - B$.

Решение: аналогично клону 1.

Ответ: а) 9; б) -119 .

Критерии: аналогичны клону 1.

Задание № 3 Клон 3

Условие: На плоскости расположены 22 точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Некоторые из них покрасили в красный цвет, а остальные — в синий, причём есть точки обоих цветов. Потом провели всевозможные отрезки, соединяющие данные точки. Назовём отрезок *одноцветным*, если он соединяет точки одного цвета, иначе — *разноцветным*. Пусть было A разноцветных и B одноцветных отрезков.

а) Найдите наибольшее возможное значение разности $A - B$.

б) Найдите наименьшее возможное значение разности $A - B$.

Решение: аналогично клону 1.

Ответ: а) 11; б) -189 .

Критерии: аналогичны клону 1.

Задание № 3 Клон 4

Условие: На плоскости расположены 24 точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Некоторые из них покрасили в красный цвет, а остальные — в синий, причём есть точки обоих цветов. Потом провели всевозможные отрезки, соединяющие данные точки. Назовём отрезок *одноцветным*, если он соединяет точки одного цвета, иначе — *разноцветным*. Пусть было A разноцветных и B одноцветных отрезков.

а) Найдите наибольшее возможное значение разности $A - B$.

б) Найдите наименьшее возможное значение разности $A - B$.

Решение: аналогично клону 1.

Ответ: а) 12; б) -230 .

Критерии: аналогичны клону 1.

Задание № 4 Клон 1

Условие: В угол AOB вписаны окружности $w_1, w_2, \dots, w_5$ так, что окружность w_{i+1} касается w_i для всех $1 \leq i \leq 4$. Обозначим за A_i точку касания окружности w_i со стороной OA . Найдите $\frac{A_1 A_2 \cdot A_3 A_4}{A_2 A_3 \cdot A_4 A_5}$, если радиусы окружностей w_1 и w_5 равны 3 и 2523 соответственно.

Решение: пусть радиусы окружностей равны r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 , где $r_1 = 3, r_5 = 2523$.

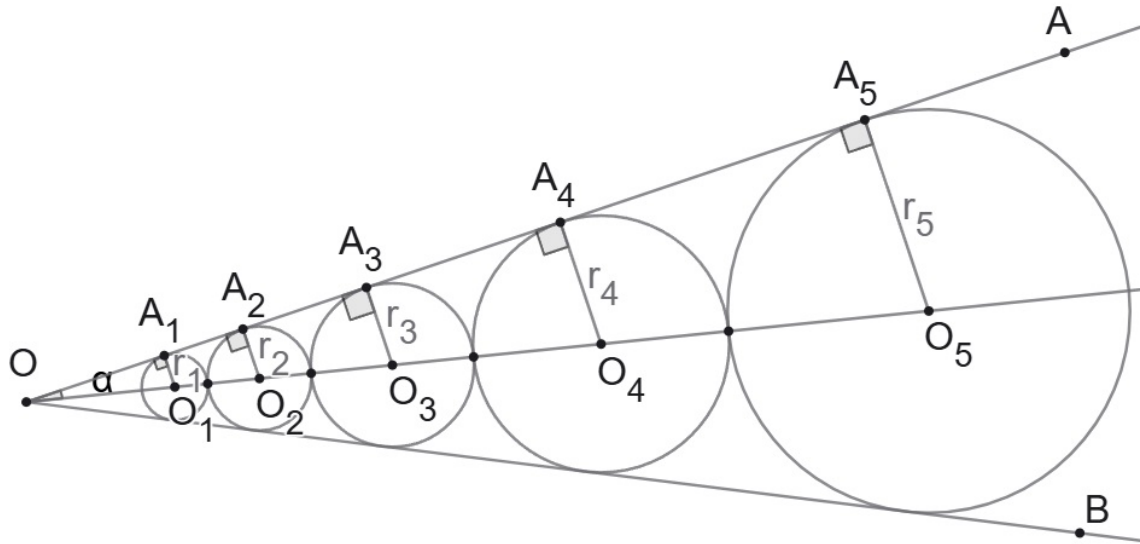
Так как все окружности касаются обеих сторон угла, их центры лежат на биссектрисе угла.

