

**Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ**

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 20 заданий. Часть 1 содержит 13 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–13 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ

Ответ: -0,8

10	-	0	,	8																
----	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Бланк

При выполнении заданий 14–20 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

При выполнении работы разрешается использовать линейку.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

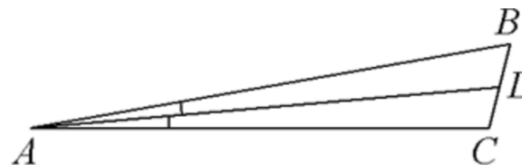
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Часть 1

Ответом к заданиям 1–13 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1

В треугольнике ABC AD – биссектриса, угол C равен 104° , угол CAD равен 5° . Найдите угол B . Ответ дайте в градусах.



Ответ: _____.

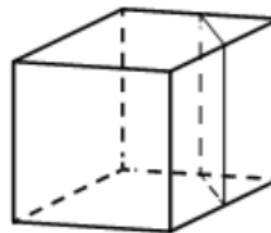
2

Даны векторы $\vec{a} (41; 0)$ и $\vec{b} (1; -1)$. Найдите длину вектора $\vec{a} - 20\vec{b}$.

Ответ: _____.

3

Объём треугольной призмы, отсекаемой от куба плоскостью, проходящей через середины двух рёбер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины, равен 1,5. Найдите объём куба.



Ответ: _____.



- 4 В сборнике билетов по математике всего 20 билетов, в 16 из них встречается вопрос по логарифмам. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по логарифмам.

Ответ: _____.

- 5 Если шахматист А. играет белыми фигурами, то он выигрывает у шахматиста Б. с вероятностью 0,5. Если А. играет чёрными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,32. Шахматисты А. и Б. играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

Ответ: _____.

- 6 Организаторы лотереи выпустили 10 000 билетов. Выигрыши распределены следующим образом.

Выигрыш (в рублях)	100	1000	5000	10 000	50 000
Число выигрышных билетов	500	100	50	10	1

Найдите математическое ожидание величины «выигрыш на один билет». Ответ дайте в рублях.

Ответ: _____.

- 7 Найдите корень уравнения

$$(6x - 13)^2 = (6x - 11)^2.$$

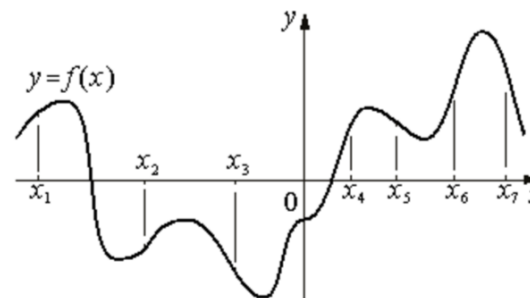
Ответ: _____.

- 8 Найдите значение выражения

$$(5^4)^6 : 5^{22}.$$

Ответ: _____.

- 9 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены семь точек: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



Ответ: _____.

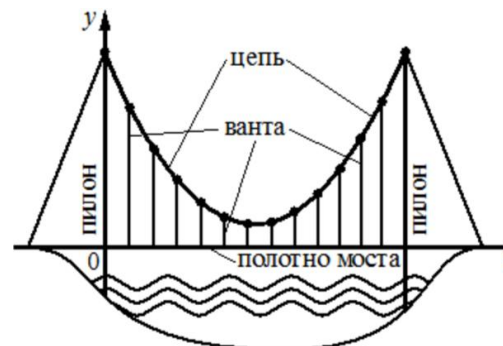
- 10 На рисунке изображена схема моста. Вертикальные пилоны связаны провисающей цепью. Тросы, которые свисают с цепи и поддерживают полотно моста, называются вантами.

