Вариант 1
Ответы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	-8	112	0,2	5	5	54	23	0,76	18000	-21	3

Критерии оценивания выполнения заданий

Задача 13

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задача 14

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Задача 15

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Задача 16

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задача 17

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Задача 18

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в решении допущена вычислительная ошибка или оно недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в ходе решения допущена одна ошибка, отличная от вычислительной	2
Получены некоторые верные значения параметра, однако решение содержит более одной ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Задача 19

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта *а*; – обоснованное решение пункта *б*; – искомая оценка в пункте *в*; – пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решения заданий 13-19

Задача 13

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$\cos 4x+\frac{\cos x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos 4x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{\cos x}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos 4x=-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x=\pi\pm\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+2\pi k \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x=\dfrac{4\pi}{3}+2\pi k, \\ 5x=\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k \end{array}\right. \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{4\pi}{9}+\dfrac{2\pi k}{3}, \\ x=\dfrac{2\pi}{15}+\dfrac{2\pi k}{5}, \end{array}\right. k\in\mathbb{Z}.$$

б) Отберем корни при помощи двойных неравенств:

$$0\leqslant\frac{4\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}\leqslant\pi \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0\leqslant 4+6k\leqslant 9 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}\leqslant k\leqslant\frac{5}{6},$$

откуда $k=0$, следовательно, $x=\frac{4\pi}{9}$. Далее,

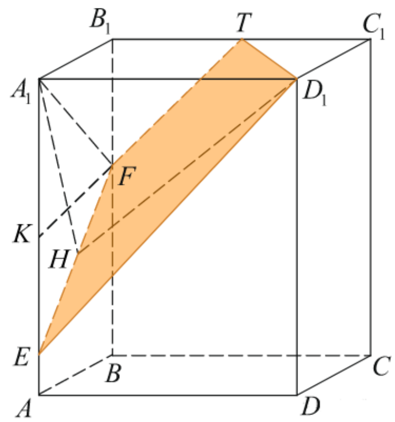
$$0\leqslant\frac{2\pi}{15}+\frac{2\pi k}{5}\leqslant\pi \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0\leqslant 2+6k\leqslant 15 \Leftrightarrow -\frac{2}{6}\leqslant k\leqslant\frac{5}{2},$$

откуда $k=0$, $k=1$ или $k=2$. Найденным значениям параметра соответствуют корни $\frac{2\pi}{15}$, $\frac{8\pi}{15}$ и $\frac{14\pi}{15}$.

Ответ: а) $\left\{\frac{4\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3};\ \frac{2\pi}{15}+\frac{2\pi k}{5}\ :\ k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{4\pi}{9}$; $\frac{2\pi}{15}$, $\frac{8\pi}{15}$, $\frac{14\pi}{15}$.

Задача 14

а) Так как $A_1E:EA=3:1$ и $AA_1=16$, получаем, что $A_1E=12$ и $EA=4$. Так как $B_1F:FB=3:5$ и $BB_1=16$, получаем, что $B_1F=6$ и $FB=10$. Плоскость сечения пересекает параллельные плоскости DAA_1 и CBB_1 по параллельным прямым, поэтому она пересекает ребро B_1C_1 в такой точке T, что прямая FT параллельна прямой ED_1. Значит, треугольники EA_1D_1 и FB_1T подобны, а поскольку $EA_1=A_1D_1=12$, получаем, что и $FB_1=B_1T=6$. Значит, $TC_1=6$ и $B_1T:TC_1=1:1$.



б) Опустим перпендикуляр A_1H из точки A_1 на прямую EF пересечения плоскостей EFD_1 и AA_1B_1. Угол A_1HD_1 будет искомым. Найдем A_1H. Для этого проведем в трапеции EA_1B_1F высоту $FK=5\sqrt{2}$ (из результатов пункта а) следует, что K — середина EA_1). Теперь, вычисляя двумя способами площадь треугольника EFA_1, получим $A_1H\cdot EF=A_1E\cdot FK$, то есть

$$A_1H=\frac{FK\cdot A_1E}{EF}=\frac{5\sqrt{2}\cdot 12}{\sqrt{6^2+(5\sqrt{2})^2}}=\frac{60}{\sqrt{43}}.$$

Тогда тангенс искомого угла равен

$$A_1D_1:A_1H=12:\frac{60}{\sqrt{43}}=\frac{\sqrt{43}}{5}.$$

Ответ: б) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{43}}{5}$.

Задача 15

Решение.

Преобразуем левую часть неравенства:

$$\frac{x^3-27-x(x-3)^2}{|x-3|}\geqslant 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x-3)(x^2+3x+9-x^2+3x)}{|x-3|}\geqslant 0\Leftrightarrow\frac{3(x-3)(2x+3)}{|x-3|}\geqslant 0.$$

Отсюда получаем, что $x\leqslant -1,5$ или $x>3$.

Ответ: $(-\infty;\ -1,5]\cup(3;\ +\infty)$.

Задача 16

Решение.

