

**Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ**

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 20 заданий. Часть 1 содержит 13 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–13 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ

Ответ: -0,8.

10	-	0	,	8																
----	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Бланк

При выполнении заданий 14–20 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

При выполнении работы разрешается использовать линейку.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

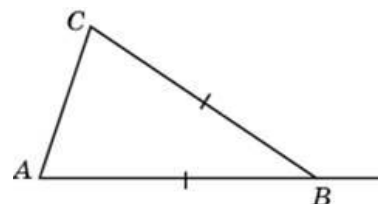
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Часть 1

Ответом к заданиям 1–13 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- 1** В треугольнике ABC $AB = BC$. Внешний угол при вершине B равен 94° . Найдите угол C . Ответ дайте в градусах.

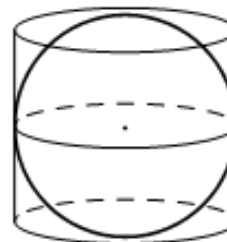


Ответ: _____.

- 2** Даны векторы $\vec{a}(-13; 4)$ и $\vec{b}(-6; 1)$. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Ответ: _____.

- 3** Цилиндр описан около шара. Объём шара равен 50. Найдите объём цилиндра.



Ответ: _____.





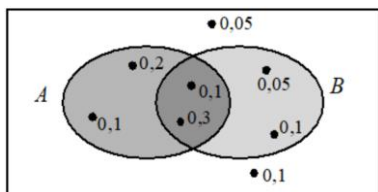
- 4 В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что решка выпала больше раз, чем орёл.

Ответ: _____.

- 5 Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,9. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в первую мишень и не попадёт в три последние.

Ответ: _____.

- 6 На рисунке изображена диаграмма Эйлера для случайных событий A и B в некотором случайном опыте. Точками показаны все элементарные события и около каждого указана его вероятность. Найдите вероятность события A .



Ответ: _____.

- 7 Найдите корень уравнения

$$7^{-6-x} = 343.$$

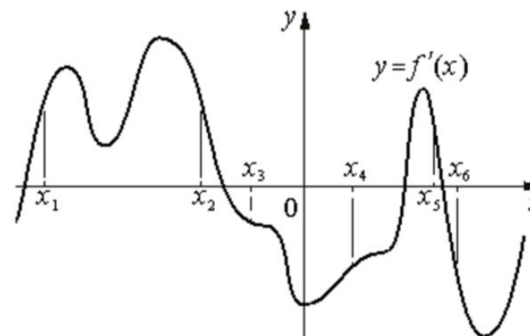
Ответ: _____.

- 8 Найдите значение выражения

$$4\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{7\pi}{3}.$$

Ответ: _____.

- 9 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечены шесть точек: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$. Сколько из этих точек лежит на промежутках возрастания функции $f(x)$?



Ответ: _____.

- 10 Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана-Больцмана, согласно которому мощность излучения P (в ваттах) нагретого тела прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \sigma ST^4$, где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$ — постоянная, площадь поверхности S измеряется в квадратных метрах, а температура T — в градусах Кельвина. Известно, что некоторая звезда имеет площадь поверхности $S = \frac{1}{18} \cdot 10^{21} \text{ м}^2$, а излучаемая ею мощность P равна $4,104 \cdot 10^{27} \text{ Вт}$. Определите температуру этой звезды. Дайте ответ в градусах Кельвина.

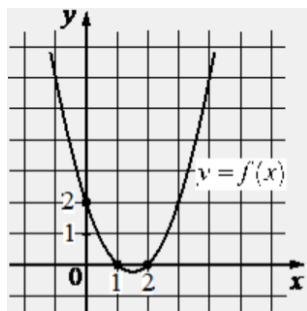
Ответ: _____.

- 11 Моторная лодка прошла против течения реки 187 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 6 часов меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 3 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.



- 12 На рисунке изображён график функции вида $f(x) = ax^2 + bx + c$. Найдите значение $f(-2)$.



Ответ: _____.

