

ЕГЭ по профильной математике 2025

Решения досрочной волны

Содержание

Первая часть	2
Задачи №1	2
Задачи №2	2
Задачи №3	3
Задачи №4	3
Задачи №5	4
Задачи №6	4
Задачи №7	4
Задачи №8	5
Задачи №9	5
Задачи №10	6
Задачи №11	7
Задачи №12	8
Вторая часть	9
Задачи №13	9
Задачи №14	12
Задачи №15	15
Задачи №16	16
Задачи №17	17
Задачи №18	20
Задачи №19	24

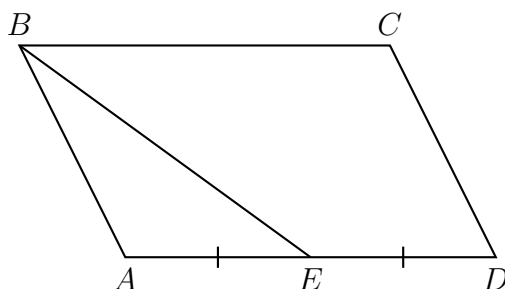


Первая часть

Задачи №1

№1.1 (Москва)

Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 12. Точка E — середина стороны AD . Найдите площадь трапеции $BCDE$.



Ответ: 9

Решение. Пусть h — высота параллелограмма $ABCD$ из точки B на сторону AD . Тогда

$$S_{ABCD} = AD \cdot h = 2AE \cdot h.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} S_{BCDE} &= S_{ABCD} - S_{ABE} = S_{ABCD} - \frac{1}{2}AE \cdot h = \\ &= S_{ABCD} - \frac{1}{4}S_{ABCD} = \frac{3}{4}S_{ABCD} = \frac{3 \cdot 12}{4} = 9 \end{aligned}$$

Задачи №2

№2.1 (Москва)

Даны векторы $\vec{a}(2; 1)$ и $\vec{b}(1; -3)$. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a} - \vec{b}$ и $5\vec{a} - \vec{b}$.

Ответ: 41

Решение. Для того чтобы найти скалярное произведение данных векторов, необходимо вычислить эти векторы:

$$\begin{aligned} \vec{a} - \vec{b} &= (2 - 1; 1 - (-3)) = (1, 4) \\ 5\vec{a} - \vec{b} &= (10 - 1; 5 - (-3)) = (9; 8) \end{aligned}$$

Тогда скалярное произведение:

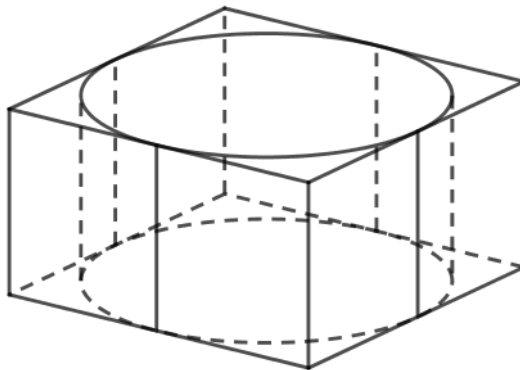
$$(\vec{a} - \vec{b}; 5\vec{a} - \vec{b}) = 1 \cdot 9 + 4 \cdot 8 = 41.$$



Задачи №3

№3.1 (Москва)

Цилиндр вписан в правильную четырёхугольную призму. Радиус основания и высота цилиндра равны 5. Найдите объём призмы.



Ответ: 500

Решение. Основание правильной четырёхугольной призмы — квадрат. Диаметр окружности, вписанной в квадрат, равен стороне квадрата, следовательно, сторона основания призмы равна 10. Высота цилиндра равна высоте призмы. Следовательно, объём призмы равен

$$V = 10^2 \cdot 5 = 500.$$

Задачи №4

№4.1 (Москва)

Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Сапфир» играет три матча с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих матчах команда «Сапфир» начнёт только последнюю игру.

Ответ: 0,125

Решение. Вероятность того, что «Сапфир» не начнет игру в одном матче, равна $\frac{1}{2}$, и вероятность того, что он начнет игру, также равна $\frac{1}{2}$.

Нам нужно найти вероятность того, что «Сапфир» начнет только последнюю игру. Это означает, что в первых двух матчах он не должен начинать, а в третьем — должен. Поскольку броски монетки независимы, вероятности можно перемножить:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 0,125.$$



Задачи №5

№5.1 (Москва)

Помещение освещается тремя лампами. Вероятность перегорания каждой лампы в течение года равна 0,4. Лампы перегорают независимо друг от друга. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа **не перегорит**.

Ответ: 0,936

Решение. Найдём вероятность противоположного события, то есть того, что все лампы перегорят:

$$0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,4 = 0,064.$$

Тогда искомая вероятность равна:

$$p = 1 - 0,064 = 0,936.$$

Задачи №6

№6.1 (Москва)

Найдите корень уравнения $\log_7(4 - x) = 2$.

Ответ: -45

Решение. По определению логарифма:

$$7^2 = 4 - x.$$

Тогда

$$4 - x = 49 \quad \Rightarrow \quad x = -45.$$

Задачи №7

№7.1 (Москва)

Найдите $5 \cos 2\alpha$, если $\sin \alpha = -0,9$.

Ответ: -3,1

Решение. По формуле косинуса двойного угла имеем:

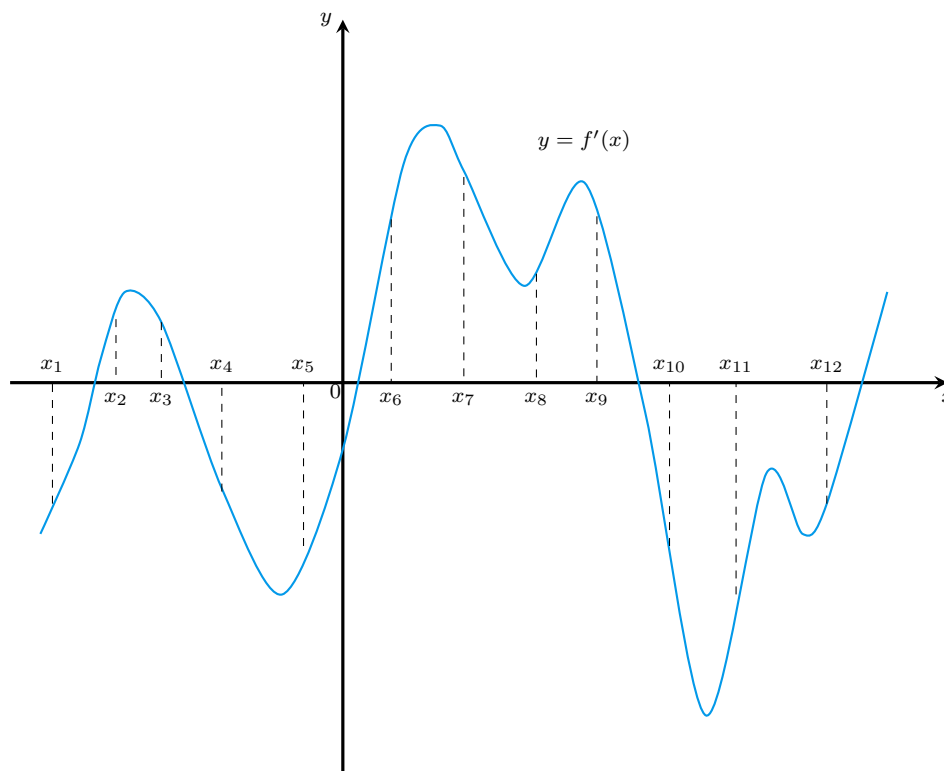
$$\begin{aligned} 5 \cos 2\alpha &= 5 \cdot (1 - 2 \sin^2 \alpha) = 5 - 10 \sin^2 \alpha = \\ &= 5 - 10 \cdot (-0,9)^2 = 5 - 8,1 = -3,1. \end{aligned}$$