Пусть $\frac{1}{2}\angle AOB = \alpha$. Для окружности радиуса r расстояние от O до её центра равно $r / \sin \alpha$.

Поэтому для двух соседних окружностей с радиусами $r_i < r_{i+1}$ расстояние между их центрами равно $(r_{i+1} - r_i) / \sin \alpha$.

Но окружности касаются, значит, это расстояние равно $r_i + r_{i+1}$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\frac{r_{i+1} - r_i}{\sin \alpha} &= r_i + r_{i+1}. \\ r_{i+1} - r_i &= (r_i + r_{i+1}) \sin \alpha; \\ r_{i+1}(1 - \sin \alpha) &= r_i(1 + \sin \alpha); \\ \frac{r_{i+1}}{r_i} &= \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}.\end{aligned}$$



То есть радиусы образуют геометрическую прогрессию:

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{r_3}{r_2} = \frac{r_4}{r_3} = \frac{r_5}{r_4} = q.$$

Поскольку

$$\frac{r_5}{r_1} = q^4 = \frac{2523}{3} = 841 = 29^2,$$

получаем $q = \sqrt{29}$.

Теперь рассмотрим точки A_i касания окружностей со стороной OA . Расстояние от O до точки касания также пропорционально радиусу: $OA_i = r_i / \operatorname{tg} \alpha$. Поэтому $A_i A_{i+1} = (r_{i+1} - r_i) / \operatorname{tg} \alpha$.

Так как радиусы образуют геометрическую прогрессию, то $r_{i+1} - r_i = r_i(q - 1)$.

Следовательно,

$$\frac{A_1 A_2}{A_2 A_3} = \frac{(r_2 - r_1) / \operatorname{tg} \alpha}{(r_3 - r_2) / \operatorname{tg} \alpha} = \frac{r_2 - r_1}{r_3 - r_2} = \frac{r_1(q - 1)}{r_2(q - 1)} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{q},$$

и аналогично

$$\frac{A_3 A_4}{A_4 A_5} = \frac{1}{q}.$$

Искомое выражение:

$$\frac{A_1 A_2 \cdot A_3 A_4}{A_2 A_3 \cdot A_4 A_5} = \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{q} = \frac{1}{q^2} = \frac{1}{29}.$$

Ответ: $\frac{1}{29}$.

Критерии: Точное совпадение — 76.

Задание № 4 Клон 2

Условие: В угол AOB вписаны окружности $w_1, w_2, \dots, w_5$ так, что окружность w_{i+1} касается w_i для всех $1 \leq i \leq 4$. Обозначим за A_i точку касания окружности w_i со стороной OA . Найдите $\frac{A_1 A_2 \cdot A_3 A_4}{A_2 A_3 \cdot A_4 A_5}$, если радиусы окружностей w_1 и w_5 равны 3 и 2187 соответственно.

Решение: аналогично клону 1.

Ответ: $\frac{1}{27}$.

Критерии: аналогичны клону 1.

Задание № 4 Клон 3

Условие: В угол AOB вписаны окружности $w_1, w_2, \dots, w_5$ так, что окружность w_{i+1} касается w_i для всех $1 \leq i \leq 4$. Обозначим за A_i точку касания окружности w_i со стороной OA . Найдите $\frac{A_1 A_2 \cdot A_3 A_4}{A_2 A_3 \cdot A_4 A_5}$, если радиусы окружностей w_1 и w_5 равны 2 и 1922 соответственно.

Решение: аналогично клону 1.

Ответ: $\frac{1}{31}$.

Критерии: аналогичны клону 1.