- 13 15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r — целое число;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее значение r , при котором общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн рублей.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 14–20 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (14, 15 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 14 а) Решите уравнение

$$36^{\sin 2x} = 6^{2 \sin x}.$$

- б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

- 15 Основанием прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является параллелограмм. На рёбрах $A_1 B_1$, $B_1 C_1$ и BC отмечены точки M , K и N соответственно, причём $B_1 K : K C_1 = 1 : 2$, а $AMKN$ — равнобедренная трапеция с основаниями 4 и 6.

- а) Докажите, что N — середина BC .
б) Найдите площадь трапеции $AMKN$, если объём призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равен 72, а её высота равна 2.

- 16 Решите неравенство

$$\frac{1}{\log_3 x + 4} + \frac{2}{\log_3(3x)} \cdot \left(\frac{2}{\log_3 x + 4} - 1 \right) \leq 0.$$

- 17 При подключении последовательного контура к источнику переменного тока амплитуда силы тока I (в амперах) в цепи зависит от циклической частоты ω (в рад/с) и выражается формулой:

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}},$$

где $U = 220$ В — амплитуда напряжения источника, $R = 44$ Ом — активное сопротивление цепи, $L = 0,2$ Гн — индуктивность катушки, а $C = 20$ мкФ = $20 \cdot 10^{-6}$ Ф — ёмкость конденсатора. Найдите наибольшую возможную силу тока (в амперах) в этой цепи.

- 18** В треугольнике ABC точки M и N лежат на сторонах AB и BC соответственно так, что $AM:MB = CN:NB = 2:3$. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается отрезка MN в точке L .

- а) Докажите, что $AB + BC = 4AC$.
 б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC , если $ML = \frac{9}{5}$, $LN = 3$.

- 19** Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^4 - x^2 + a^2} = x^2 + x - a$$

имеет ровно три различных корня.

- 20** Даны различные натуральные числа, запись которых содержит цифры 1 и 6, либо только одну из этих цифр.

- а) Может ли сумма всех чисел быть равной 173?
 б) Может ли сумма всех чисел быть равной 109?
 в) Какое наименьшее количество чисел могло быть, сумма которых равна 1021?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

Составитель варианта — Евгений Пифагор

Результаты:	<u>Результаты моих учеников:</u> • 53 человека набрали 100 баллов • 789 человек набрали 90+ баллов
	Личные результаты: • Набрал 100 баллов на ЕГЭ по математике профиль • Высшее образование — ТГУ (Тольятти), 2009-2014 • Занял 1 место в трёх олимпиадах по высшей математике, 2009-2011 • 15 лет готовлю к ЕГЭ и ОГЭ
ВК:	https://vk.ru/shkolapifagora 
Ютуб:	https://www.youtube.com/c/pifagor1 

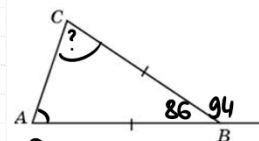


Ответы

Номер задания	Правильный ответ	Видео решение
1	47	
2	82	
3	75	
4	0,25	
5	0,0009	
6	0,7	
7	-9	
8	2	
9	3	
10	6000	
11	14	
12	12	
13	7	
14	а) $\pi n, \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$ б) -3π	
15	$5\sqrt{5}$	
16	$\left(\frac{1}{81}; \frac{1}{27}\right] \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$	
17	5	
18	3	
19	$(-\infty; -1) \cup (-1; 0)$	
20	а) да б) нет в) 6	

Решения

- 1 В треугольнике ABC $AB = BC$. Внешний угол при вершине B равен 94° . Найдите угол C .
Ответ дайте в градусах.



$$\textcircled{1} \angle B_{\text{вн}} = 180 - 94 = 86$$

$$\textcircled{2} \angle C = \frac{180 - 86}{2} = 47$$

ОТВЕТ 47

- 2 Даны векторы $\vec{a}(-13; 4)$ и $\vec{b}(-6; 1)$. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -13 \cdot (-6) + 4 \cdot 1 = 82$$

ОТВЕТ 82

ИСТОЧНИКИ

Основная волна (Резерв) 2026
Досрочная волна 2024
Основная волна (Резерв) 2023
Досрочная волна (Резерв) 2018

ИСТОЧНИКИ

ГПР (старый банк)
ГПР (новый банк)
Пересдача 2026
Деся 2026
Пересдача 2025
Основная волна 2025
Пересдача 2024
Основная волна 2024
Досрочная волна (Резерв) 2024
Досрочная волна 2024





3

Цилиндр описан около шара. Объем шара равен 50. Найдите объем цилиндра.



