Вариант 2
Ответы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
54	18	8	0,04	0,39	32	14,4	-1,5	10	16	1,5	2

Критерии оценивания выполнения заданий

Задача 13

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задача 14

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Задача 15

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Задача 16

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задача 17

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Задача 18

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в решении допущена вычислительная ошибка или оно недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в ходе решения допущена одна ошибка, отличная от вычислительной	2
Получены некоторые верные значения параметра, однако решение содержит более одной ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

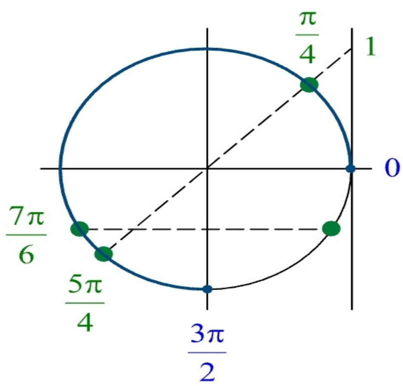
Задача 19

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта *а*; – обоснованное решение пункта *б*; – искомая оценка в пункте *в*; – пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решения заданий 13-19
Задача 13

Решение.

а) Перенесём все члены в левую часть, преобразуем и разложим левую часть на множители:



$$2\sin^2 x-\sin 2x+\sin x-\cos x=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x-2\sin x\cos x+\sin x-\cos x=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\sin x-\cos x)(2\sin x+1)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=\cos x,\\ \sin x=-\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x=1,\\ \sin x=-\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\\ x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\\ x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

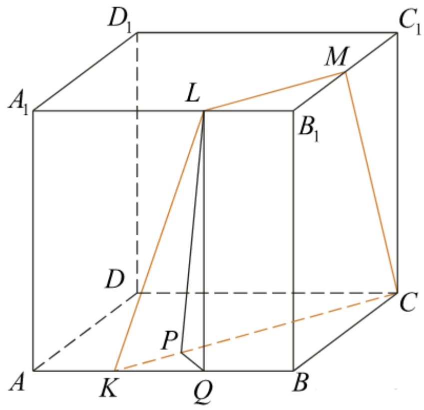
б) Отрезку $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$ принадлежат корни $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$ и $\frac{7\pi}{6}$.

Ответ: а) $\left\{-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ \frac{\pi}{4}+\pi k,\ -\frac{5\pi}{6}+2\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;

б) $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$ и $\frac{7\pi}{6}$.

Задача 14

Решение.



а) Заметим, что так как по условию прямые LM, KC и BC, B_1C_1 параллельны, то углы LMB_1 и KCB — равны. Таким образом, прямоугольные треугольники LMB_1 и KCB — подобны. При этом,

$$\frac{B_1M}{BC}=\frac{LM}{KC}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow B_1M=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}B_1C_1,$$

следовательно, точка M — середина ребра B_1C_1.

б) Пусть прямая LP — высота трапеции $KLMC$, точка Q — проекция точки L. Тогда, по теореме о трех перпендикулярах, отрезок PQ перпендикулярен отрезку KC. Имеем:

$$LP=\frac{2S_{KLMC}}{LM+KC}=2, \qquad KP=\frac{1}{2}(KC-LM)=1.$$

Проекции равных отрезков на параллельные плоскости равны, следовательно, $KQ=MC_1$. Заметим, что

$$QB=LB_1=\frac{1}{2}BK, \qquad \begin{aligned} BC&=2MC_1=2KQ=2(BK-QB)=\\ &=2(BK-LB_1)=2\left(BK-\frac{1}{2}BK\right)=BK.\end{aligned}$$

Таким образом, треугольник KBC — равнобедренный. Прямоугольные треугольники KBC и KPQ — подобны по общему углу, следовательно, треугольник KPQ — равнобедренный, $PQ=KP=1$. Заметим, что угол LPQ является линейным углом угла между плоскостями KLM и ABC, $\cos\angle LPQ=\dfrac{PQ}{LP}=\dfrac{1}{2}$, следовательно, $\angle LPQ=60^\circ$.