Задачи №8

№8.1 (Москва)

На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечено двенадцать точек: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}$. Сколько из этих точек принадлежит промежуткам возрастания функции $f(x)$?



Ответ: 6

Решение. Производная функции положительна там, где функция возрастает. Следовательно, функция возрастает в точках, которые лежат выше оси Ox : $x_2, x_3, x_6, x_7, x_8, x_9$. Таких точек шесть.

Задачи №9

№9.1 (Москва)

Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью $v_0 = 57$ км/ч, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением $a = 8$ км/ч². Расстояние от мотоциклиста до города, измеряемое в километрах, определяется выражением $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$, где t — время в часах. Определите наибольшее время, в течение которого мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи, если оператор гарантирует покрытие на расстоянии не далее чем в 45 км от города. Ответ выразите в минутах.

Ответ: 45

Решение. В последний момент искомого отрезка времени мотоциклист будет находиться на максимальном расстоянии от города, при котором связь работает — 45 км.



Тогда необходимо решить уравнение:

$$45 = 57 \cdot t + \frac{8 \cdot t^2}{2}$$
$$4t^2 + 57t - 45 = 0$$

Найдем дискриминант уравнения:

$$D = 57^2 + 4 \cdot 45 \cdot 4 = 3249 + 720 = 3969 = 63^2.$$

Тогда корнями будут

$$t = \frac{-57 \pm 63}{8}.$$

Так как время неотрицательно, то получаем время в часах, равное

$$t = \frac{6}{8} = 0,75.$$

Тогда искомое время составляет $0,75 \cdot 60 = 45$ минут.

Задачи №10

№10.1 (Москва)

Один мастер может выполнить заказ за 15 часов, а другой — за 10 часов. За сколько часов выполнят заказ оба мастера, работая вместе?

Ответ: 6

Решение. Пусть x — скорость первого мастера, а y — скорость второго. Если принять всю работу за 1, то из условия задачи следует система

$$\begin{cases} x = \frac{1}{15} \\ y = \frac{1}{10} \end{cases}$$

Требуется найти $\frac{1}{x+y}$:

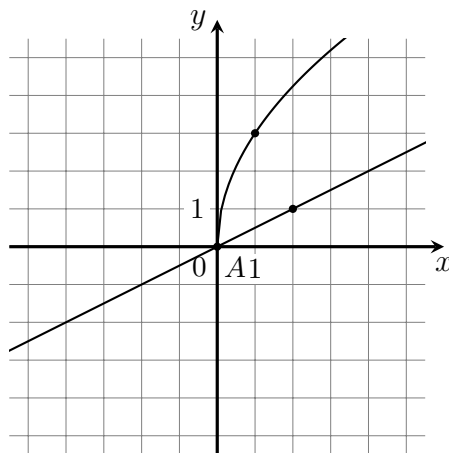
$$\frac{1}{\frac{1}{15} + \frac{1}{10}} = \frac{1}{\frac{2+3}{30}} = \frac{30}{5} = 6.$$



Задачи №11

№11.1 (Москва)

На рисунке изображены графики функций вида $f(x) = a\sqrt{x}$ и $g(x) = kx$, пересекающиеся в точках A и B . Найдите абсциссу точки B .



Ответ: 36

Решение. Восстановим коэффициент k в уравнении прямой. Поскольку прямая проходит через точку $(2;1)$, то получаем уравнение:

$$1 = 2k \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

Поэтому уравнение прямой имеет вид:

$$g(x) = \frac{1}{2}x$$

Восстановим коэффициент a в уравнении корня. Поскольку корень проходит через точку $(1;3)$, то получаем уравнение:

$$3 = a \cdot \sqrt{1} \Rightarrow a = 3$$

Поэтому уравнение корня имеет вид:

$$g(x) = 3\sqrt{x}$$

Теперь найдем точки пересечения:

$$\begin{aligned} 3\sqrt{x} &= \frac{1}{2}x \\ 9x &= \frac{1}{4}x^2 \\ x \cdot \left(\frac{1}{4}x - 9\right) &= 0 \\ \begin{cases} x = 0 \\ x = 36 \end{cases} \end{aligned}$$

Поскольку $x = 0$ соответствует точке A , то точке B соответствует $x = 36$.



Задачи №12

№12.1 (Москва)

Найдите точку минимума функции $y = (7x^2 - 21x - 21) \cdot e^{x+12}$.

Ответ: 3

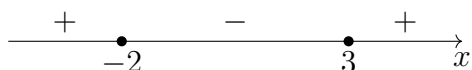
Решение. Вычислим производную данной функции:

$$\begin{aligned}y' &= (14x - 21) \cdot e^{x+12} + (7x^2 - 21x - 21) \cdot e^{x+12} \\y' &= e^{x+12} \cdot (7x^2 - 7x - 42) = e^{x+12} \cdot 7 \cdot (x^2 - x - 6) \\y' &= 7 \cdot e^{x+12} \cdot (x + 2)(x - 3)\end{aligned}$$

Теперь найдем нули производной:

$$\begin{aligned}7 \cdot e^{x+12} \cdot (x^2 - x - 6) &= 0 \\(x + 2)(x - 3) &= 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -2, x_2 = 3\end{aligned}$$

Тогда изобразим на прямой, какие знаки принимает производная:



Значит, функция сменяет убывание на возрастание при проходе через точку $x = 3$ слева направо. Таким образом, минимум достигается в точке $x = 3$.



Вторая часть

Задачи №13

№13.1 (Москва)

а) Решите уравнение $2 \sin^2 x + \sqrt{2} \sin(2\pi + x) - \sqrt{3} \sin 2x = \sqrt{6} \cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

б) $\frac{7\pi}{4}; \frac{7\pi}{3}$.

Решение. а) Преобразуем уравнение, воспользовавшись формулами

- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$,
- $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin \alpha$.

