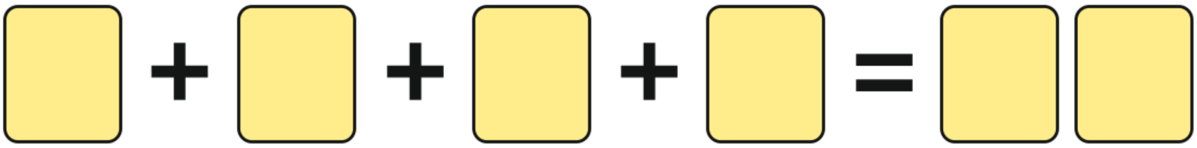
Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике
для 4 класса
2024/25 учебный
Максимальное количество баллов — 8

1. Расстояние от дома Маши до школы по прямой дороге равно 20 км. Остановка находится на этой дороге в 4 раза ближе к дому, чем к школе. Сколько километров от дома Маши до остановки?

Ответ. 4 км
Формат ответа: Число

Решение. Расстояние от остановки до школы в 4 раза больше, чем от остановки до дома. Тогда расстояние от дома до школы – это 5 расстояний от дома до остановки: 1 от дома до остановки, и еще 4 от остановки до школы. Находим расстояние от дома до остановки, оно равно 20:5=4 км.

2. Расставьте цифры 1, 2, 3, 6, 7 и 9 в клетки (по одной в каждую клетку, каждую цифру можно использовать только один раз) так, чтобы равенство стало верным. В ответ запишите результат сложения.



Ответ. 23
Формат ответа: Число

Решение. Чтобы получить 23, можно расставить цифры так: 1+6+7+9=23.

Покажем, что других вариантов ответа нет. Сумма четырех цифр не более, чем 3+6+7+9=25, значит результат более 23 (это хотя бы 26) получить невозможно.

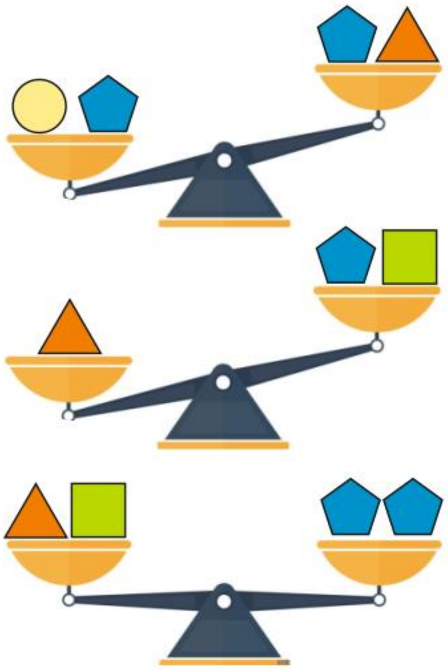
Если результат меньше 23. 21 не подходит, так как 3+6+7+9=25, 19 не подходит, так как 2+3+6+7=18. Если результат менее 19, то сумма оставшихся цифр будет равна хотя бы 2+3+6+9=20, что тоже не подходит.

3. Мише каждый день дают 100 рублей на карманные расходы. В первый день он потратил 10 рублей, во второй хочет потратить 20 рублей, в третий – 30 рублей и так далее каждый следующий день он тратит на 10 рублей больше, чем в предыдущий. На какой по счету день Мише не хватит денег на задуманную покупку? Неизрасходованные за день деньги остаются у Миши, изначально денег у него не было.

Ответ. На 20-й день
Формат ответа: Число

Решение. Посмотрим сколько денег у Миши остаются не потраченными каждый день. В первый день у него осталось 90 рублей, во второй — 80, в третий — 70 и так далее. В 10 день он потратил 100 рублей, то есть на будущее он отложил 0. Дальше он начал тратить больше чем получает. В одиннадцатый день он потратил на 10 рублей больше, в двенадцатый — на 20 и так далее. Будем считать, что в одиннадцатый день он израсходовал те 10 рублей, которые сохранил в девятый, в двенадцатый — те, что сохранил в восьмой день и так далее. Тогда в девятнадцатый день он потратит те 90 рублей, которые остались с первого дня. Теперь у него не осталось денег. В двадцатый день ему дадут 100 рублей, а он хочет потратить 200, но ему не хватит денег на покупку.