Ответ: б) 60°.

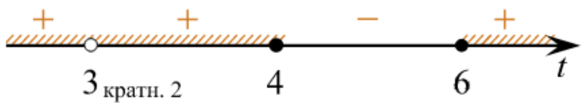
Задача 15

Решение.

Пусть $|x| = t$, тогда

$$\frac{3}{t^2-6t+9} - \frac{4}{t-3} + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{3-4(t-3)+(t-3)^2}{(t-3)^2} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{t^2-10t+24}{(t-3)^2} \geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < 3, \\ 3 < t \leqslant 4, \\ t \geqslant 6. \end{array}\right.$$



Вернёмся к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l} |x| < 3, \\ 3 < |x| \leqslant 4, \\ |x| \geqslant 6. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3 < x < 3, \\ -4 \leqslant x < -3, \\ 3 < x \leqslant 4, \\ x \leqslant -6, \\ x \geqslant 6. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty; -6] \cup [-4; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; 4] \cup [6; +\infty)$.

Задача 16

Решение.

Пусть S_0 — сумма денег у Максима в какой-то момент времени, тогда при вложении денег на банковский депозит S_0 будет увеличиваться: $S_2 = 1,12S_0$. Необходимо понять, в какой момент времени стоит продать ценную бумагу и положить деньги на банковский счет, для этого решим неравенство:

$$S_2 > S_1 \Leftrightarrow 1,12S_0 > 1,1S_0 + 2000 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0,02S_0 > 2000 \Leftrightarrow S_0 > 100000.$$

Найдем сумму денег через 4 года:

$x_1 = 1,1 \cdot 80\,000 + 2000 =$
$= 90000 < 100\,000:$ нужно снова вложиться в ценную бумагу;
$x_2 = 1,1 \cdot 90\,000 + 2000 = 101\,000:$ откладываем деньги в банк;
$x_3 = 1,12 \cdot 101\,000 = 113\,120:$ повторяем последнее действие.
$x_4 = 1,12 \cdot 113\,120 = 126\,694,4.$

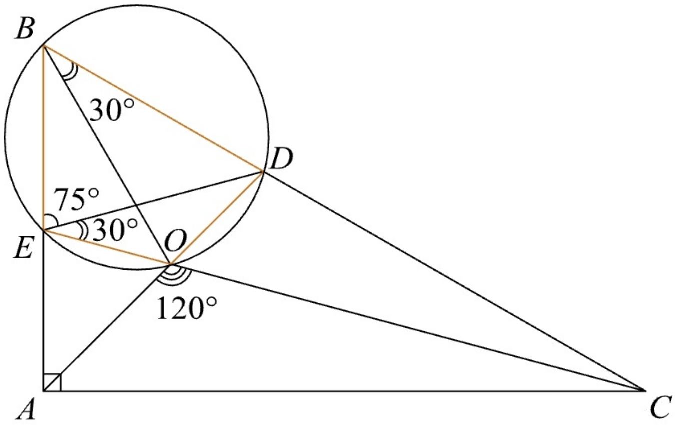
Ответ: 126 694,4 рублей.

Задача 17

Решение.

а) В треугольнике AOC
$\angle OAC + \angle OCA = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$, но величины $\angle OAC$ и $\angle OCA$ составляют половины величин $\angle BAC$ и $\angle BCA$, а значит,
$\angle BAC + \angle BCA = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$. Тогда
$\angle ABC = 180^\circ - (\angle BAC + \angle BCA) = 60^\circ$.

Вертикальные углы $\angle EOD$ и $\angle AOC$ равны, и, значит, сумма противоположных углов четырехугольника $BDOE$ равна 180°. Следовательно, около него можно описать окружность.