Тогда имеем:

$$\begin{aligned} 2 \sin^2 x + \sqrt{2} \sin(2\pi + x) - \sqrt{3} \sin 2x &= \sqrt{6} \cos x \\ 2 \sin^2 x + \sqrt{2} \sin x &= \sqrt{6} \cos x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x \\ \sin x(2 \sin x + \sqrt{2}) &= \sqrt{3} \cos x(2 \sin x + \sqrt{2}) \\ (\sin x - \sqrt{3} \cos x)(2 \sin x + \sqrt{2}) &= 0 \end{aligned}$$

То есть выполнено одно из условий:

1. $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$,
2. $2 \sin x + \sqrt{2} = 0$.

Решим оба случая. Первый:

$$\begin{aligned} \sin x - \sqrt{3} \cos x &= 0 \\ \sin x &= \sqrt{3} \cos x \\ \operatorname{tg} x &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

Данное преобразование возможно, так как, если $\cos x = 0$, то и $\sin x = 0$, а это противоречит ОТТ. Тогда

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Второй:

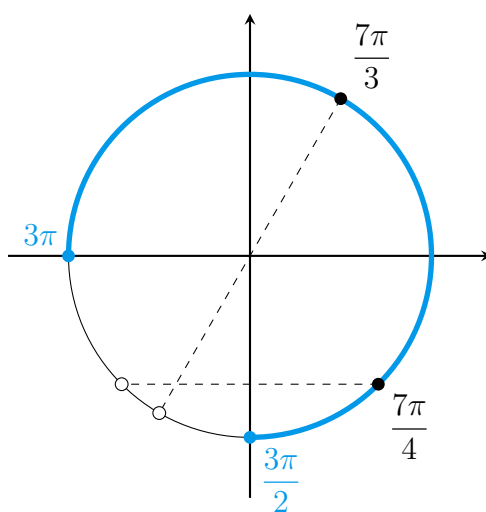
$$\begin{aligned} 2 \sin x + \sqrt{2} &= 0 \\ \sin x &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \left[\begin{aligned} x &= -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x &= -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$



Тогда

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$ лежат точки $\frac{7\pi}{4}; \frac{7\pi}{3}$.



№13.2 (?)

а) Решите уравнение $\sqrt{3} \sin 2x + 3 \cos 2x = 0$.б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.**Ответ:** а) $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$ б) $\frac{4\pi}{3}; \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{3}$ **Решение.** а) Преобразуем уравнение:

$$\sqrt{3} \sin 2x = -3 \cos 2x \quad | : \cos 2x \neq 0$$

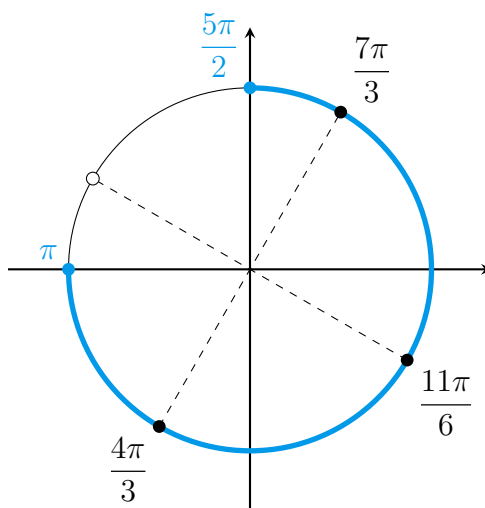
$$\sqrt{3} \cdot \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = -3 \quad | : \sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg} 2x = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$$

Получили элементарное тригонометрическое уравнение, его решение:

$$2x = \frac{2\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).Следовательно, на отрезке $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ лежат точки $\frac{4\pi}{3}; \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{3}$.



Задачи №14

№14.1 (Москва)

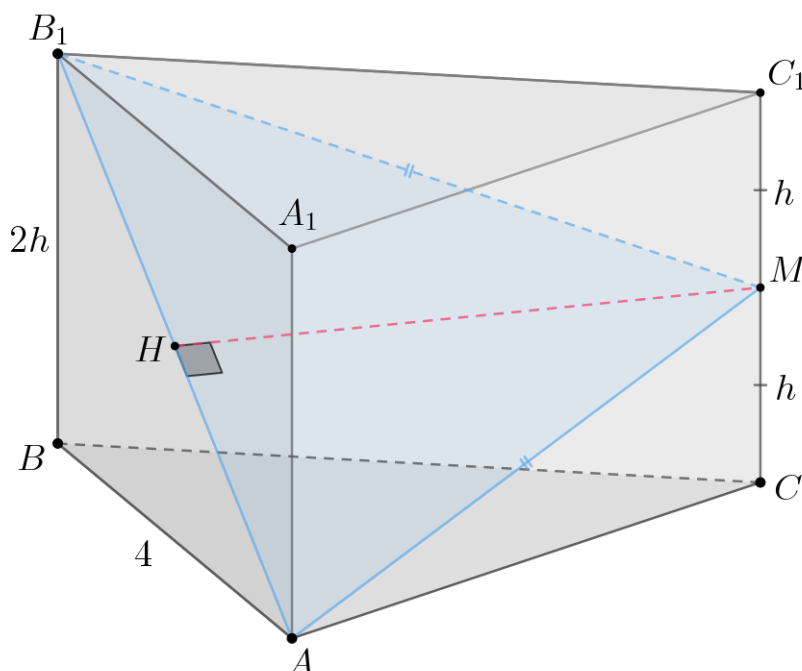
Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, точка M — середина ребра CC_1 . Плоскость α проходит через точки B_1 , A и M .

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью α является равнобедренным треугольником.

б) Найдите высоту призмы, если площадь сечения призмы плоскостью α равна 18 и $AB = 4$.

Ответ: б) $2\sqrt{23}$

Решение. а) Рассмотрим прямоугольные треугольники $\triangle B_1C_1M$ и $\triangle ACM$. Их катеты CM и C_1M равны, так как M — середина CC_1 по условию. Также равны катеты B_1C_1 и AC , поскольку призма правильная, то есть оба треугольника в основании правильные с равными сторонами.



Тогда $\triangle B_1C_1M = \triangle ACM$ по двум катетам. Тогда равны их гипотенузы $AM = B_1M$. То есть треугольник B_1MA — равнобедренный, что и требовалось доказать.

б) Пусть $BB_1 = 2h$. Тогда

- по теореме Пифагора $AB_1 = \sqrt{AB^2 + BB_1^2} = \sqrt{16 + 4h^2} = 2\sqrt{4 + h^2}$
- $AM = \sqrt{AC^2 + CM^2} = \sqrt{16 + h^2}$

Поскольку треугольник $\triangle B_1MA$ — равнобедренный с основанием AB_1 , то его высота MH делит сторону AB_1 пополам. То есть $AH = \frac{AB_1}{2} = \sqrt{4 + h^2}$.

