Вариант 1
Ответы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
132	60	60	0,72	0,28	-1	3	0	60	1	5	56

Критерии оценивания выполнения заданий

Задача 13

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задача 14

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Задача 15

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Задача 16

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задача 17

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Задача 18

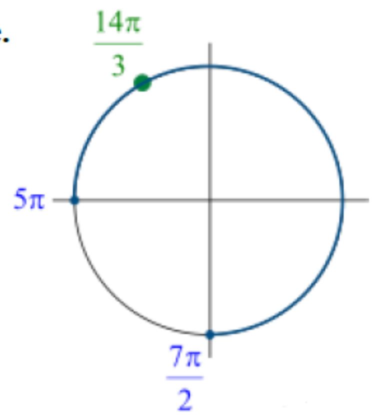
Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в решении допущена вычислительная ошибка или оно недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в ходе решения допущена одна ошибка, отличная от вычислительной	2
Получены некоторые верные значения параметра, однако решение содержит более одной ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Задача 19

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта *а*; – обоснованное решение пункта *б*; – искомая оценка в пункте *в*; – пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Задача 13

Решение.



а) Последовательно получаем:

$$\sqrt{2\cos^2 x-4\cos x+3}=\sqrt{\cos x+6} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x+6\geqslant 0,\\ 2\cos^2 x-4\cos x+3=\cos x+6\end{cases} \Leftrightarrow$$

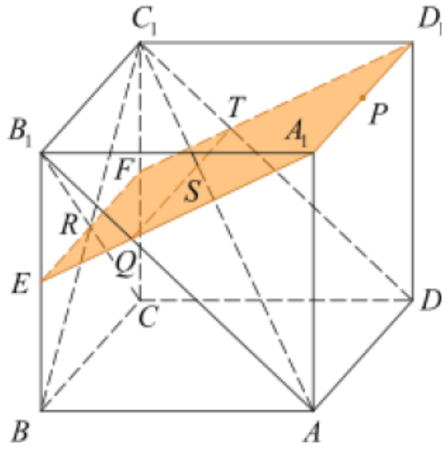
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos x\geqslant -6,\\ 2\cos^2 x-5\cos x-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \quad 2\cos^2 x-5\cos x-3=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=3,\\ \cos x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \quad \cos x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\\ x=-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\end{array}\right. \quad k\in\mathbb{Z}.$$

б) Выясним, какие из найденных корней принадлежат отрезку $\left[\dfrac{7\pi}{2};5\pi\right]$, при помощи тригонометрической окружности. Подходит число $\dfrac{14\pi}{3}$.

Ответ: а) $\left\{\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k;-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k:k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\dfrac{14\pi}{3}$.

Задача 14



Решение. а) Рассмотрим прямую A_1E, где E — середина BB_1. Тогда $PA_1 = RE$ и отрезки PA_1 и RE параллельны, следовательно, четырехугольник $PREA_1$ — параллелограмм. Поскольку прямые A_1E и PR параллельны, прямая A_1E лежит в плоскости сечения и проходит через точку Q (треугольники AQA_1 и EQB_1 подобны с коэффициентом $k = 2$). Кроме того сечение содержит ребро A_1D_1 и параллельный ему отрезок EF, где точка F — середина CC_1, и прямые FD_1 и A_1E параллельны. По теореме о трех перпендикулярах отрезок A_1E перпендикулярен стороне A_1D_1, следовательно, сечение A_1EFD_1 является прямоугольником, в котором

$$A_1E = \sqrt{A_1B_1^2 + B_1E^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Тогда

$$S_{A_1EFD_1} = A_1E \cdot A_1D_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

б) Из точки Q проведем прямую QT, параллельную стороне AD, где точка T лежит в грани CDD_1C_1. Прямая QT лежит и в сечении, и в плоскости ADC_1B_1, то есть является линией их пересечения, а значит, точка T лежит на DC_1.

Пусть S — точка пересечения AC_1 и QT, следовательно, S — точка пересечения AC_1 с плоскостью сечения. По теореме Фалеса

$$\frac{AS}{SC_1} = \frac{AQ}{QB_1} = 2$$

Ответ: б) $2:1$.

