Вариант 3
Ответы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
150	2,5	242	0,5	0,6	-0,75	10	-2	50	17	15	-2

Критерии оценивания выполнения заданий

Задача 13

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задача 14

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Задача 15

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Задача 16

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задача 17

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Задача 18

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в решении допущена вычислительная ошибка или оно недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в ходе решения допущена одна ошибка, отличная от вычислительной	2
Получены некоторые верные значения параметра, однако решение содержит более одной ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Задача 19

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта *а*; – обоснованное решение пункта *б*; – искомая оценка в пункте *в*; – пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Задача 13

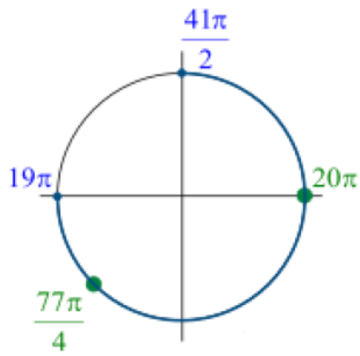
Решение. а) Преобразуем уравнение:

$$\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin x=|\cos x| \Leftrightarrow \cos x-2\sin x=|\cos x|.$$

При $\cos x \geqslant 0$, получим $2\sin x=0 \Leftrightarrow x=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

Условию $\cos x \geqslant 0$ соответствует только $x=2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

При $\cos x<0$ получим



$$2\cos x-2\sin x=0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow\ x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

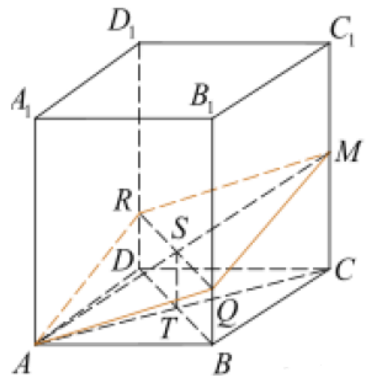
Условию $\cos x<0$ соответствует только $x=-\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

б) Для отбора корней используем единичную окружность. На заданном промежутке лежат корни $\dfrac{77\pi}{4}$ и 20π.

Ответ: а) $\left\{2\pi k; -\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\dfrac{77\pi}{4}$, 20π.

Задача 14

Решение.



а) Пусть сечение пересекает ребро DD_1 в точке R.

Тогда прямая QR лежит в плоскости BB_1D_1D и параллельна BD. Пусть T — центр основания, а S — точка пересечения AM и QR. Треугольники AST и AMC подобны с коэффициентом подобия 2,

$$ST = BQ = \frac{2}{9}BB_1, CM = 2ST = \frac{4}{9}BB_1,$$

откуда

$$C_1M = \frac{5}{9}BB_1 = \frac{5}{9}CC_1 \Leftrightarrow \frac{C_1M}{CC_1} = \frac{5}{9}.$$

б) Заметим, что $AQ^2 = AB^2 + BQ^2,$ далее

$$QM^2 = BC^2 + (MC - QB)^2 = AB^2 + BQ^2,$$

следовательно, $AQMR$ — ромб. Имеем $RQ = BD = 6$, тогда

$$AM = \sqrt{AC^2 + CM^2} = \sqrt{6^2 + \left(\frac{4}{9} \cdot 18\right)^2} = 10.$$

Окончательно получаем

$$S_{AQMR} = \frac{1}{2}RQ \cdot AM = 30.$$

Ответ: б) 30.

Задача 15

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$|x^2-22x+105|\cdot\left(\frac{9}{17-|x+2|}-1\right)\leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x^2-22x+105|\cdot\frac{|x+2|-8}{17-|x+2|}\leqslant 0.$$

Левая часть неравенства принимает неположительные значения в двух случаях:

1) $x^2-22x+105=0$ при условии $|x+2|\neq 17$, тогда $x = 7$;

2) $\dfrac{|x+2|-8}{|x+2|-17}\geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|x+2|\leqslant 8,\\ |x+2|>17\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-10\leqslant x\leqslant 6,\\ x>15,\\ x<-19.\end{array}\right.$

Таким образом, решение исходного неравенства:

$$x\in(-\infty;-19)\cup[-10;6]\cup\{7\}\cup(15;+\infty).$$

Ответ: $(-\infty;-19)\cup[-10;6]\cup\{7\}\cup(15;+\infty)$.