Вновь воспользуемся теоремой Пифагора:

$$MH = \sqrt{AM^2 - AH^2} = \sqrt{16 + h^2 - 4 - h^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

Теперь запишем площадь S сечения:

$$S = \frac{MH \cdot AB_1}{2} = \frac{2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{4 + h^2}}{2} = 2\sqrt{12 + 3h^2}$$



По условию имеем:

$$2\sqrt{12 + 3h^2} = 18$$

$$12 + 3h^2 = 81$$

$$3h^2 = 69$$

$$h^2 = 23$$

$$h = \sqrt{23}$$

Тогда высота призмы равняется $2h$, то есть $2\sqrt{23}$.

№14.2 (Москва)

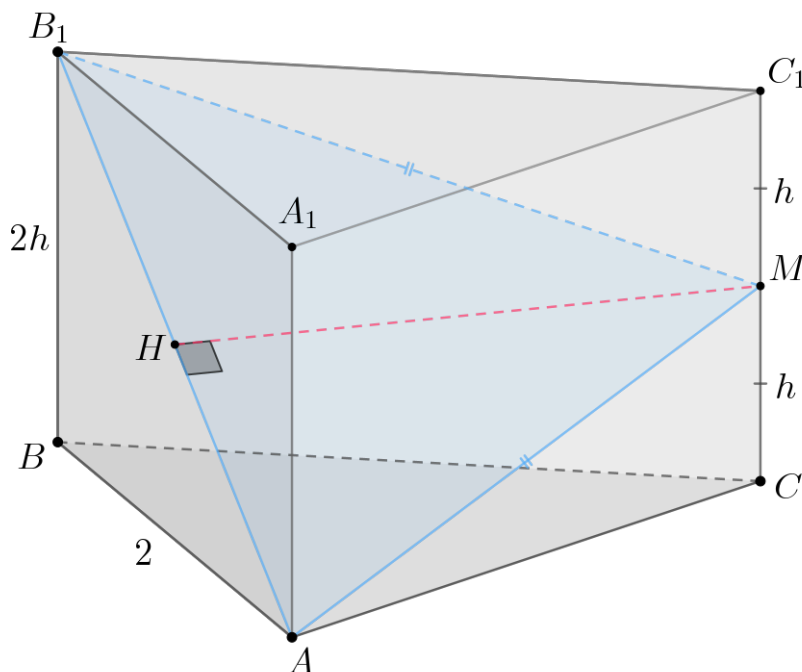
Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, точка M — середина ребра CC_1 . Плоскость α проходит через точки B_1 , A и M .

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью α является равнобедренным треугольником.

б) Найдите высоту призмы, если площадь сечения призмы плоскостью α равна 6 и $AB = 2$.

Ответ: б) $2\sqrt{11}$

Решение. а) Рассмотрим прямоугольные треугольники $\triangle B_1C_1M$ и $\triangle ACM$. Их катеты CM и C_1M равны, так как M — середина CC_1 по условию. Также равны катеты B_1C_1 и AC , поскольку призма правильная, то есть оба треугольника в основании правильные с равными сторонами.



Тогда $\triangle B_1C_1M = \triangle ACM$ по двум катетам. Тогда равны их гипотенузы $AM = B_1M$. То есть треугольник B_1MA — равнобедренный, что и требовалось доказать.

б) Пусть $BB_1 = 2h$. Тогда

- по теореме Пифагора $AB_1 = \sqrt{AB^2 + BB_1^2} = \sqrt{4 + 4h^2} = 2\sqrt{1 + h^2}$
- $AM = \sqrt{AC^2 + CM^2} = \sqrt{4 + h^2}$



Поскольку треугольник $\triangle B_1MA$ — равнобедренный с основанием AB_1 , то его высота MH делит сторону AB_1 пополам. То есть $AH = \frac{AB_1}{2} = \sqrt{1+h^2}$.
Вновь воспользуемся теоремой Пифагора:

$$MH = \sqrt{AM^2 - AH^2} = \sqrt{4 + h^2 - 1 - h^2} = \sqrt{3}$$

Теперь запишем площадь S сечения:

$$S = \frac{MH \cdot AB_1}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{1+h^2}}{2} = \sqrt{3+3h^2}$$

По условию имеем:

$$\sqrt{3+3h^2} = 6$$

$$3+3h^2 = 36$$

$$3h^2 = 33$$

$$h^2 = 11$$

$$h = \sqrt{11}$$

Высота призмы равняется $2h$, то есть $2\sqrt{11}$.



Задачи №15

№15.1 (Москва)

Решите неравенство

$$7 \log_{12} (x^2 - 13x + 42) \leq 8 + \log_{12} \frac{(x-7)^7}{x-6}.$$

Ответ: $[-6; 6) \cup (7; 18]$

Решение. Найдем ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2 - 13x + 42 > 0 \\ x - 6 \neq 0 \\ \frac{(x-7)^7}{x-6} > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty; 6) \cup (7; +\infty)$$

На ОДЗ преобразуем исходное неравенство:

$$\log_{12} (x^2 - 13x + 42)^7 - \log_{12} 12^8 - \log_{12} \frac{(x-7)^7}{x-6} \leq 0$$

$$\log_{12} \frac{(x^2 - 13x + 42)^7}{12^8 \cdot \frac{(x-7)^7}{x-6}} \leq 0$$

$$\log_{12} \frac{(x-6)^7 (x-7)^7}{12^8 \cdot \frac{(x-7)^7}{x-6}} \leq 0$$

На ОДЗ последнее неравенство равносильно неравенству

$$\log_{12} \frac{(x-6)^8}{12^8} \leq 0$$

$$8 \cdot \log_{12} \frac{|x-6|}{12} \leq 0$$

$$\log_{12} \frac{|x-6|}{12} \leq 0$$

По методу рационализации это неравенство на ОДЗ равносильно:

$$(12 - 1) \cdot \left(\frac{|x-6|}{12} - 1 \right) \leq 0$$

$$\frac{|x-6| - 12}{12} \leq 0$$

$$|x-6| - 12 \leq 0$$

Раскроем модуль на промежутках знакопостоянства подмодульного выражения.

$$1) x - 6 < 0 \Rightarrow -x - 6 \leq 0. \text{ Отсюда } x \in [-6; 6).$$

$$2) x - 6 \geq 0 \Rightarrow x - 18 \leq 0. \text{ Отсюда } x \in [6; 18].$$

Общее решение неравенства с модулем $x \in [-6; 18]$ и после пересечения с ОДЗ получаем

$$x \in [-6; 6) \cup (7; 18].$$



Задачи №16

№16.1 (Москва)

Строительство нового завода стоит 100 млн рублей. Затраты на производство x тысяч единиц продукции на таком заводе равны $Z = 0,5x^2 + x + 7$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене q тысяч рублей за единицу, то прибыль в млн рублей за один год составит $qx - Z$. Когда завод будет построен, планируется выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении q строительство завода окупится не более чем за 4 года?