Введём систему координат:

ось Oy направим вертикально вверх вдоль одного из пилонов, а ось Ox направим вдоль полотна моста, как показано на рисунке. В этой системе координат линия, по которой провисает цепь моста, задаётся формулой

$$y = 0,0043x^2 - 0,74x + 35,$$

где x и y измеряются в метрах. Найдите длину ванта, расположенной в 70 метрах от пилона. Ответ дайте в метрах.



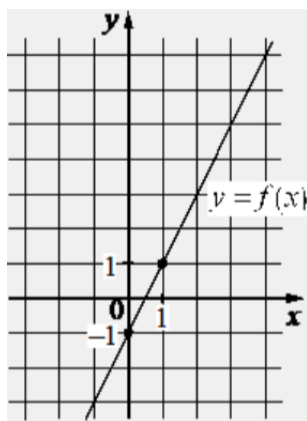
Ответ: _____.



- 11 Два велосипедиста одновременно отправились в 140-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 4 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 4 часа раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

- 12 На рисунке изображён график функции вида $f(x) = kx + b$. Найдите значение $f(7)$.



Ответ: _____.

- 13 В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму 550 000 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за два года)?

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 14–20 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (14, 15 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 14 а) Решите уравнение

$$2\sin^2 x = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right).$$

- б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

- 15 Длина диагонали куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна 3. На луче $A_1 C$ отмечена точка P так, что $A_1 P = 4$.

- а) Докажите, что $PBDC_1$ – правильный тетраэдр.
б) Найдите длину отрезка AP .

- 16 Решите неравенство

$$3^x - \frac{702}{3^x - 1} \geq 0.$$

- 17 На заводе имеется генератор с ЭДС $\varepsilon = 50$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом. Инженер подключает к генератору нагрузку, используя реостат, чтобы установить сопротивление нагрузки R (в омах). Сила тока в цепи (в амперах) определяется законом Ома: $I = \frac{\varepsilon}{r+R}$. Тепловая мощность (в ваттах), выделяемая в нагрузке, может быть рассчитана по формуле Джоуля – Ленца: $P = I^2 R$. Какова максимальная тепловая мощность P , которая может быть выделена нагрузкой?



- 18** Биссектриса прямого угла прямоугольного треугольника ABC вторично пересекает окружность, описанную около этого треугольника, в точке L . Прямая, проходящая через точку L и середину N гипотенузы AB , пересекает катет BC в точке M .

- а) Докажите, что $\angle BML = \angle BAC$.
 б) Найдите площадь треугольника ABC , если $AB = 20$ и $CM = 3\sqrt{5}$.

- 19** Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^2 - a(a-1)x - a^3}{\sqrt{3+2x-x^2}} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

- 20** а) Можно ли вычеркнуть несколько цифр из числа 123456789 так, чтобы получилось число, кратное 72?
 б) Можно ли вычеркнуть несколько цифр из числа 846927531 так, чтобы получилось число, кратное 72?
 в) Какое наибольшее количество цифр можно вычеркнуть из числа 124875963 так, чтобы получилось число, кратное 72?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

Составитель варианта — Евгений Пифагор

Результаты:	<u>Результаты моих учеников:</u> • 53 человека набрали 100 баллов • 789 человек набрали 90+ баллов
	Личные результаты: • Набрал <u>100 баллов</u> на ЕГЭ по математике профиль • Высшее образование — ТГУ (Тольятти), 2009-2014 • Занял 1 место в трёх олимпиадах по высшей математике, 2009-2011 • 15 лет готовлю к ЕГЭ и ОГЭ
ВК:	https://vk.ru/shkolapifagora 
Ютуб:	https://www.youtube.com/c/pifagor1 



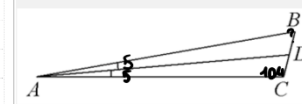
Ответы

Номер задания	Правильный ответ	Видео решение
1	66	
2	29	
3	12	
4	0,8	
5	0,16	
6	55	
7	2	
8	25	
9	4	
10	4,27	
11	14	
12	13	
13	720000	
14	а) $\pi n, -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$ б) $-\frac{13\pi}{6}; -2\pi; -\pi$	
15	$\sqrt{11}$	
16	$(-\infty; 0) \cup [3; +\infty)$	
17	625	
18	80	
19	$(-\sqrt{3}; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1)$	
20	а) да б) нет в) 5	