Задание № 4 Клон 4

Условие: В угол AOB вписаны окружности $w_1, w_2, \dots, w_5$ так, что окружность w_{i+1} касается w_i для всех $1 \leq i \leq 4$. Обозначим за A_i точку касания окружности w_i со стороной OA . Найдите $\frac{A_1 A_2 \cdot A_3 A_4}{A_2 A_3 \cdot A_4 A_5}$, если радиусы окружностей w_1 и w_5 равны 2 и 2178 соответственно.

Решение: аналогично клону 1.

Ответ: $\frac{1}{33}$.

Критерии: аналогичны клону 1.

Задание № 5 Клон 1

Условие: Вася случайным образом выбирает число n из множества $\{120; 121; \dots; 129\}$ и считает количество нулей, на которое оканчивается произведение $n(n+1)(n+2)$. Петя случайным образом выбирает число m из множества $\{221; 222; \dots; 230\}$ и также считает количество нулей, на которое оканчивается произведение $m(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)$.

а) С какой вероятностью количество нулей у Васи будет больше, чем у Пети? Ответ запишите в виде несократимой дроби.

б) С какой вероятностью у Васи и у Пети будет поровну нулей? Ответ запишите в виде несократимой дроби.

Решение: пусть $N = n(n+1)(n+2)$, $M = m(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)$. Обозначим $\deg_a(b)$ — степень вхождения числа a в число b — такое число k , что b делится на a^k и не делится на a^{k+1} .

Заметим, что $\deg_{10}(x)$ — количество нулей, на которое оканчивается число x .

Посчитаем возможное число нулей в числе Васи. Для этого сначала посчитаем, сколько двоек и пятерок входит в разложение каждого числа на простые множители. Для нахождения количества нулей на конце числа N нужно взять минимум из количества двоек и количества пятерок в разложении числа N на простые множители, то есть:

$$\deg_{10}(N) = \min \left(\deg_2(n) + \deg_2(n+1) + \deg_2(n+2); \deg_5(n) + \deg_5(n+1) + \deg_5(n+2) \right).$$

n	120	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131
$\deg_2(n)$	3	0	1	0	2	0	1	0	7	0	1	0
$\deg_5(n)$	1	0	0	0	0	3	0	0	0	0	1	0
$\deg_{10}(N)$	1	0	0	2	3	1	0	0	1	1		

Аналогично посчитаем возможное число нулей в числе Пети:

m	221	222	223	224	225	226	227	228	229	230	231	232	233	234
$\deg_2(m)$	0	1	0	3	0	1	0	2	0	1	0	3	0	1
$\deg_5(m)$	0	0	0	0	2	0	0	0	0	1	0	0	0	0
$\deg_{10}(M)$	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1				

Вероятность можно посчитать как количество благоприятных исходов, делённое на количество всех исходов.

У Васи 10 вариантов, и для каждого из них есть 10 вариантов у Пети. Значит, всего $10 \cdot 10 = 100$ исходов.

а) Если Вася выберет $n = 124$, то у него число $n(n+1)(n+2)$ будет оканчиваться на три нуля, и это больше, чем в любом варианте у Пети. Получаем 10 благоприятных исходов.

Если Вася выберет $n = 123$, то у него число $n(n+1)(n+2)$ будет оканчиваться на два нуля, и это больше, чем последние 5 вариантов у Пети. Значит, ещё 5 благоприятных исходов.

В остальных вариантах нулей в числе Васи не более одного, а в числе Пети не менее одного. Значит, они не подходят.

Итого вероятность равна: $\frac{10+5}{100} = \frac{3}{20}$.

б) В числах Пети может быть либо один либо два нуля на конце.

Если Вася выберет $n = 123$, то у него число $n(n+1)(n+2)$ будет оканчиваться на два нуля, и это совпадает с первыми 5 вариантами у Пети. Получаем 5 благоприятных исходов.