Ответ: 9

Решение. Так как строительство завода должно окупиться не более чем за 4 года, то прибыль за 4 года должна составить не менее 100 млн рублей. Следовательно,

$$\begin{aligned} 4(qx - (0,5x^2 + x + 7)) &\geq 100 \\ qx - 0,5x^2 - x - 7 &\geq 25 \end{aligned}$$

Цена q принимает такие значения, при которых прибыль (значение выражения $qx - 0,5x^2 - x - 7$) будет наибольшей. Следовательно, наибольшее значение выражения $qx - 0,5x^2 - x - 7$ должно быть ≥ 25 .

Рассмотрим функцию

$$y = qx - 0,5x^2 - x - 7 = -0,5x^2 + (q - 1)x - 7.$$

Она является квадратичной, ее графиком является парабола, ветви которой направлены вниз. Следовательно, наибольшее значение она принимает в своей вершине, то есть в точке

$$x_0 = \frac{-(q - 1)}{2 \cdot (-0,5)} = q - 1.$$

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} -0,5(q - 1)^2 + (q - 1)(q - 1) - 7 &\geq 25 \\ (q - 1)^2 &\geq 64 \\ q &\geq 9. \end{aligned}$$

Следовательно, наименьшее подходящее $q = 9$.



Задачи №17

№17.1 (Москва)

Сумма оснований трапеции равна 17, а её диагонали равна 8 и 15.

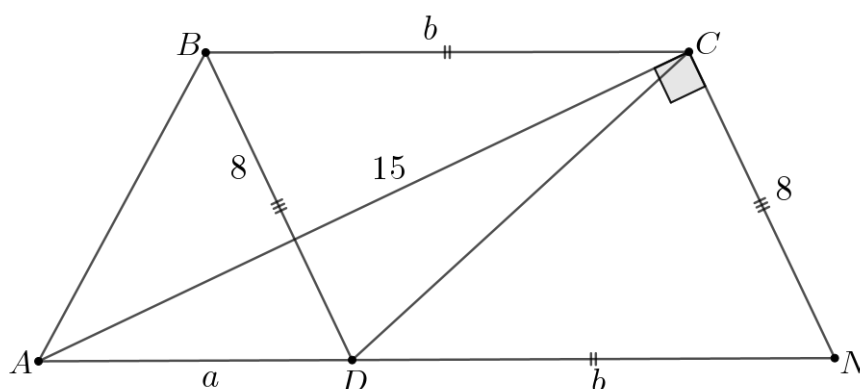
а) Докажите, что диагонали трапеции перпендикулярны.

б) Найдите высоту трапеции.

Ответ: б) $\frac{120}{17}$

Решение. а) Обозначим вершины A, B, C, D трапеции так, чтобы AD было меньшим основанием, BC — большим основанием.

Пусть $AD = a$, $BC = b$, а также $AC = 15$, $BD = 8$. Выполним дополнительное построение: через вершину C проведем отрезок, параллельный BD и по длине равный ему. Получим отрезок CN .



Заметим, что $BCND$ — параллелограмм, а значит, $BC = ND$. Таким образом, мы получили, что $AN = a + b = 17$.

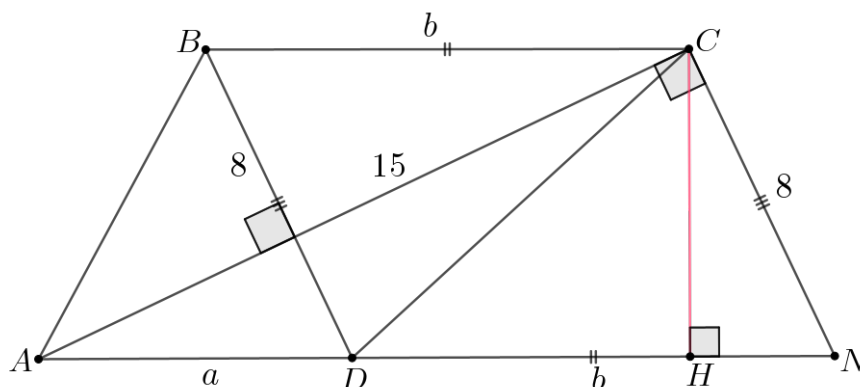
Рассмотрим треугольник $\triangle ACN$. Заметим, что в нем $AC^2 + CN^2 = AN^2$.

Действительно,

$$AC^2 + CN^2 = 15^2 + 8^2 = 225 + 64 = 289 = 17^2 = AN^2.$$

Таким образом, по обратной теореме Пифагора $\triangle ACN$ является прямоугольным, то есть $\angle ACN = 90^\circ$. Но так как данный угол получен в результате параллельного переноса одной из диагоналей, то диагонали тоже перпендикулярны.

б) Опустим высоту CH трапеции на прямую, содержащую основание AD . Заметим, что данная высота является ещё и высотой в прямоугольном треугольнике $\triangle ACN$.





Площадь $\triangle ACN$, с одной стороны, равна $\frac{1}{2} \cdot AC \cdot CN$, а с другой стороны, равна $\frac{1}{2} \cdot CH \cdot AN$. Тогда получаем

$$\frac{1}{2} \cdot AC \cdot CN = \frac{1}{2} \cdot CH \cdot AN$$

$$CH = \frac{AC \cdot CN}{AN}$$

$$CH = \frac{15 \cdot 8}{17} = \frac{120}{17}$$

№17.2 (Москва)

Сумма оснований трапеции равна 13, а её диагонали равна 5 и 12.

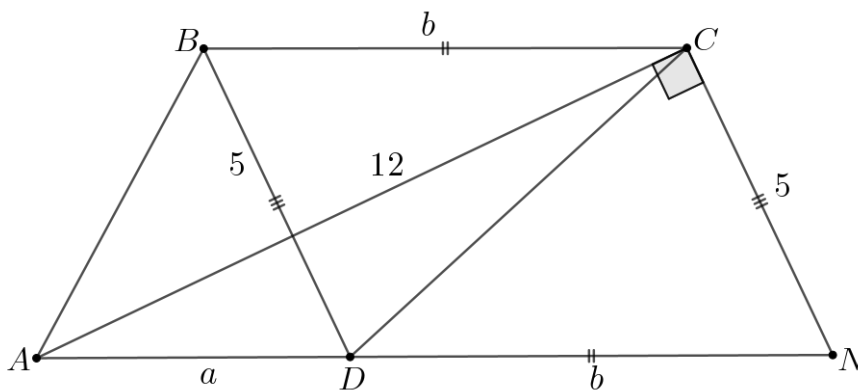
а) Докажите, что диагонали трапеции перпендикулярны.

б) Найдите высоту трапеции.

Ответ: б) $\frac{60}{13}$

Решение. а) Обозначим вершины A, B, C, D трапеции так, чтобы AD было меньшим основанием, BC — большим основанием.