Решения

1

В треугольнике ABC AD — биссектриса, угол C равен 104° , угол CAD равен 5° . Найдите угол B . Ответ дайте в градусах.



$$\angle B = 180 - 104 - 10 = 66$$

ИСТОЧНИКИ

ГПР (старый банк)
ГПР (новый банк)
Досрочная волна 2026
Основная волна 2025
Основная волна 2013

ОТВЕТ 66

2

Даны векторы $\vec{a} (41; 0)$ и $\vec{b} (1; -1)$. Найдите длину вектора $\vec{a} - 20\vec{b}$.

$$\vec{a} - 20\vec{b} = (41; 0) - 20(1; -1) = (21; 20)$$

$$\textcircled{1} \vec{a} - 20\vec{b} = (21; 20)$$

$$\textcircled{2} |\vec{a} - 20\vec{b}| = \sqrt{21^2 + 20^2} = \sqrt{841} = 29$$

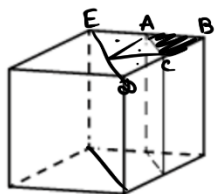
ИСТОЧНИКИ

ГПР (новый банк)
Основная волна (Резерв) 2026
Основная волна 2026 (9 июня)
Основная волна 2026
Досрочная волна 2026
Основная волна (Резерв) 2025
Досрочная волна 2025
Основная волна 2024

ОТВЕТ 29



- 3 Объём треугольной призмы, отсекаемой от куба плоскостью, проходящей через середины двух рёбер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины, равен 1,5. Найдите объём куба.



$$\textcircled{1} \frac{S_{BED}}{S_{ABC}} = 2^2$$

$$\textcircled{2} V_{\text{мал. пр.}} = S_{ABC} \cdot h = 1,5$$

$$\textcircled{3} V_{\text{больш. пр.}} = 8 \cdot S_{ABC} \cdot h = 8 \cdot 1,5 = 12$$

$$V_{\text{куба}} = 8 \cdot V_{\text{пр.}} = 8 \cdot 1,5 = 12$$

ИСТОЧНИКИ

ГПР (новый банк)
Основная волна 2026
Основная волна 2024
Досрочная волна 2021

ОТВЕТ 1 2

- 4 В сборнике билетов по математике всего 20 билетов, в 16 из них встречается вопрос по логарифмам. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по логарифмам.

$$P = \frac{16}{20} = 0,8$$

ИСТОЧНИКИ

ГПР (старый банк)
ГПР (новый банк)
Основная волна 2026
Основная волна 2024
Досрочная волна (Резерв) 2024
Основная волна 2022
Основная волна 2021
Основная волна 2019
Досрочная волна 2014
Основная волна 2013
Деся 2024
Деся 2023
Деся 2022
Деся 2021
Деся 2020
Деся 2019
Деся 2018
Деся 2017
Деся 2016
Деся 2015

ОТВЕТ 0,8

- 5 Если шахматист А. играет белыми фигурами, то он выигрывает у шахматиста Б. с вероятностью 0,5. Если А. играет чёрными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,32. Шахматисты А. и Б. играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выигрывает оба раза.

$$0,5 \cdot 0,32 = 0,16$$

ИСТОЧНИКИ

ГПР (старый банк)
ГПР (новый банк)
Досрочная волна 2015

ОТВЕТ 0,16

- 6 Организаторы лотереи выпустили 10 000 билетов. Выигрыши распределены следующим образом.