Если Вася выберет n , равное 120, 125, 128 или 129, то у него число $n(n+1)(n+2)$ будет оканчиваться на один ноль, и это совпадает с последними 5 вариантами у Пети. Получаем $4 \cdot 5 = 20$ благоприятных исходов.

Итого вероятность равна: $\frac{5+20}{100} = \frac{1}{4}$.

Ответ: а) $\frac{3}{20}$; б) $\frac{1}{4}$.

Критерии:

- Точное совпадение — 7б.
- Верный ответ только в одном пункте — 3б.

Задание № 5 Клон 2

Условие: Вася случайным образом выбирает число n из множества $\{241; 242; \dots; 250\}$ и считает количество нулей, на которое оканчивается произведение $n(n+1)(n+2)$. Петя случайным образом выбирает число m из множества $\{323; 324; \dots; 332\}$ и также считает количество нулей, на которое оканчивается произведение $m(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)$.

а) С какой вероятностью количество нулей у Васи будет больше, чем у Пети? Ответ запишите в виде несократимой дроби.

б) С какой вероятностью у Васи и у Пети будет поровну нулей? Ответ запишите в виде несократимой дроби.

Решение: а) $\frac{1}{5}$; б) $\frac{7}{25}$.

Ответ: аналогичны клону 1.

Критерии:

Задание № 5 Клон 3

Условие: Вася случайным образом выбирает число n из множества $\{250; 251; \dots; 259\}$ и считает количество нулей, на которое оканчивается произведение $n(n+1)(n+2)$. Петя случайным образом выбирает число m из множества $\{422; 423; \dots; 431\}$ и также считает количество нулей, на которое оканчивается произведение $m(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)$.

а) С какой вероятностью количество нулей у Васи будет больше, чем у Пети? Ответ запишите в виде несократимой дроби.

б) С какой вероятностью у Васи и у Пети будет поровну нулей? Ответ запишите в виде несократимой дроби.

Решение: аналогично клону 1.

Ответ: а) $\frac{1}{10}$; б) $\frac{3}{10}$.

Критерии: аналогичны клону 1.

Задание № 5 Клон 4

Условие: Вася случайным образом выбирает число n из множества $\{123; 124; \dots; 132\}$ и считает количество нулей, на которое оканчивается произведение $n(n+1)(n+2)$. Петя случайным образом выбирает число m из множества $\{622; 623; \dots; 631\}$ и также считает количество нулей, на которое оканчивается произведение $m(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)$.

а) С какой вероятностью количество нулей у Васи будет больше, чем у Пети? Ответ запишите в виде несократимой дроби.

б) С какой вероятностью у Васи и у Пети будет поровну нулей? Ответ запишите в виде несократимой дроби.

Решение: аналогично клону 1.

Ответ: а) $\frac{3}{25}$; б) $\frac{1}{4}$.

Критерии: аналогичны клону 1.

Задание № 6 Клон 1

Условие: Найдите количество способов разрезать прямоугольник 3×10 на прямоугольники 1×3 и квадраты 3×3 . Фигуры можно поворачивать.

Решение: пусть a_n — число способов разбить прямоугольник $3 \times n$ на квадраты 3×3 и прямоугольники 1×3 . Составим рекуррентное соотношение для a_n , то есть выразим его через предыдущие числа этой последовательности.

Посмотрим, в какой фигуре оказалась самая левая верхняя клетка прямоугольника $3 \times n$.

Если это вертикальный прямоугольник 1×3 , то остался прямоугольник $3 \times (n-1)$, и его можно разрезать a_{n-1} способом.

Если это горизонтальный прямоугольник 1×3 , то вторая и третья клетки левого столбца тоже должны относиться к горизонтальным прямоугольникам 1×3 . Значит, они однозначно заполняют квадрат 3×3 . Остался прямоугольник $3 \times (n-3)$, и его можно разрезать a_{n-3} способами.

Если это квадрат 3×3 , то остался прямоугольник $3 \times (n-3)$, и его можно разрезать a_{n-3} способами.

