Вариант 2
Ответы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
69	5	17	0,25	1,5	122	6	3	0,3	15	0,5	56

Критерии оценивания выполнения заданий

Задача 13

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задача 14

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Задача 15

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Задача 16

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задача 17

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Задача 18

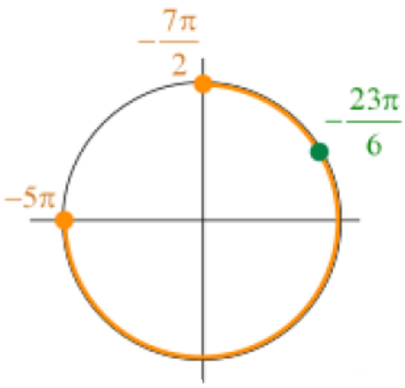
Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в решении допущена вычислительная ошибка или оно недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в ходе решения допущена одна ошибка, отличная от вычислительной	2
Получены некоторые верные значения параметра, однако решение содержит более одной ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Задача 19

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта *а*; – обоснованное решение пункта *б*; – искомая оценка в пункте *в*; – пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Задача 13

Решение.



а) Перейдём к системе:

$$\begin{cases} 5-10\sin^2 x+9\sin x-7=0, \\ 25\cos^2 x-21\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10\sin^2 x-9\sin x+2=0, \\ \cos^2 x\neq \dfrac{21}{25}. \end{cases}$$

Получаем

$$\begin{cases} \sin x=\dfrac{2}{5}, \\ \cos x\neq \pm\dfrac{\sqrt{21}}{5} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sin x=\dfrac{1}{2}, \\ \cos x\neq \pm\dfrac{\sqrt{21}}{5}. \end{cases}$$

При $\sin x=\frac{2}{5}$ не выполнено условие $\cos x\neq \pm\frac{\sqrt{21}}{5}$.

При $\sin x=\frac{1}{2}$ находим

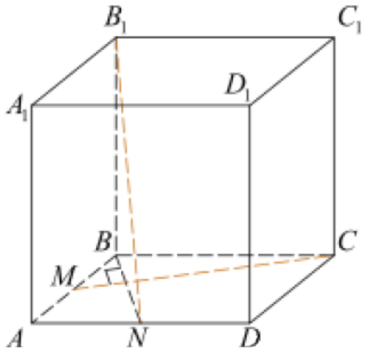
$$\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k, \\ x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k, \end{array}\right. \quad k\in\mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi; -\frac{7\pi}{2}\right]$. Получим $-\frac{23\pi}{6}$.

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{6}+2\pi k; \frac{5\pi}{6}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{23\pi}{6}$.

Задача 14

Решение.



а) Пусть отрезки BN и CM пересекаются в точке P, тогда:

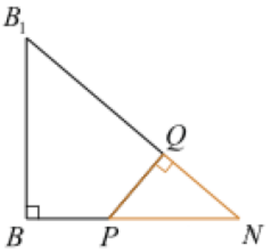
$$\operatorname{tg}\angle MBP = \frac{AN}{AB} = \frac{1}{2}, \qquad \operatorname{tg}\angle BMP = \frac{BC}{BM} = 2,$$

$$\angle MBP + \angle BMP = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg} 2 = \operatorname{arcctg} 2 + \operatorname{arctg} 2 = \frac{\pi}{2},$$

то есть угол BPM — прямой. Отрезок BN — проекция отрезка B_1N на плоскость $ABCD$, значит, по теореме о трех перпендикулярах угол между отрезками B_1N и CM также прямой.

б) Плоскость BB_1N перпендикулярна прямой CM, так как прямая BN перпендикулярна прямой CM и прямая BB_1 перпендикулярна прямой CM. Возьмем на отрезке B_1N точку Q такую, что отрезок PQ перпендикулярен прямой B_1N. Получаем, что отрезок PQ — искомое расстояние.

Пусть $AD = 2x$, $AN = x$, тогда $BN = \sqrt{(2x)^2 + x^2} = x\sqrt{5}$, $B_1N^2 = (2x)^2 + 5x^2 = 9x^2$, $x^2 = \frac{(7\sqrt{2})^2}{9} = \frac{98}{9}$.