Выигрыш (в рублях)	100	1000	5000	10 000	50 000
Число выигрышных билетов	500	100	50	10	1

Найдите математическое ожидание величины «выигрыш на один билет». Ответ дайте в рублях.

$$\textcircled{1} \text{Общий призовой фонд} = 500 \cdot 100 + 100 \cdot 1000 + 50 \cdot 5000 + 10 \cdot 10000 + 1 \cdot 50000 = 550000 \text{ р.}$$

$$\textcircled{2} M(X) = \frac{550000}{10000} = 55 \text{ р.}$$

ОТВЕТ 55





7

Найдите корень уравнения $(6x - 13)^2 = (6x - 11)^2$.

F69DFE

ИСТОЧНИКИ

 ГПР (старый банк)
 ГПР (новый банк)
 Пересдача 2025

$$\cancel{36x^2} - 156x + 169 = \cancel{36x^2} - 132x + 121$$

$$169 - 121 = 156x - 132x$$

$$48 = 24x$$

$$x = \frac{48}{24} = 2$$

ОТВЕТ 2

8

Найдите значение выражения $(5^4)^6 : 5^{22}$.

4EF06F

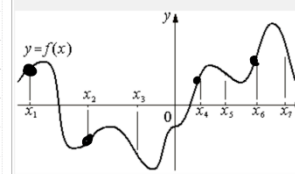
ИСТОЧНИКИ

 ГПР (старый банк)
 ГПР (новый банк)
 Основная волна 2018

$$\frac{5^{24}}{5^{22}} = 5^2 = 25$$

ОТВЕТ 2 5

9

 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены семь точек: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?


A5894A

ИСТОЧНИКИ

 ГПР (старый банк)
 ГПР (новый банк)
 Основная волна 2026
 Основная волна (Резерв) 2025
 Основная волна 2023

ОТВЕТ 4

10

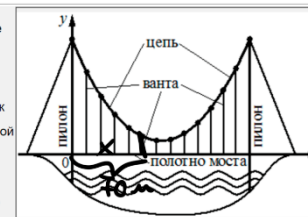
На рисунке изображена схема моста. Вертикальные пилоны связаны провисающей цепью. Тросы, которые висают с цепи и поддерживают полотно моста, называются ваннами.

 Введём систему координат: ось Oy направим вертикально вверх вдоль одного из пилонов, а ось Ox направим вдоль полотна моста, как показано на рисунке. В этой системе координат линия, по которой провисает цепь моста, задаётся формулой

$$y = 0,0043x^2 - 0,74x + 35,$$

 где x и y измеряются в метрах. Найдите длину ванты, расположенной в 70 метрах от пилона. Ответ дайте в метрах.

x=70



7D7F1D

ИСТОЧНИКИ

 ГПР (старый банк)
 Досрочная волна (Резерв) 2018

$$y = \frac{43 \cdot 70 \cdot 70}{10000} - \frac{74 \cdot 70}{100} + 35 = \frac{2107}{100} - \frac{518}{10} + 35 =$$

$$= 21,07 - 51,8 + 35 = 56,07 - 51,80 = 4,27$$

ОТВЕТ 4, 2 7



- 11 Два велосипедиста одновременно отправились в 140-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 4 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 4 часа раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым. Ответ дайте в км/ч.

ИСТОЧНИКИ

ГПР (старый банк)
ГПР (новый банк)
Основная волна 2026
Досрочная волна 2024
Основная волна 2023
Основная волна 2019
Основная волна 2018

$$v = x$$

$$t = \frac{140}{x}$$

$$S = 140$$

$$v = x - 4$$

$$t = \frac{140}{x-4}$$

$$S = 140$$

$$t_{\text{перв}} - t_{\text{втор}} = 4$$

$$\frac{140}{x-4} - \frac{140}{x} = 4$$

$$\frac{140x - 140x + 140 \cdot 4}{x^2 - 4x} = \frac{4}{1}$$

$$x^2 - 4x = 140$$

$$x^2 - 4x - 140 = 0$$

$$x = 14$$

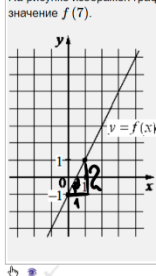
$$x = -10$$

ОТВЕТ 14

- 12 На рисунке изображён график функции вида $f(x) = kx + b$. Найдите значение $f(7)$.