FCCBC9

ИСТОЧНИКИ

ГПР (старый банк)
ГПР (новый банк)
Досрочная волна 2024
Основная волна 2023
Основная волна 2021
Основная волна 2017
Досрочная волна 2016

$$\textcircled{1} V_{\text{ш}} = 50 = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$\pi R^3 = \frac{25 \cdot 50}{4} = \frac{75}{2}$$

$$\textcircled{2} V_{\text{ц}} = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3 = 2 \cdot \frac{75}{2} = 75$$

ОТВЕТ 75

4

В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что решка выпала больше раз, чем орёл.

454B44

ИСТОЧНИКИ

ГПР (старый банк)
ГПР (новый банк)
Досрочная волна 2023
Досрочная волна 2013

OO
OP
PO
PP

$$P = \frac{1}{4} = 0,25$$

ОТВЕТ 0,25

5

Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,9. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в первую мишень и не попадёт в три последние.

F3F0DF

ИСТОЧНИКИ

ГПР (старый банк)
ГПР (новый банк)
Основная волна 2026
Основная волна (Резерв) 2025
Основная волна 2024
Основная волна 2023
Основная волна 2022

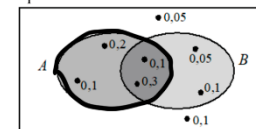
$$\textcircled{1} \begin{cases} P(\text{попасть}) = 0,9 \\ P(\text{промахи}) = 0,1 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{matrix} \textcircled{V} & \textcircled{X} & \textcircled{X} & \textcircled{X} \end{matrix}$$

$$P = 0,9 \cdot 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1 = 0,0009$$

ОТВЕТ 0,0009

6

На рисунке изображена диаграмма Эйлера для случайных событий A и B в некотором случайном опыте. Точками показаны все элементарные события и около каждого указана его вероятность. Найдите вероятность события A .

$$P(A) = 0,1 + 0,1 + 0,2 + 0,3 = 0,7$$

ОТВЕТ 0,7



7 Найдите корень уравнения $7^{-6-x} = 343$.

$$\begin{aligned} 7^{-6-x} &= 7^3 \\ -6-x &= 3 \\ -6-3 &= x \\ x &= -9 \end{aligned}$$

7377CE

ИСТОЧНИКИ

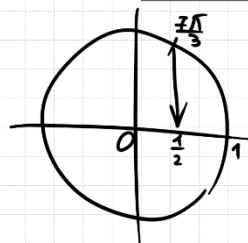
ГПР (старый банк)
ГПР (новый банк)
Демо 2024
Демо 2023
Демо 2022
Демо 2021
Демо 2020
Демо 2019
Демо 2018
Демо 2017
Демо 2016
Демо 2015
Основная волна 2026
Основная волна 2025
Основная волна 2023
Основная волна 2022
Основная волна 2021
Основная волна 2020
Основная волна 2019
Основная волна 2017
Основная волна 2016
Основная волна 2013
Досрочная волна 2024

ОТВЕТ | -9

8 Найдите значение выражения

$$4\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{7\pi}{3}$$

$$4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4 \cdot \sqrt{4}}{2} = 2$$



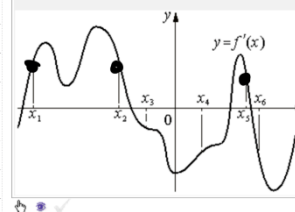
ИСТОЧНИКИ

ГПР (старый банк)
ГПР (новый банк)
Резервная волна (Резерв) 2025
Основная волна 2020

ОТВЕТ | 2

9

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$.
На оси абсцисс отмечены шесть точек: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$.
Сколько из этих точек лежит на промежутках возрастания функции $f(x)$?