Итого получаем, что: $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-3}$.

Первые значения посчитаем перебором:

Для прямоугольника 1×3 только один способ — вертикальный прямоугольник 1×3 . То есть $a_1 = 1$.

Для прямоугольника 2×3 только один способ — два вертикальных прямоугольника 1×3 . То есть $a_2 = 1$.

Для прямоугольника 3×3 есть три способа — три вертикальных прямоугольника 1×3 ; три горизонтальных прямоугольника 1×3 ; один квадрат 3×3 . То есть $a_3 = 3$.

Далее можно посчитать по нашей формуле:

$$a_4 = a_3 + 2a_1 = 3 + 2 \cdot 1 = 5;$$

$$a_5 = a_4 + 2a_2 = 5 + 2 \cdot 1 = 7;$$

$$a_6 = a_5 + 2a_3 = 7 + 2 \cdot 3 = 13;$$

$$a_7 = a_6 + 2a_4 = 13 + 2 \cdot 5 = 23;$$

$$a_8 = a_7 + 2a_5 = 23 + 2 \cdot 7 = 37;$$

$$a_9 = a_8 + 2a_6 = 37 + 2 \cdot 13 = 63;$$

$$a_{10} = a_9 + 2a_7 = 63 + 2 \cdot 23 = 109.$$

Ответ: 109.

Критерии: Точное совпадение — 76.

Задание № 6 Клон 2

Условие: Найдите количество способов разрезать прямоугольник 3×11 на прямоугольники 1×3 и квадраты 3×3 . Фигуры можно поворачивать.

Решение: аналогично клону 1.

Ответ: 183.

Критерии: аналогичны клону 1.

Задание № 6 Клон 3

Условие: Найдите количество способов разрезать прямоугольник 4×13 на прямоугольники 1×4 и квадраты 4×4 . Фигуры можно поворачивать.

Решение: аналогично клону 1.

Ответ: 137.

Критерии: аналогичны клону 1.

Задание № 6 Клон 4

Условие: Найдите количество способов разрезать прямоугольник 4×14 на прямоугольники 1×4 и квадраты 4×4 . Фигуры можно поворачивать.

Решение: аналогично клону 1.

Ответ: 215.

Критерии: аналогичны клону 1.

Задание № 7 Клон 1

Условие: Обозначим множество A — множество натуральных чисел, не превосходящих 190 и больших 1, B — множество натуральных чисел, не превосходящих 323. Для каждой пары чисел $a \in A, b \in B$ посчитали число $\text{НОД}(a-1, b+1) \cdot \text{НОД}(a, b)$ и записали на доску. Чему равно наибольшее число, написанное на доске?

Решение: докажем, что $\text{НОД}(a-1, b+1) \cdot \text{НОД}(a, b) \leq a+b$. Действительно, воспользуемся тем, что сумма натуральных чисел делится на НОД этих чисел. Тогда $a+b$ делится на $\text{НОД}(a, b)$ и $\text{НОД}(a-1, b+1)$, поскольку $a-1+b+1=a+b$. Заметим, что числа $\text{НОД}(a, b)$ и $\text{НОД}(a-1, b+1)$ взаимно просты, так как если они оба делятся на некоторое число $d > 1$, то a и $a-1$ делятся на d , а тогда $a-(a-1)=1$ делится на d . Противоречие. Таким образом, $a+b$ делится на каждое из двух взаимно простых чисел, поэтому оно делится на их произведение, следовательно, $a+b$ не меньше этого произведения.

Теперь очевидно, что $\text{НОД}(a-1, b+1) \cdot \text{НОД}(a, b) \leq 190+323=513$, причём при $a=190, b=323$ имеем $\text{НОД}(a-1, b+1)=\text{НОД}(189, 324)=27$, $\text{НОД}(a, b)=\text{НОД}(190, 323)=19$ и $27 \cdot 19=513$.

Ответ: 513.