Отрезок BP — высота прямоугольного треугольника MBC, следовательно,

$$BP = \frac{BM \cdot BC}{CM} = \frac{BM \cdot BC}{BN} = \frac{x \cdot 2x}{\sqrt{5}x} = x \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{2}{5} \cdot \sqrt{5}x = \frac{2}{5}BN,$$

откуда $PN = \frac{3}{5} \cdot \sqrt{5}x$. Треугольники PQN и BB_1N подобны по двум углам, значит,

$$\frac{PQ}{BB_1} = \frac{PN}{B_1N} \text{ и } PQ = \frac{2x \cdot \frac{3}{5} \cdot x\sqrt{5}}{7\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{5}}{35\sqrt{2}} \cdot x^2 = \frac{6\sqrt{5} \cdot 98}{35\sqrt{2} \cdot 9} = \frac{14\sqrt{10}}{15}.$$

Ответ: б) $\frac{14\sqrt{10}}{15}$.

Задача 15

Решение. Преобразуем неравенство:

$$-|x+8|-|1-x| \leqslant -3x-6 \Leftrightarrow |x+8|+|1-x| \geqslant 3x+6.$$

Последнее неравенство заведомо выполняется, если правая часть отрицательна, то есть при $x<-2$.

Если $x \geqslant -2$, то

$$x+8+|x-1| \geqslant 3x+6 \Leftrightarrow |x-1| \geqslant 2(x-1).$$

Это верно тогда и только тогда, когда $x-1 \leqslant 0$. Решение неравенства: $x \leqslant 1$.

Ответ: $(-\infty;\ 1]$.

Задача 16

Решение. Прибыль фирмы (в млн рублей) за один год выражается как

$$px-(0,5x^2+4x+18)=-0,5x^2+(p-4)x-18.$$

Это выражение является квадратным трёхчленом и достигает своего наибольшего значения при $x=p-4$. Наибольшее значение равно $\frac{(p-4)^2}{2}-18$.

Строительство завода окупится не более чем за 6 лет, если

$$\frac{(p-4)^2}{2}-18\geqslant\frac{192}{6}\Leftrightarrow (p-4)^2\geqslant 100\Leftrightarrow (p-14)(p+6)\geqslant 0,$$

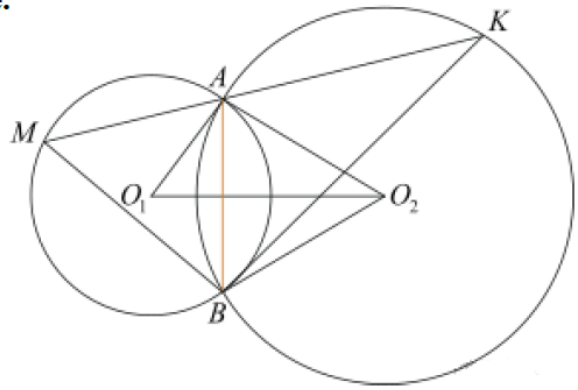
то есть при $p\geqslant 14$, поскольку цена продукции не может быть отрицательной.

Таким образом, $p = 14$ — наименьшее подходящее значение.

Ответ: 14.

Задача 17

Решение.



а) Заметим, что $\angle AO_2B$ центральный, а O_1O_2 — его биссектриса, тогда

$$\angle AKB = \frac{1}{2}\angle AO_2B = \angle AO_2O_1 \text{ — вписанный угол.}$$

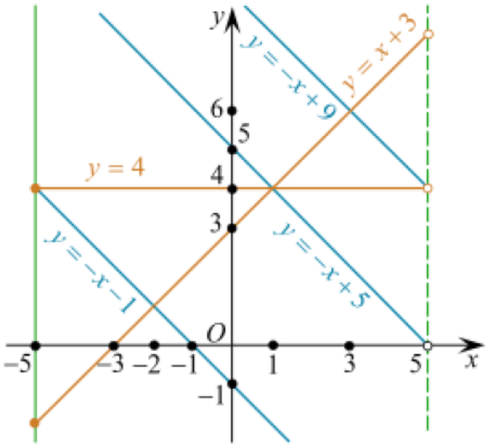
Аналогично $\angle BMK = \angle AO_1O_2$, $\angle BMK = \angle AO_1O_2$ и $\angle MKB = \angle AO_2O_1$, поэтому по двум равным углам $\triangle AO_1O_2$ и $\triangle BMK$ подобны, что и требовалось доказать.