ИСТОЧНИКИ

ГПР (старый банк)
ГПР (новый банк)
Основная волна (Резерв) 2023



$$b = -1$$

$$① \text{tg} \alpha = \frac{2}{1} = 2 = k$$

$$f(x) = 2 \cdot x - 1$$

$$② f(7) = 2 \cdot 7 - 1 = 13$$

ОТВЕТ 13

- 13 В школе 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму 550 000 рублей. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за два года)?

ИСТОЧНИКИ

ГПР (старый банк)
ГПР (новый банк)
Основная волна 2024
Основная волна 2020
Основная волна (Резерв) 2019
Основная волна 2017

Пусть $S = 550000$
 нбрт – месяцу платемо
 x – величина платемо

Дата	Сумма долга
12.6	S
12.7	$1,2S$
12.7	$1,2S - x$
12.8	$1,2^2 S - 1,2x$
12.8	$1,2^2 S - 1,2x - x = 0$

$$① \frac{6^2}{5^2} \cdot S = \frac{6}{5}x + \frac{x}{1}$$

$$\frac{6^2}{5^2} \cdot S = \frac{11x}{5}$$

$$x = \frac{6^2 \cdot 550000 \cdot 5}{5^2 \cdot 11} = 360000$$

$$② \text{O.C.B.} = 2x = 2 \cdot 360000 = 720000 \text{ р.}$$

 Ответ: 720000



14 а) Решите уравнение $2\sin^2 x = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$.
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Решение:
 а) $2\sin^2 x = -\sin x$
 $2\sin^2 x + 1 \cdot \sin x = 0$
 $\sin x \cdot (2\sin x + 1) = 0$
 $\sin x = 0$ $\sin x = -\frac{1}{2}$
 $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$ $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
 $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

б) Отберём корни с помощью окружности.

Получим:
 $x = -\pi$
 $x = -2\pi$
 $x = -\frac{2\pi}{1} - \frac{\pi}{6} = -\frac{13\pi}{6}$

Источники:
 ЕГЭ (старый банк)
 ЕГЭ (новый банк)
 Основная волна 2020
 Основная волна 2014
 Основная волна 2013

Ответ: а) $\pi n, -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
 б) $-\frac{13\pi}{6}, -2\pi, -\pi$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Длина диагонали куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна 3. На луче $A_1 C$ отмечена точка P так, что $A_1 P = 4$.
 а) Докажите, что $P B D C_1$ — правильный тетраэдр.
 б) Найдите длину отрезка AP .

Решение:
 а) Пусть PC — диагональ меньшего куба.
 $PC = A_1 P - A_1 C = 4 - 3 = 1$

б) Пусть $AB = 3x$
 Тогда $A_1 C = 3\sqrt{3} \cdot 3x = 9\sqrt{3}x$
 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Требуется доказать, что $BD = C_1 D = BC_1 = BP$

③ $\triangle ABD$:
 $BD = \sqrt{(3x)^2 + (3x)^2} = 3\sqrt{2} \cdot x$
 $C_1 D = BD = BC_1 = 3\sqrt{2} \cdot x$
 (как диагональ грани куба)

④ Найдём $B_2 P$:
 Пусть BB_1 — ребро мал. куба = x
 $B_2 E_2$ — ребро мал. куба = x
 $E_2 P$ — ребро бол. куба + ребро мал. куба = $4x$
 $B_2 P = \sqrt{x^2 + 4x^2} = \sqrt{17}x$
 $BP = \sqrt{17x^2 + x^2} = 3\sqrt{2} \cdot x$

Получаем $C_1 D = BD = BC_1 = BP = 3\sqrt{2} \cdot x$
 т.е. $P B D C_1$ — прав. тетраэдр.