Пусть $AD = a$, $BC = b$, а также $AC = 12$, $BD = 5$. Выполним дополнительное построение: через вершину C проведем отрезок, параллельный BD и по длине равный ему. Получим отрезок CN .



Заметим, что $BCND$ — параллелограмм, а значит, $BC = ND$. Таким образом, мы получили, что $AN = a + b = 13$.

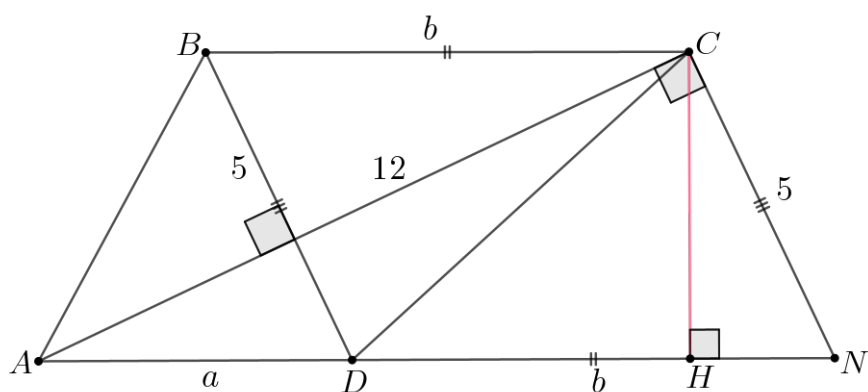
Рассмотрим треугольник $\triangle ACN$. Заметим, что $AC^2 + CN^2 = AN^2$.

Действительно,

$$AC^2 + CN^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 = 13^2 = AN^2.$$

Таким образом, по обратной теореме Пифагора $\triangle ACN$ является прямоугольным, то есть $\angle ACN = 90^\circ$. Но так как данный угол получен в результате параллельного переноса одной из диагоналей, то диагонали тоже перпендикулярны.

б) Опустим высоту CH трапеции на прямую, содержащую основание AD . Заметим, что данная высота является ещё и высотой в прямоугольном треугольнике $\triangle ACN$.



Площадь $\triangle ACN$, с одной стороны, равна $\frac{1}{2} \cdot AC \cdot CN$, а с другой стороны, $\frac{1}{2} \cdot CH \cdot AN$. Тогда получаем

$$\frac{1}{2} \cdot AC \cdot CN = \frac{1}{2} \cdot CH \cdot AN$$
$$CH = \frac{AC \cdot CN}{AN} \Rightarrow CH = \frac{12 \cdot 5}{13} = \frac{60}{13}$$



Задачи №18

№18.1 (Москва)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^4 + (a - 3)^2 = |x - a + 3| + |x + a - 3|$$

имеет ровно одно решение или не имеет решений вовсе.

Ответ: $a \in (-\infty; 1] \cup [5; +\infty)$

Решение. Для начала заменим для удобства $a - 3$ на b .

Пусть левая часть уравнения — функция

$$f(x) = x^4 + b^2.$$

Пусть правая часть уравнения — функция

$$g(x) = |x - b| + |x + b|.$$

Так как уравнение останется прежним, если b заменить на $-b$, то можем решать задачу для $b \geq 0$, а затем добавить в ответ все значения противоположного знака.

Нарисуем графики этих функций в осях xOy .

Функция $f(x) = x^4 + b^2$ четная, убывает при $x < 0$ и возрастает при $x > 0$. При $x = 0$ функция принимает значение b^2 .

Рассмотрим функцию

$$g(x) = |x - b| + |x + b|.$$

Ее модули обнуляются при $x = b$ и $x = -b$. Так как мы рассматриваем $b \geq 0$, то $b \geq -b$

Тогда, раскрыв модули, получаем:

$$g(x) = \begin{cases} -2x, & x < -b \\ 2b, & -b \leq x \leq b \\ 2x, & x > b \end{cases}$$

Это «корыто» с ветвями вверх, дно которого лежит на прямой $y = 2b \geq 0$. Заметим, что $g(x)$ также четна:

$$g(-x) = |-x - b| + |-x + b| = |x + b| + |x - b| = g(x)$$

При этом так как ветви корыта лежат на фиксированных прямых, то при изменении параметра его дно двигается вверх/вниз, а границы дна «скользят» по этим фиксированным прямым.

Итак, нарисуем оба графика и изобразим граничные положения. Так как обе функции четны, то рисунок будет симметричен относительно оси Oy .

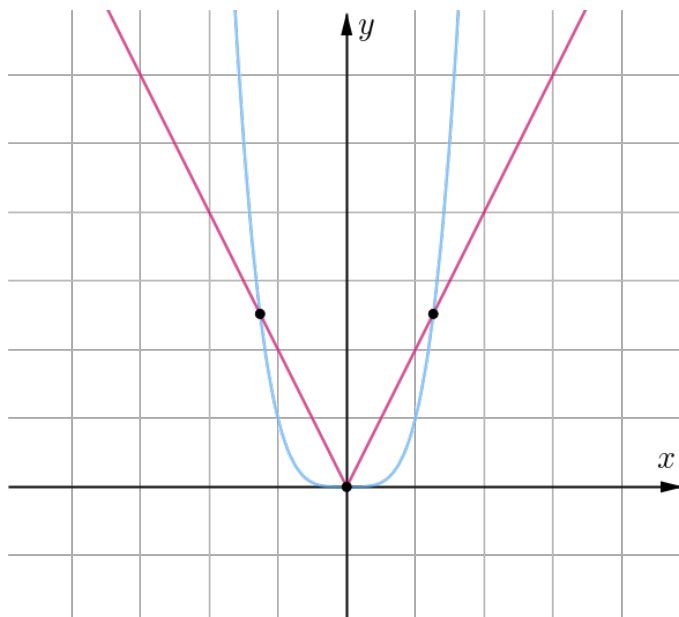
При $b = 0$ вершина функции $f(x)$ находится в точке $(0; 0)$, а корыто принимает вид

$$g(x) = |-x| + |x| = 2|x|,$$

то есть представляет собой галочку.



Получаем следующую картинку:



Заметим, что в таком случае получается 3 решения, то есть $b = 0$ нам не подходит.