Задача 15

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{x+1} \leqslant x \Leftrightarrow \frac{\sqrt{1-x^3}-x^2-x-1}{x+1} \leqslant 0$$

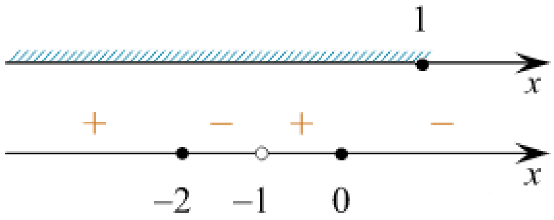
Заметим, что выражение x^2+x+1 принимает только положительные значения. Найдем корни числителя при условии $x \leqslant 1$:

$$\sqrt{1-x^3} = x^2+x+1 = 0 \Leftrightarrow 1-x^3 = (x^2+x+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-x)(x^2+x+1) = (x^2+x+1)^2 \Leftrightarrow 1-x = x^2+x+1 \Leftrightarrow x^2+2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=-2. \end{array}\right.$$

Решим неравенство методом интервалов (см. рис.), получим:

$$-2 \leqslant x < -1 \text{ или } 0 \leqslant x \leqslant 1.$$



Ответ: $[-2, -1) \cup [0, 1]$.

Задача 16

Решение. Предположим, что Саша и Паша первоначально положили в банк S руб.

Динамика прироста вклада Саши. К концу 4 года хранения денежных средств на счету Саши оказалось $1{,}1^4 S = 1{,}4641S$ руб.

Динамика прироста вклада Паши.

К концу второго года на счету Паши оказалось $1{,}15^2 S = 1{,}3225S$ руб. А к концу же

четвертого года — $1{,}3225\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^2 S$ руб.

Разность образованных сумм обоих вкладов составила

$$1{,}3225\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 S-1{,}4641S \text{ руб.,}$$

что меньше числа $0{,}1S$.

Решим неравенство:

$$1{,}3225\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 S-1{,}4641S<0{,}1S \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 13225\left(1+\frac{p}{100}\right)^2-14641<1000 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 13225\left(1+\frac{p}{100}\right)^2<15641 \Leftrightarrow \left(1+\frac{p}{100}\right)^2<\frac{15641}{13225}.$$

$$1+\frac{p}{100}<\frac{125{,}06\ldots}{115}=\frac{25{,}01\ldots}{23}=1{,}087\ldots \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{p}{100}<1{,}087\ldots-1=0{,}087\ldots \Leftrightarrow p<8{,}7\ldots$$

Поскольку условием задачи требуется найти наибольшее возможное целое значение процентной ставки, таким значением будет число 8.

Ответ: 8%.

Задача 17

Решение.

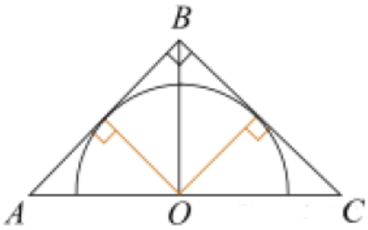
а) Пусть центр окружности — точка O. Запишем площадь ABC двумя способами:

$$\frac{1}{2}AB\cdot R+\frac{1}{2}BC\cdot R=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot\sin B,$$

откуда

$$\sin B=\frac{R(AB+BC)}{AB\cdot BC}=\frac{\frac{120}{17}\cdot 34}{10\cdot 24}=1.$$

Значит, угол B равен $90°$. Что и требовалось доказать.



б) Пусть BH — искомая высота, тогда

$$\frac{1}{2}BH\cdot AC=\frac{1}{2}AB\cdot BC,$$

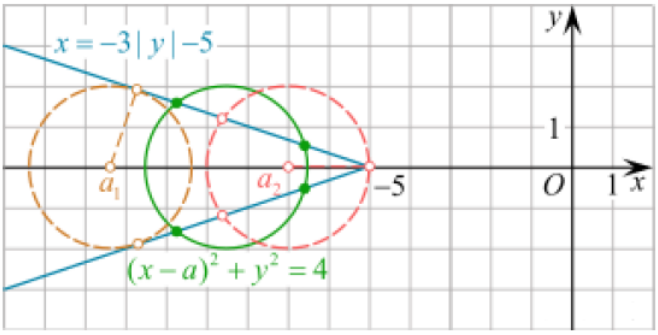
откуда

$$BH=\frac{AB\cdot BC}{AC}=\frac{10\cdot 24}{\sqrt{10^2+24^2}}=\frac{10\cdot 24}{26}=\frac{120}{13}.$$

Ответ: б) $\frac{120}{}$.