A9FB0A

ИСТОЧНИКИ

ГПР (старый банк)
ГПР (новый банк)
Основная волна 2026
Демо 2026
Основная волна 2025 (26 мая)
Демо 2025
Основная волна (Резерв) 2024
Основная волна 2023
Основная волна (Резерв) 2022
Основная волна 2017
Досрочная волна 2016
Основная волна 2014

ОТВЕТ | 3

10

Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана-Больцмана, согласно которому мощность излучения P (в ваттах) нагретого тела прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \sigma S T^4$, где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$ — постоянная, площадь поверхности S измеряется в квадратных метрах, а температура T — в градусах Кельвина. Известно, что некоторая звезда имеет площадь поверхности $S = \frac{1}{18} \cdot 10^{21}$ м², а излучаемая ею мощность P равна $4,104 \cdot 10^{27}$ Вт. Определите температуру этой звезды. Дайте ответ в градусах Кельвина.

C24CBD

ИСТОЧНИКИ

ГПР (старый банк)
ГПР (новый банк)
Основная волна 2026 (9 июня)
Досрочная волна 2026
Пересдача 2024
Основная волна 2024
Досрочная волна (Резерв) 2019
Основная волна (Резерв) 2017
Досрочная волна 2014

$$\begin{aligned} T^4 &= \frac{P}{\sigma \cdot S} \\ T^4 &= \frac{4,104 \cdot 10^{27}}{5,7 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{1}{18} \cdot 10^{21}} = 6^4 \cdot 10^{12} \quad |^{\frac{1}{4}} \\ T &= 6 \cdot 10^3 = 6000 \end{aligned}$$

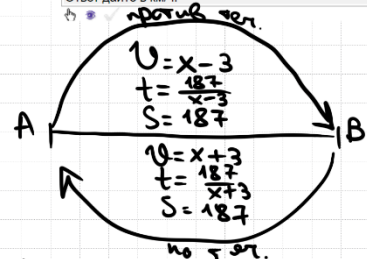
ОТВЕТ | 6000

11

Моторная лодка прошла против течения реки 187 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 6 часов меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 3 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

ИСТОЧНИКИ

ГРП (старый банк)
ГРП (новый банк)
Демо 2025
Основная волна 2022



$$\frac{187 \cdot 6}{x^2 - 9} = \frac{6}{1} \quad | :6$$

$$x^2 - 9 = 187$$

$$x^2 = 196$$

$$x = 14 \quad x = -14$$

$$t_{\text{медл.}} - t_{\text{быстр.}} = 6$$

$$\frac{187}{x-3} - \frac{187}{x+3} = 6$$

$$\frac{187x + 187 \cdot 3 - 187x + 187 \cdot 3}{x^2 - 9} = \frac{6}{1}$$

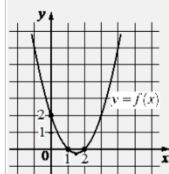
ОТВЕТ 14

12

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = ax^2 + bx + c$. Найдите значение $f(-2)$.

ИСТОЧНИКИ

ГРП (старый банк)
ГРП (новый банк)
Досрочная волна 2026
Досрочная волна (Резерв) 2024
Основная волна (Резерв) 2023



$$① a = 1$$

$$c = 2$$

$$y = 1 \cdot x^2 + b \cdot x + 2$$

$$② \text{Найдём } b:$$

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

$$1,5 = \frac{-b}{2 \cdot 1}$$

$$-b = 3 \quad b = -3$$

$$f(x) = 1 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 2$$

$$f(-2) = 1 \cdot 4 - 3 \cdot (-2) + 2 = 12$$

ОТВЕТ 12

13

15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на $r\%$ (проценты начисляются с концом предыдущего месяца, где r – целое число; со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее значение r , при котором общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн рублей.

ИСТОЧНИКИ

ГРП (старый банк)
ГРП (новый банк)
Основная волна (Резерв) 2023
Досрочная волна 2021
Основная волна 2016
Демо 2023
Демо 2022
Демо 2021
Демо 2020
Демо 2019
Демо 2018
Демо 2017

Пусть T – долг
на начало

Дата Сумма долга

15 я 1 млн = 1000 тыс.