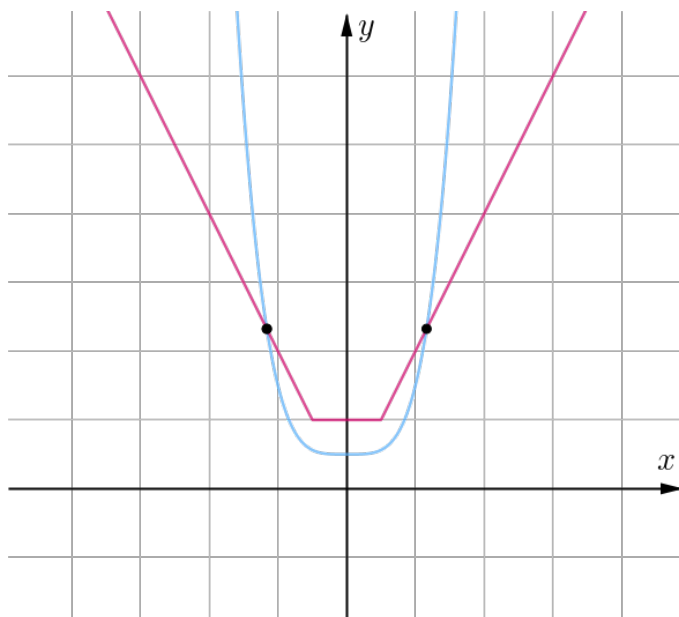
Далее вершина графика $f(x)$ находится в точке $(0; b^2)$, а дно корыта $g(x)$ лежит на прямой $y = 2b$.

Поймем, когда вершина $f(x)$ будет ниже дна корыта, а когда выше:

$$\begin{aligned} b^2 &< 2b \\ b(b-2) &< 0 \\ b &\in (0; 2) \end{aligned}$$

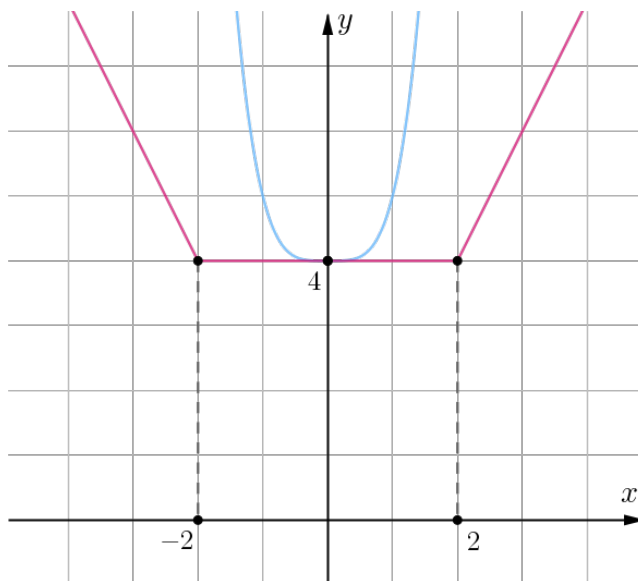
Таким образом, при $b \in (0; 2)$ вершина $f(x)$ ниже дна $g(x)$, при $b = 2$ лежит на дне, при $b > 2$ выше дна.

Когда вершина $f(x)$ находится ниже дна корыта $g(x)$, то очевидно при $x > 0$ будет пересечение $f(x)$ и $g(x)$, а так как рисунок симметричен относительно Oy , то и при $x < 0$ будет пересечение. Тогда решений будет как минимум 2, то есть значения $b \in (0; 2)$ нам не подходят.





Нарисуем случай $b = 2$. Как мы уже поняли, в этом случае вершина $f(x)$ лежит на дне корыта $g(x)$:



Поймем, что в этом случае правая ветвь $f(x)$ не имеет пересечений с правой ветвью корыта $g(x)$. Действительно, во-первых, $f(2) = 20 > 4 = g(2)$, во-вторых, при $x > 2$ функция $f(x)$ возрастает быстрее, чем правая ветвь $g(x)$:

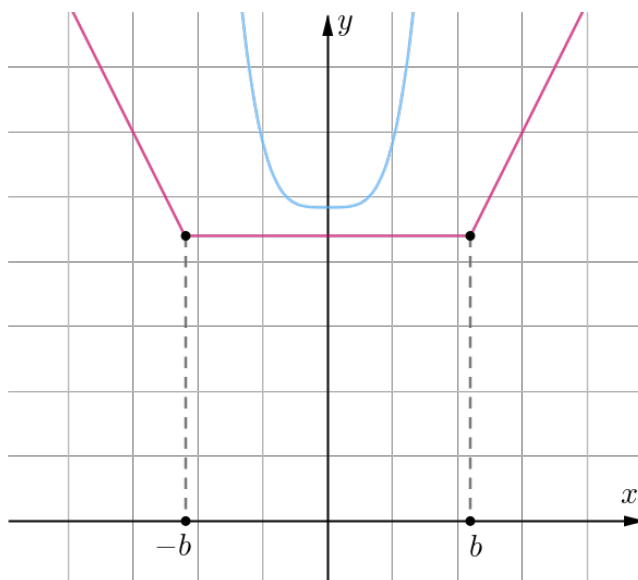
$$f'(x) = 4x^3 > 4 \cdot 2^3 = 32$$

$$g'(x) = 2$$

$$f'(x) > g'(x)$$

Таким образом, в данном случае при $x > 0$ графики не пересекаются и, в силу симметрии, не пересекаются и при $x < 0$. То есть при $b = 2$ одна точка пересечения $(0; 4)$, значит, это значение параметра подходит.

При $b > 2$ вершина $f(x)$ выше дна корыта $g(x)$. Поймем, что в данном случае решений уже не будет. Так как вершина $f(x)$ выше дна корыта $g(x)$, то $f(x)$ не пересекает дно корыта $g(x)$. Покажем, что при $b > 2$ $f(x)$ не пересекает правую ветвь корыта $g(x)$.





Действительно, во-первых, $f(b) = b^4 + b^2 > 2b^3 > 2b = g(b)$, во-вторых, при $x > b$ функция $f(x)$ возрастает быстрее, чем правая ветвь $g(x)$:

$$f'(x) = 4x^3 > 4 \cdot b^3 > 4 \cdot 2^3 = 32$$

$$g'(x) = 2$$

$$f'(x) > g'(x)$$

Таким образом, в данном случае при $x > 0$ графики не пересекаются и, в силу симметрии, не пересекаются и при $x < 0$. То есть при $b > 2$ пересечений вовсе нет, значит, эти значения параметра подходят.

Объединяя подходящие значения, и добавив значения, противоположные по знаку, получаем:

$$b \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty).$$

Так как $b = a - 3$, получаем в итоге:

$$a \in (-\infty; 1] \cup [5; +\infty).$$

№18.2 (?)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^{10} + (a - 2|x|)^5 + x^2 + a - 2|x| = 0$$

имеет более трёх различных решений.

Ответ: $a \in (0; 1)$

Решение. Преобразуем обе части уравнения:

$$x^{10} + x^2 = -(a - 2|x|)^5 + 2|x| - a$$

$$(x^2)^5 + x^2 = (2|x| - a)^5 + 2|x| - a$$

Пусть $f(t) = t^5 + t$. Заметим, что это сумма двух монотонно возрастающих функций, а значит, $f(t)$ тоже является монотонно возрастающей.