Задача 16

Решение. Пусть S — размер кредита, он равен 1962 тысячам рублей. Срок погашения кредита n составляет 2 года или 24 месяца. Процентная ставка r составляет в первом варианте 18% годовых, а во втором 2% ежемесячно.

В первом варианте долг x выплачен двумя платежами, поэтому $(S\cdot 1,18-x)1,18-x=0$, откуда

$$S\cdot 1,3924-2,18x=0 \Leftrightarrow x=\frac{S\cdot 1,3924}{2,18} \underset{S=1962\text{тыс.}}{\Leftrightarrow} x=1253,16 \text{ тыс. руб.}$$

Сумма выплат составляет $1253,16\cdot 2=2506,32$ тыс. руб.

Во втором варианте суммы долга составляют арифметическую прогрессию:

$$S\cdot 1,02,\ S\cdot 1,02\cdot\frac{23}{24},\ S\cdot 1,02\cdot\frac{22}{24},\ \ldots,\ S\cdot 1,02\cdot\frac{1}{24},$$

а выплаты равны

$$S\cdot 0,02+\frac{S}{24},\ \frac{S\cdot 0,02\cdot 23+S}{24},\ \frac{S\cdot 0,02\cdot 22+S}{24},\ \ldots,\ \frac{S\cdot 0,02+S}{24}.$$

Поэтому для суммы выплат получаем:

$$S+S\cdot 0,02\left(1+\frac{23}{24}+\frac{22}{24}+\ldots+\frac{1}{24}\right)=S+S\cdot 0,02\left(\frac{1+\frac{1}{24}}{2}\cdot 24\right)=$$

$$=S+S\cdot 0,02\cdot\frac{25}{2}=S+\frac{S}{4}=1,25S.$$

или $1,25\cdot 1962=2452,5$ тыс. руб.

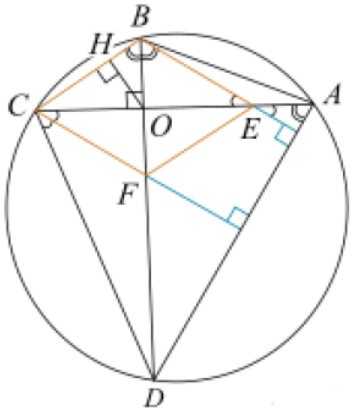
Следовательно, более выгоден кредит, описанный в варианте 2; разность сумм выплат составит

$$2506,32-2452,5=53,82\ (\text{тыс. руб.})=53\,820\ \text{руб.}$$

Ответ: 53 820 рублей.

Задача 17

Решение.



а) Пусть точка пересечения AC и BD это точка O.

Замечаем, что $\angle BCA = \angle BDA$ как вписанные, $\angle ADF = ACF$ по сумме углов треугольника, $\angle BEO = \angle FCO$ из параллельности BE и CF. Следовательно, CO — биссектриса угла BCF, значит, $BO = OF$. Аналогично, BO — биссектриса угла CBE, а значит, прямые CE и BF перпендикулярны и делятся точкой O пополам, следовательно, $CBEF$ — ромб. Что требовалось доказать.

б) Имеем:

$$BF : CE = BO : CO = 3 : 4 \Rightarrow BO : CO : BC = 3 : 4 : 5,$$

откуда $\sin \angle BCO = \dfrac{3}{5}$. Пусть OH — высота треугольника BOC, значит, $OH = \dfrac{3}{5} OC$.