Задача 18

Решение. Решим систему графически. В системе координат xOy графиком первого уравнения является ломаная — совокупность двух лучей, выходящих из точки $(-5;\ 0)$ с угловым коэффициентом $k = \pm\frac{1}{3}$ (см. рис., выделено синим). Графиком второго уравнения является семейство окружностей с центром в точке $(a;\ 0)$ и радиусом 2. В зависимости от значения параметра a окружность и ломаная могут не иметь общих точек или иметь одну, две (на рисунке выделено оранжевым) , три (выделено красным) или четыре общие точки (на рисунке выделено зелёным).



Система имеет четыре решения при $a_1 < a < a_2$, где a_1 — абсцисса центра окружности, касающейся ломаной; a_2 — абсцисса центра окружности, проходящей через точку $(-5;\ 0)$ и имеющей с ломаной три общих точки. Очевидно, что $a_2 = -7$. Найдём a_1, используя формулу расстояния от точки до прямой. Расстояние от точки $(a_1;\ 0)$ до прямой $x+3y+5=0$ должно равняться радиусу окружности:

$$\frac{|a_1+3\cdot 0+5|}{\sqrt{1^2+3^2}} = 2 \Leftrightarrow |a_1+5| = 2\sqrt{10} \Leftrightarrow a_1 = -5\pm 2\sqrt{10}.$$

По смыслу задачи, $a_1 < -5$, поэтому $a_1 = -5-2\sqrt{10}$.

Тем самым система имеет четыре решения при $-5-2\sqrt{10} < a < -7$.

Ответ: $\left(-5-2\sqrt{10};\ -7\right)$

Задача 19

Решение. а) Сумма натуральных чисел, записанных в первый день, равна 8. Следовательно, чисел, записанных в первый день, не более 8. Тогда в день n (n>7) записанных чисел не более 1. И это число заведомо больше 8 (поскольку сумма чисел с каждым днем увеличивается). Противоречие с условием (все записанные числа должны быть меньше 6).

б) Рассмотрим допустимую условиями конфигурацию (без учета среднего значения за все дни):

1 день: 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 3

2 день: 5 5 5 5 5 5 5 5 3 1

3 день: 5 5 5 5 5 5 5 5 5

Действительно, среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, очевидно, меньше 4. В каждый последующий день чисел записано меньше, чем в предыдущий. А также сумма чисел, записанных в каждый последующий день, больше, чем в предыдущий. Очевидно, что если продолжать приписывать столбец (4 5 5) слева, то эти условия не нарушатся. Можно получить, скажем, такой пример:

1 день: 100 четверок и 1 тройка

2 день: 98 пятерок, 1 тройка и 1 единица

3 день: 99 пятерок

Среднее арифметическое всех этих чисел, очевидно, больше 4,5.

в) Предположим, что в последний (четвертый) день записано одно число. Тогда в первый день записано не менее четырех чисел. Следовательно, в первый день сумма чисел не меньше 4. А в четвертый, соответственно, сумма чисел не меньше 7. Но в четвертый день записано ровно одно число. Противоречие с тем, что максимальное возможное число меньше 6.

Мы показали, что в четвертый день записано как минимум два числа. Тогда в третий день записано как минимум три числа, во второй день как минимум четыре числа, в первый день как минимум пять чисел. Всего на доске как минимум четырнадцать чисел. Такое, действительно, может быть:

1 день: 1 1 1 1 1

2 день: 3 1 1 1

3 день: 5 1 1

4 день: 5 5

Ответ: а) нет; б) да; в) 14.