Пусть $S = 185\,640$ руб. — сумма кредита, x руб. — ежегодный платеж, $k=1+\frac{10}{100}=1,1$. Тогда схема выплаты кредита выглядит так:

$$(((S\cdot k-x)\cdot k-x)\cdot k-x)\cdot k-x=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow Sk^4-k^3x-k^2x-kx-x=0.$$

Тогда

$$x=\frac{Sk^4}{k^3+k^2+k+1}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{185\,640\cdot(1,1)^4}{(1,1)^3+(1,1)^2+1,1+1}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=58\,564.$$

Таким образом, общая сумма выплат банку будет равна

$$4\cdot 58\,564=234\,256.$$

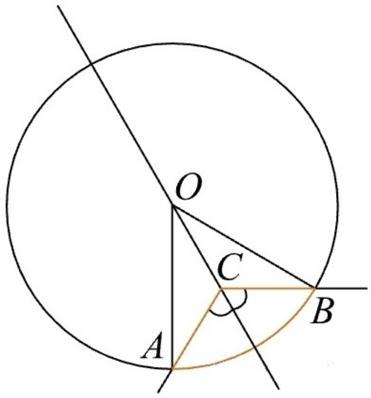
Ответ: $234\,256$.

Задача 17

Решение.

а) Заметим, что

$$\angle ACO = \angle BCO = \\ = \frac{(360^\circ - 120^\circ)}{2} = \\ = 120^\circ.$$



Пусть $AC = x$. По теореме косинусов для треугольника ACO получим, что $9 = x^2 + 3 + x\sqrt{3}$. Положительный корень этого уравнения равен $\sqrt{3}$. Поэтому $AC = CO = \sqrt{3}$. Аналогично $CB = CO$. Что и требовалось доказать.

б) Заметим, что треугольники ACO и BCO равнобедренные, поэтому $\angle AOB = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$. Радиус окружности равен 3, поэтому площадь сектора AOB равна

$$S_{\text{сект}} = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 3^2 = \frac{3\pi}{2}.$$

Найдем площади треугольников ACO и BCO:

$$S_{ACO} = S_{BCO} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Тогда площадь криволинейной фигуры ABC равна

$$\frac{3\pi}{2} - 2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{3(\pi - \sqrt{3})}{2}.$$

Ответ: б) $\frac{3(\pi - \sqrt{3})}{2}$.

Задача 18

Решение.

Равенство $\left(x^2+\sqrt{x+2a}\right)^2=\left(1-2x+\sqrt{x+2a}\right)^2$ имеет место тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из равенств
$x^2+\sqrt{x+2a}=1-2x+\sqrt{x+2a}$ или
$x^2+\sqrt{x+2a}=-1+2x-\sqrt{x+2a}$

Уравнение $x^2+\sqrt{x+2a}=-1+2x-\sqrt{x+2a}$ равносильно уравнению $(x-1)^2+2\sqrt{x+2a}=0$. Оно имеет единственное решение x=1 на отрезке [−1;1] при $a=-\frac{1}{2}$ и не имеет решений на этом отрезке при других значениях параметра a.

Уравнение $x^2+\sqrt{x+2a}=1-2x+\sqrt{x+2a}$ равносильно системе $\begin{cases} x^2+2x-1=0, \\ x+2a\geqslant 0 \end{cases}$ Эта система имеет единственное решение $x=\sqrt{2}-1$ на отрезке [−1;1] при $a\geqslant\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ и не имеет решение на этом промежутке при других значениях параметра a.

Поскольку $\frac{1-\sqrt{2}}{2}>-\frac{1}{2}$ уравнение $\left(x^2+\sqrt{x+2a}\right)^2=\left(1-2x+\sqrt{x+2a}\right)^2$ имеет единственное решение на отрезке [−1;1] при $a=-\frac{1}{2}$ и $a\geqslant\frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $a=-\frac{1}{2}$; $a\geqslant\frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

Задача 19

Решение.

а) Применяя алгоритм

$$(a,b,c)\mapsto(a-1,\ b-1,\ c+2)\mapsto(a-2,\ b-2,\ c+4)\mapsto(a,\ b-3,\ c+3)$$

пять раз, мы переложим 15 камней из второй коробки в третью, что и требуется.

б) Если в одной коробке окажется 201 камень, то остальные будут пусты. Однако нетрудно видеть, что в коробках 1 и 2 разность количества камней каждый ход либо не меняется, либо меняется на 3, поэтому никогда не будет делиться на 3 и в частности не станет нулем.

в) Изначально разность количеств камней во второй и первой коробках составляет 104-97=7. Это число должно либо не поменяться, либо поменяться на число, кратное трем, то есть по-прежнему давать остаток 1 при делении на 3. При этом в первой коробке 1 камень, значит, во второй как минимум 2 (поскольку $0-1$ и $1-1$ нужного остатка не дают). Тогда в третьей коробке не более $201-1-2=198$ камней. Столько камней собрать можно так

$$(97,\ 104,\ 0)\mapsto(96,\ 103,\ 2)\mapsto(98,\ 102,\ 1)\mapsto(100,\ 101,\ 0),$$

а затем 99 раз перекладывать в третью коробку.

Ответ: а) да, б) нет, в) 198.