Следовательно,

$$\frac{S_{BCFE}}{S_{\text{вп.кр}}} = \frac{2 \cdot BO \cdot CO}{\pi \cdot (OH)^2} = \frac{2 \cdot \frac{3}{4} \cdot CO^2}{\pi \cdot \frac{9}{25} \cdot CO^2} = \frac{3}{2} : \frac{9\pi}{25} = \frac{75}{18\pi} = \frac{25}{6\pi}.$$

Ответ: б) $\dfrac{25}{6\pi}$.

Задача 18

Решение. Модули противоположных выражений равны, поэтому уравнение можно записать в виде

$$|a^2+a-x-32|+|a^2-a-x-3|=2a-29.$$

В силу эквивалентности $|a|+|b|=a-b \Leftrightarrow \begin{cases} a \geqslant 0, \\ b \leqslant 0, \end{cases}$ для нашего случая получаем:

$$\begin{cases} a^2+a-x-32 \geqslant 0, \\ a^2-a-x-3 \leqslant 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant a^2+a-32, \\ x \geqslant a^2-a-3 \end{cases} \Leftrightarrow a^2-a-3 \leqslant x \leqslant a^2+a-32.$$

Полученная система, а вместе с ней и исходное уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда правая часть полученного двойного неравенства не меньше левой части, то есть при

$$a^2+a-32 \geqslant a^2-a-3 \Leftrightarrow 2a \geqslant 29 \Leftrightarrow a \geqslant \frac{29}{2}.$$

Решения исходного уравнения не принадлежат заданному интервалу если множество решений лежит либо левее этого интервала, либо правее него. Получаем:

$$\left[\begin{array}{l} a^2+a-32 \leqslant -2, \\ a^2-a-3 \geqslant -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2+a-30 \leqslant 0, \\ a^2-a-2 \geqslant 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -6 \leqslant a \leqslant 5, \\ a \leqslant -1 \text{ или } x \geqslant 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow -\infty < a < +\infty.$$

Решением совокупности является любое число. Это означает, что если исходное уравнение имеет решения, то они непременно лежат вне интервала $(-2;-1)$. Таким образом, $a \geqslant \dfrac{29}{2}$.

Ответ: $a \geqslant \dfrac{29}{2}$.

Задача 19

Решение. а) Пусть группы будут, например, такими: 1) 2; 2) 1, 3; 3) 4, 5, 6, 7, 8, 9, 16. Тогда среднее арифметическое в первых двух группах равно 2.

б) Пусть среднее арифметическое в каждой группе равно x.Тогда сумма всех чисел равна количеству чисел, умноженному на x, значит,
$x=(1+2+3+4+5+6+7+8+9+16):10=\frac{61}{10}$. Таким образом, среднее арифметическое в каждой группе равно $\frac{61}{10}$, но это значит, что количество чисел в каждой группе не меньше 10, но этого не может быть.

в) Среднее арифметическое всех данных чисел равно $6\frac{1}{10}$. В пункте б) мы выяснили, что при разбиении чисел на три группы такое среднее в группах получить невозможно. Ясно, что возможные средние это рациональные числа со знаменателем меньшим или равным количеству чисел в группе. Максимальное количество чисел в одной группе равно 8, поэтому среднее арифметическое $6\frac{1}{9}$ получить тоже нельзя. Покажем, что среднее $6\frac{1}{8}$ тоже не получится. Действительно, если группа состоит из 8 чисел со средним $6\frac{1}{8}$, то сумма чисел в этой группе равна 49. Тогда сумма двух оставшихся чисел равна 12. Это могут быть пары чисел 3 и 9, 4 и 8, 5 и 7. Все они не подходят, одно из средних будет больше, чем $6\frac{1}{8}$.

Приведем теперь пример для наибольшего из средних равного $6\frac{1}{7}$. Разобьем наши числа на такие три группы: 1) 6; 2) 5, 7; 3) 1, 2, 3, 4, 8, 9, 16. Их средние арифметические будут равны соответственно 6, 6, $6\frac{1}{7}$.

Ответ: а) да; б) нет; в) $6\frac{1}{7}$.