Критерии: Точное совпадение — 76.

Задание № 7 Клон 2

Условие: Обозначим множество A — множество натуральных чисел, не превосходящих 361 и больших 1, B — множество натуральных чисел, не превосходящих 209. Для каждой пары чисел $a \in A, b \in B$ посчитали число $\text{НОД}(a-1, b+1) \cdot \text{НОД}(a, b)$ и записали на доску. Чему равно наибольшее число, написанное на доске?

Решение: аналогично клону 1.

Ответ: 570.

Критерии: аналогичны клону 1.

Задание № 7 Клон 3

Условие: Обозначим множество A — множество натуральных чисел, не превосходящих 289 и больших 1, B — множество натуральных чисел, не превосходящих 119. Для каждой пары чисел $a \in A, b \in B$ посчитали число $\text{НОД}(a-1, b+1) \cdot \text{НОД}(a, b)$ и записали на доску. Чему равно наибольшее число, написанное на доске?

Решение: аналогично клону 1.

Ответ: 408.

Критерии: аналогичны клону 1.

Задание № 7 Клон 4

Условие: Обозначим множество A — множество натуральных чисел, не превосходящих 253 и больших 1, B — множество натуральных чисел, не превосходящих 575. Для каждой пары чисел $a \in A, b \in B$ посчитали число $\text{НОД}(a-1, b+1) \cdot \text{НОД}(a, b)$ и записали на доску. Чему равно наибольшее число, написанное на доске?

Решение: аналогично клону 1.

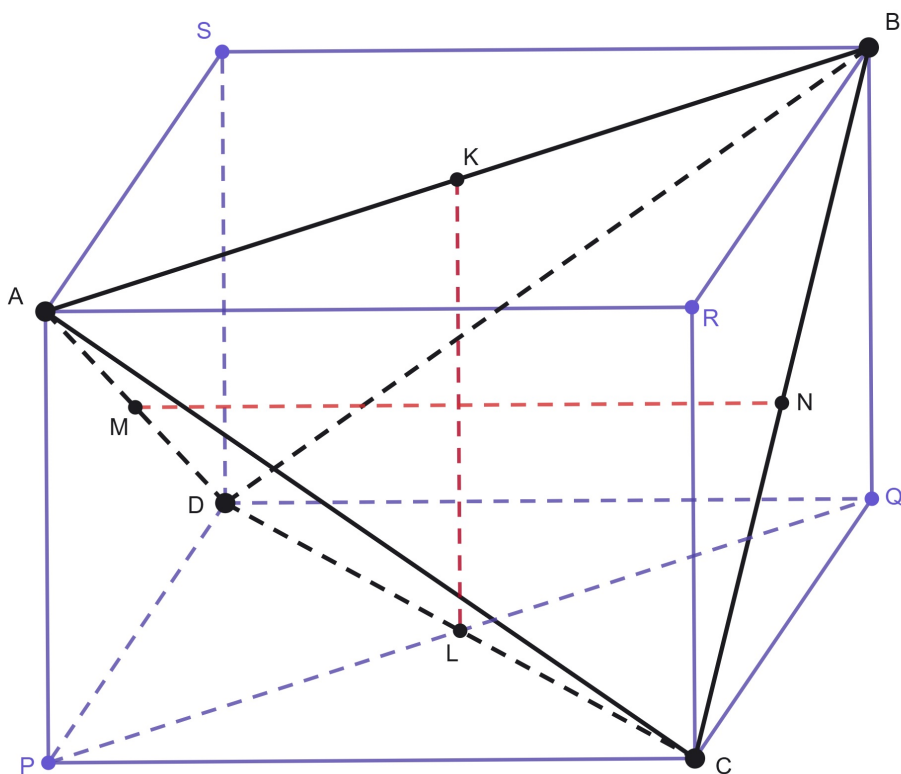
Ответ: 828.

Критерии: аналогичны клону 1.