б) Заметим, что $AO_1^2 + AO_2^2 = O_1O_2^2$ верно, поскольку $9 + 16 = 25$, тогда по теореме, обратной теореме Пифагора, $\triangle AO_1O_2$ прямоугольный, $\angle A = 90^\circ$. Найдем высоту $\triangle AO_1O_2$, проведенную из $\angle A$: $h = \dfrac{AO_1 \cdot AO_2}{O_1O_2} = \dfrac{12}{5}$. $\triangle AO_1O_2 \sim \triangle BMK$, поэтому коэффициент подобия равен $\dfrac{MK}{O_1O_2} = \dfrac{7}{5}$. Расстояние от точки B до прямой MK, равное высоте $\triangle BMK$, проведенной из вершины $\angle B$, равно произведению коэффициента подобия и высоты, проведенной из $\angle A = \dfrac{7}{5} \cdot \dfrac{12}{5} = \dfrac{84}{25}$.

Ответ: б) $\dfrac{84}{25}$.

Задача 18

Решение.



Преобразуем первое уравнение:

$$\frac{(y^2-xy-3y-4y+4x+12)\sqrt{x+5}}{\sqrt{5-x}}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(y(y-x-3)-4(y-x-3))\sqrt{x+5}}{\sqrt{5-x}}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(y-4)(y-x-3)\sqrt{x+5}}{\sqrt{5-x}}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=4, \\ y=x+3, \\ \sqrt{x+5}=0, \end{array}\right. \\ 5-x>0, \\ x+5\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=4, \\ y=x+3, \\ x=-5, \end{array}\right. \\ -5\leqslant x<5. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=4, \\ y=x+3, \end{array}\right. \\ -5\leqslant x<5 \end{cases}$$

Графиком полученной системы являются два пересекающихся отрезка прямых с выколотым концом (см. рис.). Значит, исходное уравнение имеет два различных решения в том случае, когда прямые $y=-x+a$ пересекают каждый из этих отрезков единожды. Из графика видно, что этому соответствуют значения параметра $a\in[-1;5)\cup(5;9)$.

Ответ: $[-1;5)\cup(5;9)$.

Задача 19

Решение

а) Поскольку масса каждого пакета в килограммах делится на 3, в каждый рюкзак получится поместить только кратное 3 число килограммов пакетов с вещами. Значит, в рюкзаках можно поместить пакеты общей массой не более $3 \cdot 27 = 81$ кг. Суммарный вес всех пакетов равен 84 кг. Значит, разложить пакеты таким образом не получится.

б) Суммарный вес всех пакетов равен 77 кг, а в рюкзаки суммарно можно поместить 78 кг. Значит, если разложить пакеты требуемым образом по рюкзакам возможно, то в одном рюкзаке окажутся пакеты с суммарным весом 25 кг, а в двух других — с суммарным весом 26 кг. Пакеты с массами 17 и 20 кг окажутся при этом в разных рюкзаках. Однако и пакет массой 20 кг, и пакет массой 17 кг нельзя дополнить другими пакетами так, чтобы получился набор пакетов с общей массой 26 кг. Получили противоречие.

в) Суммарный вес всех пакетов равен 99 кг, а в рюкзаки суммарно можно поместить $4m$ кг. Значит, $m \geqslant 25$.

Если при $m = 25$ разложить пакеты требуемым образом по рюкзакам возможно, то в одном рюкзаке окажутся пакеты с суммарным весом 24 кг, а в трёх других — с суммарным весом 25 кг. Пакеты с массами 17 и 19 кг окажутся при этом в разных рюкзаках. Пакет массой 19 кг нельзя дополнить другими пакетами, чтобы получился набор пакетов с общей массой 25 кг, а чтобы получился такой набор с общей массой 24 кг — возможно, но только единственным образом — с помощью одного пакета массой 5 кг. В последнем случае пакет массой 17 кг нельзя дополнить оставшимися пакетами до набора, общая масса которого 25 кг. Получили противоречие.

Если $m = 26$, то разложить пакеты требуемым образом возможно. Например, можно положить в первый рюкзак пакеты массами 19 и 7 кг, во второй — массами 17 и 9 кг, в третий — массами 15 и 11 кг, в четвёртый — массами 13, 5 и 3 кг.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 26.