4. Расположите фигуры в порядке убывания веса от самого тяжелого к самому легкому.



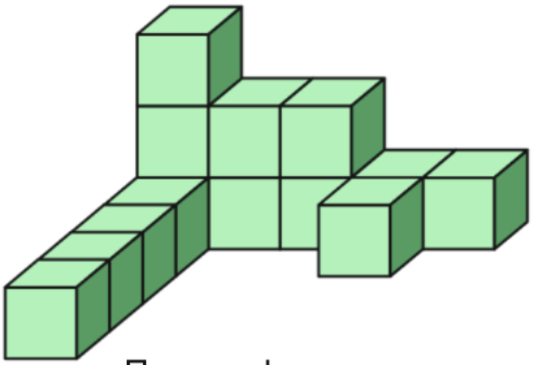
Ответ. 1 круг, 2 треугольник, 3 пятиугольник, 4 квадрат

Формат ответа: упорядочить треугольник, квадрат, пятиугольник, круг

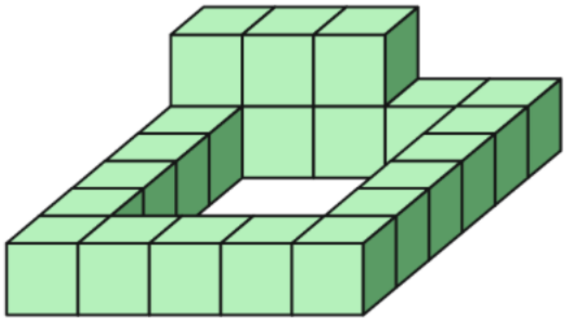
Решение. По первому взвешиванию поймем, что круг тяжелее, чем треугольник, так как пятиугольники на двух чашах весят одинаково.
По второму взвешиванию поймем, что треугольник тяжелее как пятиугольника, так и квадрата.

По третьему взвешиванию поймем, что пятиугольник тяжелее квадрата, так как треугольник тяжелее пятиугольника, а два пятиугольника весят столько же, сколько и квадрат с треугольником. Если бы квадрат весил не меньше пятиугольника, то левая чаша была бы тяжелее правой.
Таким образом самый тяжелый — круг, затем треугольник, потом пятиугольник, и самый легкий — квадрат.

5. Яша сложил две фигуры из кубиков как показано на рисунке. В общей сложности он использовал 35 кубиков. Чтобы окрасить поверхность первой фигуры (включая поверхность, которая соприкасается с полом), Яша использовал 162 грамма краски. Сколько грамм краски необходимо для того, чтобы окрасить поверхность второй фигуры?