1 1000 · (1 + $\frac{r}{100}$) = 1000 + 10Г

7 Ф 600 тыс

1 600 · (1 + $\frac{r}{100}$) = 600 + 6Г

7 М 400

1 400 + 4Г

7 А 300

1 300 + 3Г

7 М 200

1 200 + 2Г

7 И 100

1 100 + Г

7 И 0

15 И 0

Ответ: 7.

$$O.C.B. < 1200 \text{ тыс.}$$

$$400 + 10Г + 200 + 6Г + 100 + 4Г + 100 + 3Г + 100 + 2Г + 100 + Г < 1200$$

$$1000 + 26Г < 1200$$

$$26 \cdot Г < 200$$

$$Г < \frac{200}{26}$$

$$Г < \frac{100}{13}$$

$$Г < 7 \frac{9}{13}$$

$$Г_{\text{наиб. целое}} = 7$$



14

а) Решите уравнение $36^{\sin 2x} = 6^2 \sin x$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}]$.

а) $(6^2)^{\sin 2x} = 6^2 \sin x$
 $6^{2 \sin 2x} = 6^2 \sin x$
 $2 \sin 2x = 2 \sin x \quad | :2$
 $2 \sin x \cdot \cos x - 1 \sin x = 0$
 $\sin x \cdot (2 \cos x - 1) = 0$
 $\sin x = 0 \quad \cos x = \frac{1}{2}$
 $x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
Получим
Ответ: а) $\pi n, \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
б) -3π

б) Отберём корни с помощью окружности

ИСТОЧНИКИ
ГПР (старый банк)
Основная волна (Резерв) 2026
Основная волна 2017
Основная волна (Резерв) 2012

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2



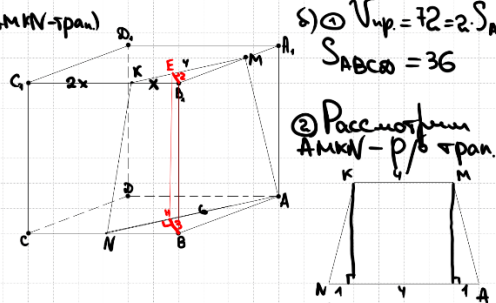
15 Основанием прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является параллелограмм. На рёбрах $A_1 B_1$, $B_1 C_1$ и BC отмечены точки M , K и N соответственно, причём $B_1 K : KC_1 = 1 : 2$, а $AMKN$ – равнобедренная трапеция с основаниями 4 и 6.

а) Докажите, что N – середина BC .

б) Найдите площадь трапеции $AMKN$, если объём призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равен 72, а её высота равна 2.

ИСТОЧНИКИ
ГПР (старый банк)
ГПР (новый банк)
Основная волна 2023

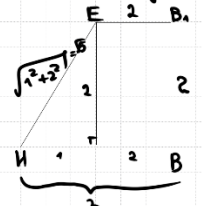
а) $MK \parallel AN$ (т.к. $AMKN$ – трап.)
 $\triangle B_1MK \sim \triangle ABN$ по 2 углам (...)
 $\frac{4}{6} = \frac{B_1K}{BN} = \frac{B_1M}{AB}$
 Пусть $B_1K = x$
 Тогда $B_1C_1 = 3x$
 $\frac{4}{6} = \frac{x}{BN}$
 $BN = \frac{3}{2}x = \frac{1}{2}BC$
 значит N – середина BC

б) $V_{пр} = 72 = 2 \cdot S_{ABCD}$
 $S_{ABCD} = 36$
 ② Рассмотрим $AMKN$ – п/б трап.


③ Рассмотрим $ABCD$
 Пусть BN – перп. к AN
 $S_{ABCD} = 36$
 $S_{ABC} = 18$
 $S_{ABN} = 9$ (т.к. AN – мед. $\triangle ABC$)
 $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot BN = 9$
 $BN = 3$

④ $S_{\triangle B_1MK} = \frac{4}{9} \cdot S_{\triangle ABN}$
 (т.к. $K = \frac{2}{3}$)
 $S_{\triangle B_1MK} = \frac{4}{9} \cdot 9 = 4 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot B_1E$
 $B_1E = 2$

⑤ BK – медиана $\triangle B_1KC_1$
 $KE \perp AN$ по ТП
 значит KE – искомае высота.

