Вариант 3
Ответы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
36	11	6	0,5	0,13	-5	2	10	45	10	5	-13

Критерии оценивания выполнения заданий

Задача 13

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задача 14

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Задача 15

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Задача 16

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задача 17

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Задача 18

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в решении допущена вычислительная ошибка или оно недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в ходе решения допущена одна ошибка, отличная от вычислительной	2
Получены некоторые верные значения параметра, однако решение содержит более одной ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Задача 19

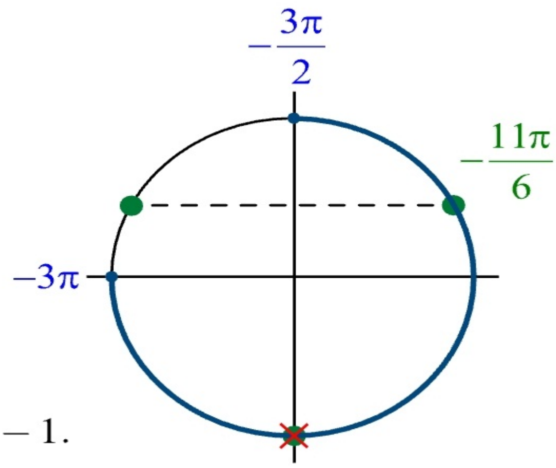
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта *а*; – обоснованное решение пункта *б*; – искомая оценка в пункте *в*; – пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решения заданий 13-19

Задача 13

Решение.

а) Левая часть уравнения определена, если $\cos x \neq 0$ и $\sin x \neq 0$. При этом



$\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} - 1.$

Поэтому уравнение можно переписать в виде $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sin x} - 2 = 0.$

Решив последнее уравнение как квадратное относительно $\frac{1}{\sin x}$, получим $\frac{1}{\sin x} = 2$ или $\frac{1}{\sin x} = -1$. Значит, либо $\sin x = \frac{1}{2}$, откуда

$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z};$

либо $\sin x = -1$, что невозможно в силу условия $\cos x \neq 0$.

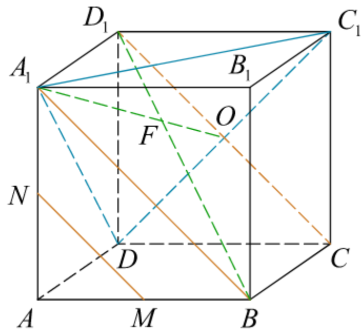
б) Отберем с помощью единичной окружности отберём корни, принадлежащие промежутку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$: $x = -\frac{11\pi}{6}$.

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k :\ k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{11\pi}{6}$.

Задача 14

Решение.

а) Плоскость DA_1C_1 пересекает плоскость BCD_1 по прямой A_1O, значит, точка F — это точка пересечения отрезков BD_1 и A_1O. Прямые BA_1 и CD_1 параллельны, значит, треугольники D_1FO и BFA_1 подобны с коэффициентом подобия



$$\frac{A_1F}{FO} = \frac{BF}{FD_1} = \frac{BA_1}{D_1O} = 2.$$

Получаем, что

$$BF : FD_1 = A_1F : FO = 2 : 1.$$

б) Прямая CD_1 является проекцией прямой BD_1 на плоскость CDD_1, а прямые CD_1 и DC_1 перпендикулярны, значит, по теореме о трёх перпендикулярах прямая BD_1 перпендикулярна прямой DC_1. Аналогично получаем, что прямая BD_1 перпендикулярна прямой A_1C_1. Значит, прямая BD_1 перпендикулярна плоскости DA_1C_1.

Отрезок MN — средняя линия треугольника ABA_1, значит, он параллелен отрезку BA_1. Угол между прямой MN и плоскостью DA_1C_1 равен углу между прямой BA_1 и плоскостью DA_1C_1. Точка F — проекция точки B на плоскость DA_1C_1, следовательно, искомый угол равен углу BA_1F. В прямоугольном треугольнике BA_1D_1 тангенс угла A_1BD_1 равен

$$\frac{A_1D_1}{BA_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

В прямоугольном треугольнике BA_1F угол BA_1F равен

$$90^\circ - \angle A_1BF = 90^\circ - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}} = \operatorname{arctg}\sqrt{2}.$$

Ответ: б) $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$.

Задача 15

Решение.

Запишем исходное неравенство в виде

$$\frac{x^3-13x^2+50x-56}{(x+2)(x+4)(x+7)} - 1 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3-13x^2+50x-56-(x^3+13x^2+50x+56)}{(x+2)(x+4)(x+7)} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-26x^2-112}{(x+2)(x+4)(x+7)} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{13x^2+56}{(x+2)(x+4)(x+7)} < 0,$$

следовательно, $x < -7$ или $-4 < x < -2$.

Ответ: $(-\infty; -7); (-4; -2)$.

Задача 16

Решение.