Ответ: $\sqrt{11}$

Источники:
 Досрочная волна (Рязань) 2017

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, но при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2



Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , ИЛИ при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> с использованием утверждения пункта <i>a</i> , при этом пункт <i>a</i> не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

16	Решите неравенство $\frac{3^x}{x} - \frac{702}{3^x - 1} \geq 0$.	ИСТОЧНИКИ ЕГЭ (старый банк) ЕГЭ (новый банк) Основная волна 2022
----	--	---

Пусть $3^x = t$
 $\frac{t^{(t-1)}}{1} - \frac{702}{t-1} \geq 0$
 $\frac{t^3 - t - 702}{t-1} \geq 0$



$$\begin{cases} -26 \leq t < 1 \\ t \geq 27 \end{cases}$$

$$-26 \leq 3^x < 1$$

$$-26 \leq 3^x < 3^0$$

$$x < 0$$

$$\text{Ответ: } (-\infty; 0) \cup [3; +\infty)$$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

17 На заводе имеется генератор с ЭДС $\varepsilon = 50$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом. Инженер подключает к генератору нагрузку, используя реостат, чтобы установить сопротивление нагрузки R (в омах). Сила тока в цепи (в амперах) определяется законом Ома: $I = \frac{\varepsilon}{r+R}$. Тепловая мощность (в ваттах), выделяемая в нагрузке, может быть рассчитана по формуле Джоуля – Ленца: $P = I^2 R$. Какова максимальная тепловая мощность P , которая может быть выделена нагрузкой?

ИСТОЧНИКИ
 Демо 2027
 Производные
 1 $C' = 0$
 2 $x' = 1$
 3 $(Cx)' = C$
 4 $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
 5 $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
 6 $(u \cdot v)' = u'v + uv'$
 7 $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
 8 $(u(v))' = (u(v))' \cdot v'$
 9 $(\sin x)' = \cos x$
 10 $(\cos x)' = -\sin x$
 11 $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
 12 $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
 13 $(e^x)' = e^x$
 14 $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
 15 $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
 16 $(\log_a b)' = \frac{1}{b \cdot \ln a}$

$P = \frac{\varepsilon^2}{(r+R)^2} \cdot R$
 $P(R) = \frac{2500}{(1+R)^2} = \frac{2500 \cdot R}{R^2 + 2R + 1}$
 $P'(R) = \frac{2500 \cdot (R^2 + 2R + 1) - 2500 \cdot R \cdot (2R + 2)}{(R+1)^4} =$
 $= \frac{2500 \cdot (R+1)^2 - 2500 \cdot R \cdot 2 \cdot (R+1)}{(R+1)^4} = \frac{2500 \cdot (R+1) \cdot (R+1 - 2R)}{(R+1)^4} =$
 $= \frac{2500 \cdot (1 - R)}{(R+1)^3}$
 Сопротивление R не может быть отрицательным, поэтому рассмотрим поведение q -цпи $P(R)$, при $R \geq 0$

 $R_{\max} = 1$
 $P(R)_{\max} = P(1) = \frac{2500 \cdot 1}{(1+1)^2} = \frac{2500}{4} = 625 \text{ В}$
 Ответ: 625 В.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2



- 18 Биссектриса прямого угла прямоугольного треугольника ABC вторично пересекает окружность, описанную около этого треугольника, в точке L . Прямая, проходящая через точку L и середину N гипотенузы AB , пересекает катет BC в точке M .

ИСТОЧНИКИ
Основная волна (резерв) 2020

а) Докажите, что $\angle BML = \angle BAC$.

б) Найдите площадь треугольника ABC , если $AB = 20$ и $CM = 3\sqrt{5}$.

а) 1) AB - диаметр и N - центр окр-ти (т.к. $\triangle ABC$ - прямоуг. и вписан в окр.)