б) В треугольнике ABC биссектрисы пересекаются в точке O, значит, BO — биссектриса угла $\angle ABC$, а значит, $\angle DBO = \frac{1}{2}\angle ABC = 30^\circ$. Углы $\angle DBO$ и $\angle DEO$ равны, поскольку опираются на одну и ту же дугу окружности, описанной около четырехугольника $BDOE$. Имеем:

1) $\angle AEO = 180^\circ - (\angle BED + \angle DEO) =$
$= 180^\circ - (75^\circ + 30^\circ) = 75^\circ$;

2) $\angle EAO = \angle AOC - \angle AEO =$
$= 120^\circ - 75^\circ = 45^\circ$, по теореме о внешнем угле треугольника;

3) $\angle BAC = 2 \cdot \angle EAO = 90^\circ$. Таким образом, треугольник ABC прямоугольный и его площадь равна $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC =$

$$= \frac{1}{2} BC \cos 60^\circ \cdot BC \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}.$$

Ответ: $2\sqrt{3}$.

Задача 18

Решение.

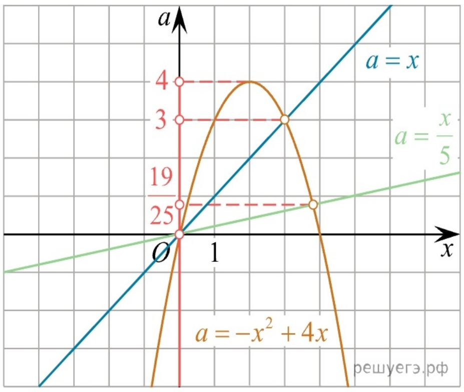
Заметим, что

$$\frac{x^2-4x+a}{x^2-6ax+5a^2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+a=0, \\ x^2-6ax+5a^2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-x^2+4x, \\ (x-5a)(x-a)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-x^2+4x, \\ a\neq x, \\ a\neq \dfrac{x}{5}. \end{cases}$$



Изобразим решение в системе координат xOa. Графиком системы, а значит, и графиком исходного уравнения является парабола с выколотыми точками.

Ординаты точек пересечения параболы $a=-x^2+4x$ и прямой $a=x$ найдём из уравнения $a=-a^2+4a$. Получаем $a=0$ или $a=3$.

Ординаты точек пересечения параболы $a=-x^2+4x$ и прямой $a=\frac{x}{5}$ найдём из уравнения $a=-25a^2+20a$. Получаем $a=0$ или $a=\frac{19}{25}$.

Ровно два решения исходное уравнение имеет при $a<0,\ 0<a<\frac{19}{25},\ \frac{19}{25}<a<3,\ 3<a<4.$

Ответ: $(-\infty;0)\cup\left(0;\frac{19}{25}\right)\cup\left(\frac{19}{25};3\right)\cup(3;4).$

Задача 19

Решение.

а) Заметим, что $S \leqslant 9+9+9=27$, поэтому $A \cdot S \leqslant 999 \cdot 27 < 28\,000$.

б) Методом перебора можно убедиться, что число 2971 не кратно никакому простому числу до 27 включительно, а значит, и вообще никакому числу до 27, кроме 1. Тогда $S = 1$, что тоже невозможно.

в) Заметим, что $428 \cdot 14 = 5992$. Докажем, что получить большее произведение нельзя. В самом деле, числа A и S дают одинаковые остатки от деления на 3. Если это остаток 0, то и $A \cdot S$ даст остаток 0 (и даже будет кратно 9). А если остаток 1 или 2, то $A \cdot S$ даст остаток 1. Значит, числа 5993 и 5996 не годятся: они дают остаток 2 при делении на 3. Число $5995 = 5 \cdot 11 \cdot 109$ имеет трехзначные делители только 109 и 545 (они не подходят). Наконец, число $5994 = 2 \cdot 3^4 \cdot 37$. Значит, A кратно 37 (ведь $S \leqslant 9+9+9 < 37$). Кроме того, $A \geqslant \dfrac{5994}{27} = 222$. Число 5994 имеет четыре делителя, подходящие под эти условия: 222, 333, 666, 999. Все они не годятся.

Ответ: а) нет, б) нет, в) 5992.