Если владелец продаст бумагу в течение k-го года, то через тридцать лет после покупки сумма на его счёте будет равна $(2k+5)\cdot 1,1^{30-k}$. Таким образом, нам нужно найти номер максимального члена последовательности $a_k = (2k+5)\cdot(1,1)^{30-k}$, где k пробегает целые значения от 1 до 30. Рассмотрим приращение

$$\begin{gathered} b_k = a_k - a_{k-1} = \\ = (1,1)^{30-k}(2k+5-1,1\cdot(2(k-1)+5)) = \\ = (1,1)^{30-k}(1,7-0,2k). \end{gathered}$$

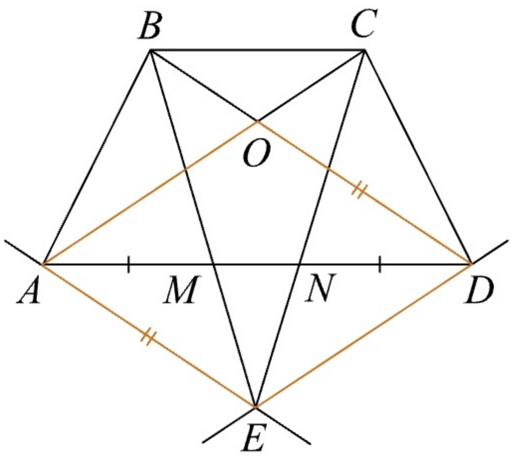
Отсюда $b_k > 0$ при $k \leqslant 8$ и $b_k < 0$ при $k > 8$. Следовательно, наибольшее значение последовательность a_k принимает при $k = 8$. Продать бумагу следует в течение восьмого года.

Ответ: в течение восьмого года.

Задача 17

Решение.

а) По построению четырехугольник $AODE$ — параллелограмм. Значит, $OD = AE$. Треугольники BOC и DOA подобны, значит,



$$BO : OD = BC : AD = 1 : 2.$$

Тогда

$$BO : AE = BO : OD = 1 : 2.$$

б) Прямые AE и BD параллельны, а потому треугольник AME подобен треугольнику DMB. Тогда

$$AM : MD = AE : BD = \\ = AE : (BO + AE) = \\ = 1 : \left(\frac{BO}{AE} + 1\right) = 2 : 3.$$

Следовательно, $AM = \frac{2}{5}AD = 8$. Аналогично $ND = 8$. Значит, $MN = 20 - 8 - 8 = 4$.

Ответ: 4.

Задача 18

Решение.

Преобразуем второе уравнение системы:

$$x^2+xy-2x-2y=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x(x+y)-2(x+y)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+y)(x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-y, \\ x=2. \end{array}\right.$$

Подставим найденные решения в первое уравнение системы.

Если $x = 2$, то

$$|2\cdot 2|+|y|=2a \Leftrightarrow 4+|y|=2a \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |y|=2(a-2) \Leftrightarrow \begin{cases} y=\pm 2(a-2), \\ a\geqslant 2. \end{cases}$$

При $a\geqslant 2$ решениями системы являются пары чисел: $(2, 2a-4)$ и $(2, 4-2a)$, которые совпадают при $a = 2$.

Если $x = -y$, то

$$|-2y|+|y|=2a \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3|y|=2a \Leftrightarrow \begin{cases} y=\pm\dfrac{2a}{3}, \\ a\geqslant 0. \end{cases}$$

При $a\geqslant 0$ решениями системы являются пары чисел: $\left(-\dfrac{2a}{3}, \dfrac{2a}{3}\right)$ и $\left(\dfrac{2a}{3}, -\dfrac{2a}{3}\right)$, которые совпадают при $a = 0$.

Таким образом, система имеет не более четырёх решений. Чтобы решений было ровно четыре, необходимо, чтобы решением системы не являлась пара чисел $(2, -2)$, то есть должно выполняться условие $a\neq 3$. Значит, исходная система имеет ровно 4 различных решения при $2<a<3$ или $a>3$.

Ответ: $(2; 3)\cup(3; +\infty)$.

Задача 19

Решение.

а) Да, например: 2 + 4 + ... + 42 + 44 + 56 + 3 + 13 + 23 + 33 + 43 + 53 + 63 = 793.

б) Пусть на доске написано одно число, оканчивающееся на 3. Тогда на доске написано 29 чётных чисел. Их сумма не меньше, чем: $2+4+\ldots+56+58=\frac{60\cdot 29}{2}=870$. Это противоречит тому, что сумма равна 793.

в) Заметим, что число 793 не кратно 2, сумма чётных чисел кратна двум, тогда сумма чисел, оканчивающихся на 3, должна быть не кратна двум, то есть слагаемых, оканчивающихся на 3, должно быть нечётное количество. В пункте б) показано, что на доске не может быть написано только одно число оканчивающееся на 3. Пусть на доске написано три таких числа, их минимальная сумма:
$2+4+\ldots+54+3+13+23=$
$=\frac{2+54}{2}\cdot 27+39=795$ — больше чем 793. Тогда наименьшее количество чисел, оканчивающееся на 3 — пять.

Приведём пример, когда на доске написано 5 чисел, оканчивающихся на три:

$$2+4+\ldots+46+48+78+3+13+23+33+43=$$
$$=\frac{2+48}{2}\cdot 24+78+115=793.$$

Ответ: а) да; б) нет; в) 5.