2) Пусть $\angle BAC = d$

$\triangle ABC$:

$$\angle B = 180 - 90 - d = 90 - d$$

$$\angle BLN = 2 \cdot \angle BCL = 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$$

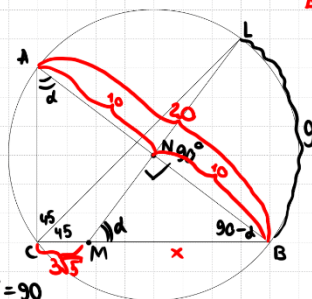
$$\angle BNL = \angle BLN = 90^\circ \text{ (центр)}$$

$$\angle BNM = 90^\circ = \angle BNL \text{ (смежные)}$$

$\triangle BNM$:

$$\angle BMN = 180 - 90 - (90 - d) = d$$

$$\text{Получаем } \angle BML = d = \angle BAC$$



б) Пусть $BM = x$
 $\triangle BNM \sim \triangle BCA$ по 2 углам
 $(\angle BNM = 90^\circ = \angle BCA)$
 $(\angle BMN = d = \angle BAC)$

$$\frac{NM}{AC} = \frac{BN}{BC} = \frac{BM}{AB}$$

$$\frac{10}{x + 3\sqrt{5}} = \frac{x}{20}$$

$$x \cdot (x + 3\sqrt{5}) = 20 \cdot 10$$

$$x^2 + 3\sqrt{5} \cdot x - 200 = 0$$

$$D = 45 + 800 = 845 = 169 \cdot 5$$

$$x = \frac{-3\sqrt{5} \pm 13\sqrt{5}}{2}$$

$$x = \frac{-3\sqrt{5} + 13\sqrt{5}}{2} = 5\sqrt{5}$$

$$BC = 3\sqrt{5} + 5\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$$

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 4\sqrt{5}$$

$$S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{4\sqrt{5} \cdot 8\sqrt{5}}{2} = 80$$

Ответ: 80.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, но при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3



19 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^2 - a(a-1)x - a^3}{\sqrt{3+2x-x^2}} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

ИСТОЧНИКИ

Основная школа (Резерв) 2019

$$1) x^2 - a(a-1)x - a^3 = 0$$

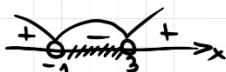
$$2) 3 + 2x - x^2 > 0$$

Чтобы исходное ур-е имело 2 разл. корня, нужно чтобы ур-е 1) имело 2 различных корня и оба этих корня давали удовл. нер-ву 2)

$$\begin{cases} D_0 > 0 \\ x_1 \text{ удовл. нер-ву } 2) \\ x_2 \text{ удовл. нер-ву } 2) \end{cases}$$

Решим нер-во 2)

$$3 + 2x - x^2 > 0 \quad | (-1) \\ x^2 - 2x - 3 < 0$$



Решим ур-е 1)

$$\begin{aligned} x^2 - a(a-1)x - a^3 &= 0 \\ x^2 - a^2x + ax - a^3 &= 0 \\ x^2 - (a^2 - a)x - a^3 &= 0 \\ x_1 &= a^2 \quad x_2 = -a \end{aligned}$$

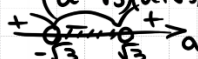
Получаем

$$\begin{cases} 3) D_0 > 0 \\ 4) -1 < a^2 < 3 \\ 5) -1 < -a < 3 \quad | (-1) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} D &= a^2(a-1)^2 - 4(-a^3) = \\ &= a^2(a^2 - 2a + 1 + 4a) = \\ &= a^2(a^2 + 2a + 1) = \\ &= a^2(a+1)^2 \\ x_{1,2} &= \frac{a^2 - a \pm \sqrt{a^2(a+1)^2}}{2} \\ x_1 &= a^2 \quad x_2 = -a \end{aligned}$$