⑥ Рассмотрим $BNEB_1$ – прямоуг. трап.


$S_{AMKN} = \frac{4+6}{2} \cdot 5 = 5 \cdot 5$
 Ответ: $5 \cdot 5$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, но при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3



16 Решите неравенство

$$\frac{1}{\log_3 x + 4} + \frac{2}{\log_3(3x)} \cdot \left(\frac{2}{\log_3 x + 4} - 1 \right) \leq 0.$$

ИСТОЧНИКИ

Досрочная волна (Резерв) 2025
Досрочная волна 2021

$$\frac{1}{\log_3 x + 4} + \frac{2}{\log_3 3 + \log_3 x} \cdot \left(\frac{2}{\log_3 x + 4} - \frac{1}{1} \right) \leq 0$$

Пусть $\log_3 x = t$

$$\frac{1}{t+4} + \frac{2}{1+t} \cdot \left(\frac{2}{t+4} - \frac{1}{1} \right) \leq 0$$

$$\frac{1}{t+4} + \frac{2}{1+t} \cdot \left(\frac{2-t-4}{t+4} \right) \leq 0$$

$$\frac{1}{t+4} + \frac{2}{1+t} \cdot \left(\frac{-t-2}{t+4} \right) \leq 0$$

$$\frac{1}{t+4} + \frac{-2t-4}{(t+1)(t+4)} \leq 0$$

$$\frac{t+1-2t-4}{(t+1)(t+4)} \leq 0$$

$$\frac{-t-3}{(t+1)(t+4)} \leq 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$\frac{t+3}{(t+1)(t+4)} \geq 0$$



$$\begin{cases} -4 < t \leq -3 \\ t > -1 \end{cases}$$

$$\log_3 \frac{1}{8} < \log_3 x \leq \log_3 \frac{1}{27}$$

$$\frac{1}{8} < x \leq \frac{1}{27}$$

$$\log_3 x > \log_3 \frac{1}{3} \quad x > \frac{1}{3}$$

Ответ: $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{27} \right] \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty \right)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2





17

При подключении последовательного контура к источнику переменного тока амплитуда силы тока I (в амперах) в цепи зависит от циклической частоты ω (в рад/с) и выражается формулой:

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

где $U = 220$ В – амплитуда напряжения источника, $R = 44$ Ом – активное сопротивление цепи, $L = 0,2$ Гн – индуктивность катушки, а $C = 20$ мкФ = $20 \cdot 10^{-6}$ Ф – емкость конденсатора. Найдите наибольшую возможную силу тока (в амперах) в этой цепи.

① Числитель дроби > 0 числитель = 220
знаменатель дроби > 0

$I_{\text{наиб.}}$ будет при наименьшем возможном значении знаменателя

② Подкоренное = полное + нестр.
значит $I_{\text{наиб.}}$ будет при $(\omega L - \frac{1}{\omega C})^2 = 0$

$$\begin{aligned}\omega L &= \frac{1}{\omega C} \\ \omega L (\omega C) &= \frac{1}{\omega C} \cdot \omega C \\ \omega^2 L C - 1 &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega^2 L C &= 1 \\ \omega^2 &= \frac{1}{L C} \\ \omega &= \frac{1}{\sqrt{L C}} = 500.\end{aligned}$$

$$\textcircled{3} I_{\text{наиб.}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + 0^2}} = \frac{U}{R} = \frac{220}{44} = 5 \text{ A}$$

Ответ: 5 А.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

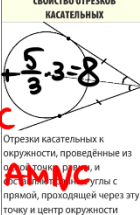




- 18 В треугольнике ABC точки M и N лежат на сторонах AB и BC соответственно так, что $AM : MB = CN : NB = 2 : 3$. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается отрезка MN в точке L .
- а) Докажите, что $AB + BC = 4AC$.
- б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC , если $ML = \frac{9}{5}$, $LN = 3$.