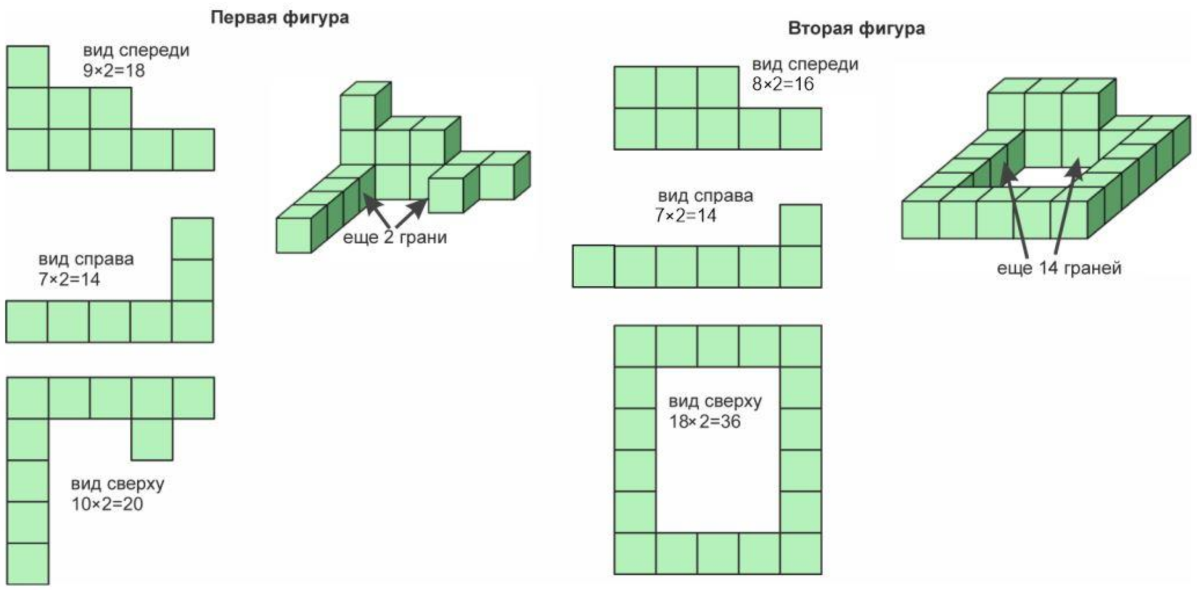
Первая фигура



Вторая фигура

Ответ 240 грамм
Формат ответа: Число

Решение. Найдем площадь левой фигуры, чтобы понять, сколько грамм краски уходит на одну грань маленького кубика.
Площадь поверхности левой фигуры равна 54 единичных квадратика: 18 граней спереди и сзади, 14 – справа и слева, 20 – сверху и снизу и еще 2 грани невидимые ни с одной из этих сторон. Тогда на одну грань маленького кубика уходит 162:54=3 грамма краски.
Площадь поверхности правой фигуры равна 80 единичных квадратиков: 16 граней спереди и сзади, 14 – справа и слева, 36 – сверху и снизу и еще 14 граней невидимых ни с одной из этих сторон. Тогда на нее ушло 3·80=240 граммов краски.



6. Саша забыл код от велосипедного замка, который состоит из четырех различных цифр. Он совершил четыре попытки набрать код, при этом замок не открылся.

1 попытка **2 попытка** **3 попытка** **4 попытка**

Известно, что:

1 попытка: Две из этих цифр есть в коде, но они обе находятся не на своих местах.

2 попытка: Две из этих цифр есть в коде, но они обе находятся не на своих местах.

3 попытка: Одна из этих цифр есть в коде, и она находится на своем месте.

4 попытка: Всех этих цифр нет в коде.

Найдите код.

Ответ. 5194

Формат ответа: Число

Решение. Из четвертой попытки знаем, что цифр 7, 6, 2, 8 нет в коде.

Посмотрим на первую попытку. Мы знаем, что цифр 7 и 2 точно нет в коде, а 2 цифры из первой попытки есть. Значит, в коде есть цифры 9 и 5, причем они стоят не на своих местах.

Посмотрим на вторую попытку. Цифр 7 и 8 нет в коде, значит, 4 и 9 есть и они не на своих местах.

Посмотрим на третью попытку. Так как цифр 6, 8, 2 нет в коде, то 1 есть в коде и она стоит на своем втором месте.

Из первых двух попыток мы знаем, что 9 не на первом и не на четвертом месте. На втором месте стоит 1, значит, 9 может быть только на третьем.

Осталось понять какая из цифр 5 и 4 на первом, а какая на четвертом месте. Из второй попытки 4 не на первом месте. Тогда 4 на последнем месте, а на первом — 5.

Таким образом, мы нашли код — это 5194.