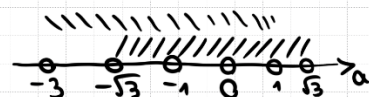
$$3) a^2(a+1)^2 > 0 \\ a^2 \neq 0 \quad (a+1)^2 \neq 0 \\ a \neq 0 \quad a \neq -1$$

$$4) -1 < a^2 < 3 \\ a^2 < 3 \\ a^2 - 3 < 0 \\ (a - \sqrt{3})(a + \sqrt{3}) < 0$$



$$5) 1 > a > -3 \\ -3 < a < 1$$

Найдем пересечение:

Ответ: $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4





20	а) Можно ли вычеркнуть несколько цифр из числа 123456789 так, чтобы получилось число, кратное 72? б) Можно ли вычеркнуть несколько цифр из числа 846927531 так, чтобы получилось число, кратное 72? в) Какое наибольшее количество цифр можно вычеркнуть из числа 124875963 так, чтобы получилось число, кратное 72?	ИСТОЧНИКИ Основная волна (Резерв) 2018
----	---	---

а) 1) Чтобы число делилось на 72 без остатка, нужно, чтобы оно одновременно делилось на 8 и на 9

2) Исходная сумма цифр =
 $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$

3) Текущая сумма цифр = 29
 чтобы число делилось на 9, у него должна быть сумма цифр кратная 9.

б) 1) Искомое число не может быть кратно 72, потому что сумма цифр 124875963 не кратна 9.

2) Текущая сумма цифр = 29
 чтобы число делилось на 9, у него должна быть сумма цифр кратная 9.

в) 1) Искомое число не может быть кратно 72, потому что сумма цифр 124875963 не кратна 9.

2) Текущая сумма цифр = 29
 чтобы число делилось на 9, у него должна быть сумма цифр кратная 9.

3) Искомое число не может быть кратно 72, потому что сумма цифр 124875963 не кратна 9.

4) Текущая сумма цифр = 29
 чтобы число делилось на 9, у него должна быть сумма цифр кратная 9.

5) Искомое число не может быть кратно 72, потому что сумма цифр 124875963 не кратна 9.

6) Текущая сумма цифр = 29
 чтобы число делилось на 9, у него должна быть сумма цифр кратная 9.

7) Искомое число не может быть кратно 72, потому что сумма цифр 124875963 не кратна 9.

8) Текущая сумма цифр = 29
 чтобы число делилось на 9, у него должна быть сумма цифр кратная 9.

9) Искомое число не может быть кратно 72, потому что сумма цифр 124875963 не кратна 9.

10) Текущая сумма цифр = 29
 чтобы число делилось на 9, у него должна быть сумма цифр кратная 9.

11) Искомое число не может быть кратно 72, потому что сумма цифр 124875963 не кратна 9.

12) Текущая сумма цифр = 29
 чтобы число делилось на 9, у него должна быть сумма цифр кратная 9.

13) Искомое число не может быть кратно 72, потому что сумма цифр 124875963 не кратна 9.

14) Текущая сумма цифр = 29
 чтобы число делилось на 9, у него должна быть сумма цифр кратная 9.

15) Искомое число не может быть кратно 72, потому что сумма цифр 124875963 не кратна 9.

16) Текущая сумма цифр = 29
 чтобы число делилось на 9, у него должна быть сумма цифр кратная 9.

17) Искомое число не может быть кратно 72, потому что сумма цифр 124875963 не кратна 9.

18) Текущая сумма цифр = 29
 чтобы число делилось на 9, у него должна быть сумма цифр кратная 9.

19) Искомое число не может быть кратно 72, потому что сумма цифр 124875963 не кратна 9.

20) Текущая сумма цифр = 29
 чтобы число делилось на 9, у него должна быть сумма цифр кратная 9.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах <i>а</i> , <i>б</i> и <i>в</i>	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>в</i> и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>а</i> или <i>б</i>	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах <i>а</i> и <i>б</i> ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте <i>в</i>	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>а</i> или <i>б</i>	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4