Таким образом, мы получили

$$f(x^2) = f(2|x| - a).$$

В силу монотонности можем сделать вывод, что должно быть равенство аргументов. Тогда получаем уравнение:

$$x^2 = 2|x| - a$$

$$x^2 - 2|x| = -a$$

Пусть $g(x) = x^2 - 2|x|$.

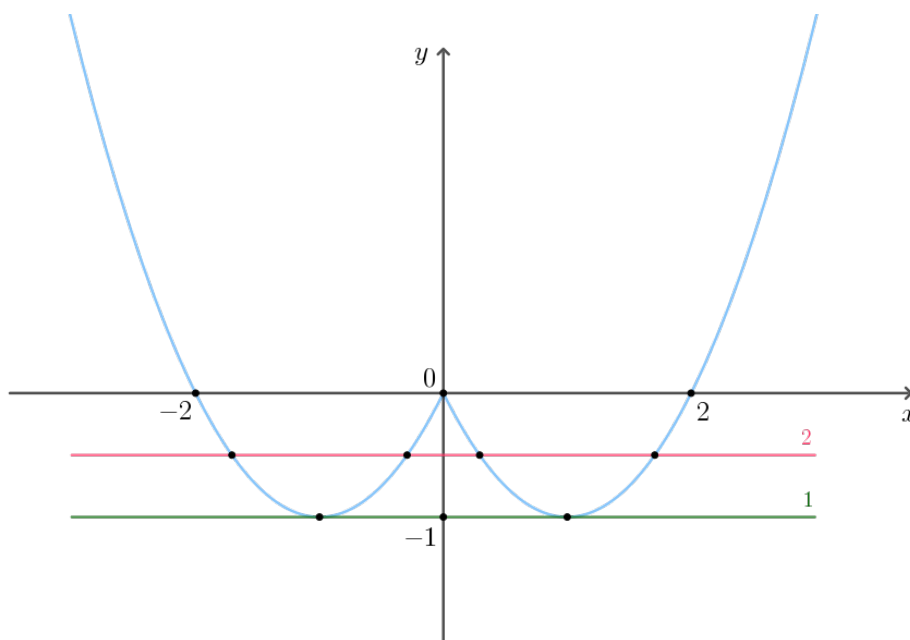
Запишем $g(x)$ в следующем виде:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \geq 0 \\ x^2 + 2x, & x < 0 \end{cases}$$

Это части парабол с ветвями вверх и вершинами $(1; -1)$ и $(-1; -1)$.



Изобразим график:



Заметим, что граничными положениями прямой $y = -a$ являются положение 1 (горизонтальная прямая проходит через вершины парабол) и положение $y = 0$ (горизонтальная прямая проходит через точку $(0; 0)$ «склейки» парабол).

Тогда в положении 1 у данного уравнения будет ровно два корня, а в положении $y = 0$ будет ровно три корня.

Тогда нам подходят все промежуточные значения. То есть

$$-1 < -a < 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < a < 1.$$

Задачи №19

№19.1 (Москва)

В группе поровну юношей и девушек. Юноши отправляли электронные письма девушкам. Каждый юноша отправил или 4 письма, или 21 письмо, причём и тех и других юношей было не менее двух. Возможно, что какой-то юноша отправил какой-то девушке несколько писем.

- а) Могло ли оказаться так, что каждая девушка получила ровно 7 писем?
- б) Какое наименьшее количество девушек могло быть в группе, если известно, что все они получили писем поровну?
- в) Пусть все девушки получили различное количество писем (возможно, какая-то девушка не получила писем вообще). Какое наибольшее количество девушек в такой группе?

Ответ: а) Да, могло

б) 17

в) 41

Решение. Пусть изначально было x юношей и x девушек. Пусть a парней из x послали по 21 письму девушкам.

а) Если a юношей отправили по 21 письму, то $x - a$ юношей отправили по 4 письма. Всего было отправлено $21 \cdot a + 4 \cdot (x - a) = 17a + 4x$ писем. Если каждая девушка получила по 7 писем, то



всего писем было получено $7x$. Значит,

$$17a + 4x = 7x \Leftrightarrow 17a = 3x$$

При $a = 3, x = 17$ равенство выполняется. Значит, если девушек и юношей было по 17, и 3 юноши отправили по 21 письму, а 14 — по 4, то каждая девушка получила по 7 писем. Действительно, $3 \cdot 21 + 14 \cdot 4 = 17 \cdot 7 = 119$.

б) Пусть каждая девушка получила по n писем. В предыдущем пункте мы получили, что всего было отправлено $17a + 4x$, тогда выполняется равенство:

$$xn = 17a + 4x \Leftrightarrow x(n - 4) = 17a \Leftrightarrow n - 4 = \frac{17a}{x}$$

Докажем, что x не может быть меньше 17. Пусть это не так.

По условию юношей, отправивших по 4 письма, хотя бы 2, то есть $x - a \geq 2$; юношей, отправивших по 21 письму, хотя бы 2, то есть $a \geq 2$, поэтому $x \geq 4$. Из предположения $x < 17$, поэтому получаем: $a < x, 3 < x < 17$.

Число $n - 4 = \frac{17a}{x}$ — натуральное, поэтому x делит $17a$.

Так как 17 — простое число и $x > 1$, $x < 17$, то a должно делиться на x , но $a < x$. Противоречие. Значит, $x \geq 17$.

Пример на 17 девушек был приведен в пункте а).

в) Если девушки получили разное количество писем, то полученное количество писем больше или равно суммарному количеству писем от 0 до $x - 1$: девушка с наименьшим количеством писем получила хотя бы 0 писем, следующая по количеству писем получила хотя бы 1, ..., девушка с наибольшим количеством писем получила хотя бы $x - 1$ письмо. Можем записать неравенство:

$$17a + 4x \geq \frac{x(x-1)}{2} \Rightarrow 34a + 8x \geq x^2 - x$$

Заметим, что $a \leq x - 2$, поэтому:

$$x^2 - x \leq 34a + 8x \leq 34(x - 2) + 8x = 42x - 68 \Rightarrow x^2 - 43x + 68 \leq 0$$

Найдем решения этого неравенства:

$$D = 43^2 - 4 \cdot 68 = 1577 \Rightarrow x \in \left(\frac{43 - \sqrt{1577}}{2}; \frac{43 + \sqrt{1577}}{2} \right)$$

Значит,

$$x \leq \frac{43 + \sqrt{1577}}{2} < \frac{43 + \sqrt{1600}}{2} < \frac{43 + 40}{2} = 41,5$$

Значит, x может быть не более 41. Пример для $x = 41$:

$$\frac{39 \cdot 40}{2} + 47 = 21 \cdot 39 + 4 \cdot 2$$

Суммарно 41 девушка получила 827 писем: первые 40 девушек получили разное количество писем от 0 до 39, последняя получила 47 писем. При этом 39 юношей отправили по 21 письму, 2 юноши отправили по 4 письма.