ИСТОЧНИКИ

ГРП (старый банк)
ГРП (новый банк)
Досрочная волна 2022
СВОЙСТВО ОТРЕЗКОВ
КАСАТЕЛЬНЫХ



а) Пусть Q - центр окр-ти
 E, K - точки касание окр-ти с AB
 Пусть $ML = x$
 $LN = y$
 $ML = x = ME$ по св-ву отрезков касат. к окружности
 $LN = y = NK$
 $MN \parallel AC$

б) 1) Пусть $ML = x$, $LN = y$
 $AC = \frac{5}{3}x + \frac{5}{3}y = \frac{5}{3}(x+y)$
 Пусть MK - перп. к AC
 NP - перп. к AC
 h - высота $\triangle ABC$
 $AE = BK = AO$
 $OC = 8 - B = CK$
 $OP = 3 = LN$
 $KO = \frac{9}{5} = ML$
 $AK = 8 - \frac{9}{5}$
 $PC = 8 - B - 3 = 5 - B$

2) $\triangle BMN \sim \triangle ABC$ по 2 углам ($\angle B$ - общий, $\angle BMN = \angle BAC$)
 $k = \frac{AB}{BM} = \frac{5}{3} = \frac{AC}{MN}$
 $AC = \frac{5}{3} \cdot (x+y) = \frac{5}{3}x + \frac{5}{3}y$

3) $AE = AO$ по св-ву отрезков касат. к окружности
 $CK = OC$
 Тогда $AE + CK = \frac{5}{3}x + \frac{5}{3}y$
 Тогда $BM + BN = \frac{3}{2} \cdot (AM + CN) = \frac{3}{2} \cdot (x + \frac{5}{3}x + y + \frac{5}{3}y) = \frac{3}{2} \cdot (\frac{8}{3}x + \frac{8}{3}y) = 4x + 4y$

Получаем
 $AB + BC = (AM + CN) + (BM + BN) = \frac{8}{3}x + \frac{8}{3}y + 4x + 4y = \frac{20}{3}x + \frac{20}{3}y = 4 \cdot AC$

2) $\triangle AMK$: $AM^2 = AK^2 + MK^2$
 $\triangle PCN$: $NC^2 = PC^2 + NP^2$
 $(B + \frac{9}{5})^2 = (B - \frac{9}{5})^2 + h^2$
 $(11 - B)^2 = (5 - B)^2 + h^2$
 Выразим h^2 и упростим
 $(B + \frac{9}{5})^2 - (B - \frac{9}{5})^2 = (11 - B)^2 - (5 - B)^2$
 $\frac{8}{5}B + \frac{81}{25} - \frac{8}{5}B + \frac{81}{25} = 121 - 22B + B^2 - 25 + 10B - B^2$
 $\frac{162}{25} = 96 - 12B$
 $36B = 96 - 12B$
 $48B = 96$
 $B = 2$

3) $h = \sqrt{68^2 - 32^2} = 60$
 $r = \frac{60}{2} = 30$
 Ответ: 30.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, но при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

19 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^4 - x^2 + a^2} = x^2 + x - a$$

имеет ровно три различных корня.

ИСТОЧНИКИ

РПР (старый банк)
РПР (новый банк)
Основная школа (Решары) 2022
Основная школа 2016

168716

$$1) x^2 + x - a \geq 0$$

$$2) x^4 - x^2 + a^2 = (x^2 + (x-a))^2$$

$$3) x^4 - x^2 + a^2 = x^4 + 2x^2(x-a) + (x-a)^2$$

$$x^4 - x^2 + a^2 = x^4 + 2x^3 - 2x^2a + x^2 - 2ax + a^2$$

$$2x^3 - 2x^2a + 2x^2 - 2ax = 0 \quad | :2$$

$$x^3 - x^2a + x^2 - ax = 0$$

$$x \cdot (x^2 - xa + x - a) = 0$$

$$x \cdot (x \cdot (x-a) + (x-a)) = 0$$

$$x \cdot (x-a) \cdot (x+1) = 0$$

$$x=0 \quad x=a \quad x=-1$$

$$a \neq 0 \quad a \neq -1 \quad \text{т.к. иначе не будет 3 корней}$$

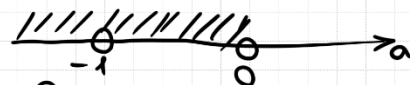
Найдём при каких a каждый из трёх корней удовл.
пер-во. ①
 $x^2 + x - a \geq 0$