Задание № 8 Клон 1

Условие: В тетраэдре $ABCD$ точки M, N, K, L — середины рёбер AD, BC, AB и CD соответственно. Оказалось, что отрезок MN перпендикулярен BC и AD , а отрезок KL перпендикулярен AB и CD . Найдите расстояние между прямыми AC и BD , если $BC = 7, AB = 8, AC = 9$.

Решение:



Опишем около тетраэдра $ABCD$ параллелепипед $ASBRPDQC$: через точку L проводим прямую PQ , параллельную AB , откладываем отрезки $LP = LQ = AK$. Аналогично строим точки S и R . Тогда, во-первых, $ASBR$ и $PDQC$ параллелограммы по признаку, во-вторых, их диагонали соответственно равны и параллельны, поэтому плоскости этих параллелограммов параллельны по признаку, в-третьих, $ABQP$ и $CDSR$ также параллелограммы по признаку, откуда их стороны AP, BQ, CR, DS параллельны и равны общей средней линии KL , поэтому все боковые рёбра параллельны и равны, следовательно, $ASBRPDQC$ действительно параллелепипед.

Так как отрезок KL перпендикулярен AB и CD , то KL перпендикулярен PQ и CD , поскольку $AB \parallel PQ$, значит, KL перпендикулярен плоскости (PCQ) по признаку, тогда и ребро PA перпендикулярно плоскости (PCQ) из $KL \parallel PA$. Отсюда следует, что PA перпендикулярно PD и PC . Аналогично PC перпендикулярно PD и PA . Следовательно, три ребра, выходящие из одной вершины, попарно перпендикулярны, то есть описанный параллелепипед прямоугольный.

Пусть $PA = a, PC = c, PD = d$. Нужно найти расстояние между прямыми AC и BD , равное $PD = d$, поскольку AC и BD лежат в параллельных плоскостях (ACP) и (BDQ) соответственно, а отрезок PD с концами на этих плоскостях им перпендикулярен. По теореме Пифагора получаем систему:

$$\begin{cases} a^2 + d^2 = BC^2, \\ a^2 + c^2 = AC^2, \\ c^2 + d^2 = AB^2. \end{cases}$$

Складывая 1-ю с 3-й строчкой, вычитая 2-ю и деля результат на 2, получим:

$$d^2 = \frac{BC^2 + AB^2 - AC^2}{2} = \frac{49 + 64 - 81}{2} = 16 \Rightarrow d = 4.$$

Ответ: 4.

Критерии: Точное совпадение — 76.

Задание № 8 Клон 2

Условие: В тетраэдре $ABCD$ точки M, N, K, L — середины рёбер AD, BC, AB и CD соответственно. Оказалось, что отрезок MN перпендикулярен BC и AD , а отрезок KL перпендикулярен AB и CD . Найдите расстояние между прямыми AC и BD , если $BC = 5, AB = 11, AC = 12$.

Решение: аналогично клону 1.

Ответ: 1.

Критерии: аналогичны клону 1.

Задание № 8 Клон 3

Условие: В тетраэдре $ABCD$ точки M, N, K, L — середины рёбер AD, BC, AB и CD соответственно. Оказалось, что отрезок MN перпендикулярен BC и AD , а отрезок KL перпендикулярен AB и CD . Найдите расстояние между прямыми AC и BD , если $BC = 5, AB = 8, AC = 9$.

Решение: аналогично клону 1.

Ответ: 2.

Критерии: аналогичны клону 1.

Задание № 8 Клон 4

Условие: В тетраэдре $ABCD$ точки M, N, K, L — середины рёбер AD, BC, AB и CD соответственно. Оказалось, что отрезок MN перпендикулярен BC и AD , а отрезок KL перпендикулярен AB и CD . Найдите расстояние между прямыми AC и BD , если $BC = 12, AB = 15, AC = 13$.

Решение: аналогично клону 1.

Ответ: 10.

Критерии: аналогичны клону 1.