для $x=0$
 $0^2 + 0 - a \geq 0$
 $a \leq 0$

для $x=a$
 $a^2 + a - a \geq 0$
 $a^2 \geq 0$
 $a - \text{любо}$

для $x=-1$
 $(-1)^2 - 1 - a \geq 0$
 $a \leq 0$

Найдём пересечение:



Ответ: $(-\infty; -1) \cup (-1; 0)$

20 Даны различные натуральные числа, запись которых содержит цифры 1 и 6, либо только одну из этих цифр.

ИСТОЧНИКИ
100% корректно
100% корректно
Составлено автором

- а) Может ли сумма всех чисел быть равной 173?
б) Может ли сумма всех чисел быть равной 109?
в) Какое наибольшее количество чисел могло быть, сумма которых равна 1021?

Даны числа:

1 641
6 616
11 661
16 666
61 111
66
111
116
161
166

а) Да, например $1+6+166=173$

б) Наибольшим из слагаемых не может быть 111 и больше, значит надо брать в сумме 109, используя

1
6
11
16
61
66

в) Если среди слагаемых есть 66, то 109 не брать

г) Если среди слагаемых нет 66, то все оставшиеся слагаемые меньше 109. Ответ: г) нет.

Даны различные натуральные числа, запись которых содержит цифры 1 и 6, либо только одну из этих цифр.

- а) Может ли сумма всех чисел быть равной 173?
б) Может ли сумма всех чисел быть равной 109?
в) Какое наибольшее количество чисел могло быть, сумма которых равна 1021?

Первый способ

а) Наибольшим из чисел не может быть 1111 и больше, значит надо брать 1021, используя:

1
6
11
16
61
66
111
116
161
166
661
666

б) Можно использовать только одно число, большее 600, иначе сумма превысит 1021

в) Хотит ли 3 слагаемых (или меньше трёх)?
Даже если брать 666 и наибольшее из оставшихся чисел, то 1021 набрать не удастся
⇒ число слагаемых ≥ 4

г) Хотит ли 4 слагаемых?
 $666 + 166 + 161 + 116 = 1109$ (небедно на 88)

Изменив любое из слагаемых, мы изменим 1109 на число, кратное 5, значит 1021 никогда не получится из слагаемых
⇒ число слагаемых ≥ 5

д) Хотит ли 5 слагаемых?
 $666 + 166 + 161 + 116 + 111 = 1220$ (небедно на 109)
Изменив любое из пяти чисел, мы изменим 1220 на число, кратное 5, значит 1021 никогда не получится из пяти слагаемых
⇒ число слагаемых ≥ 6

е) Хотит ли 6 слагаемых?
 $666 + 166 + 161 + 116 + 66 = 1286$ (небедно на 265)

Почему, что 6 слагаемых может быть и это наименьшее возможное количество слагаемых:

Пример:
 $666 + 161 + 116 + 66 + 11 + 1 = 1021$

Ответ: 6

Второй способ

а) Все слагаемые, которые можно использовать, при делении на 5 дают остаток 1

б) 1021 при делении на 5 тоже даёт остаток 1

в) 1 слагаемое использовать нельзя, т.к. 1021 не делится на 5

2 слагаемых дадут сумму, которая при делении на 5 даёт остаток 2

3 слагаемых дадут сумму, которая при делении на 5 даёт остаток 3

4 слагаемых дадут сумму, которая при делении на 5 даёт остаток 4

5 слагаемых дадут сумму, которая при делении на 5 даёт остаток 5

6 слагаемых дадут сумму, которая при делении на 5 даёт остаток 0

⇒ число слагаемых ≥ 6

Приведём пример для 6 слагаемых: $666 + 161 + 116 + 66 + 11 + 1 = 1021$

Ответ: 6

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а, б и в	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в и обоснованно получен верный ответ в пункте а или б	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а и б ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