7.   На школьный праздник 1 сентября пришли 240 человек: девочки, мальчики и родители. На новогоднюю елку девочек пришло столько же, мальчиков – в 3 раза меньше, а родителей – в 5 раз больше, но вместе их было также 240 человек, при этом родителей оказалось столько же сколько и детей. Сколько девочек пришло 1 сентября?

Ответ. 72
Формат ответа: Число

Решение. Родителей на новогодней елке оказалось столько же, сколько и детей, а, значит, это половина от общего количества, то есть 120. 1 сентября родителей было в 5 раз меньше, то есть 24, следовательно, остальные 216 – это дети.
Так как на новогоднюю елку девочек пришло столько же, а мальчиков – в 3 раза меньше, чем 1 сентября, то количество детей 1 сентября больше на удвоенное количество мальчиков, которые были на новогодней елке, то есть на 216-120=96, тогда количество мальчиков на новогодней елке равно 96:2=48, а девочек — 120-48=72. Такое же количество девочек пришли и 1 сентября.

8. Когда трёх сестёр спросили об их возрасте, Алина, Галина и Полина ответили:
Алина: «Мне 18 лет; я на два года моложе Галины; я на год старше Полины».
Галина: «Я не самая младшая; между мной и Полиной разница в возрасте 3 года; Полине 21 год».
Полина: «Я моложе Алины; мне 19 лет; Галина на 3 года старше Алины».
Известно, что ровно одно утверждение каждой из трёх сестёр оказалось неверным.

Сколько лет Алине?
Сколько лет Галине?
Сколько лет Полине?
Ответ. Алине 20, Галине 22, Полине 19.

Формат ответа: Алине: Число, Галине: Число, Полине: Число

Решение. Предположим, что второе утверждение Алины ложно. Тогда 2 оставшихся утверждения — правда, значит, Алине 18 лет, и она на год старше Полины, то есть Полине 17 лет. Тогда утверждение Полины, что ей 19 — ложно. Значит, 2 оставшихся — истинны. Следовательно, Галина на 3 года старше Алины и ей 21 год. Тогда второе и третье утверждение Галины — ложны, противоречие.
Тогда второе утверждение Алины истинно и Алина на 2 года моложе Галины. Следовательно, третье утверждение Полины ложно, а первые два ее утверждения истинны, то есть Полине 19 и она моложе Алины. Откуда понимаем, что Алине не может быть 18 лет, то есть первое утверждение Алины ложно, а третье — истинно и ей 20 лет. Из второго утверждения Алины понимаем, что Галине на два года больше, то есть 22 года.
Таким образом, получаем ответ: Алине 20, Галине 22, Полине 19.

Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике

для 5 класса

2024/25 учебный год

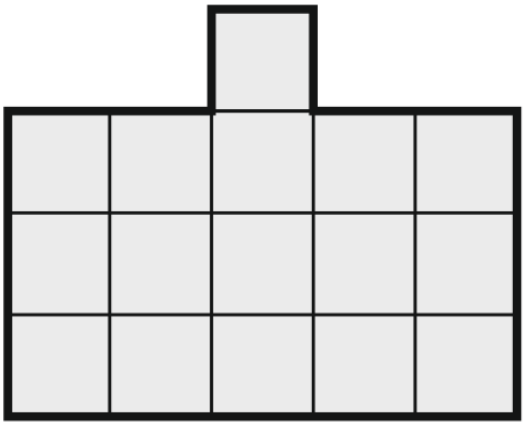
Максимальное количество баллов — 8

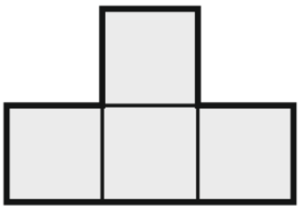
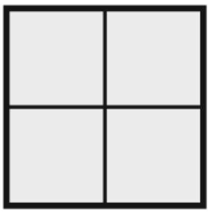
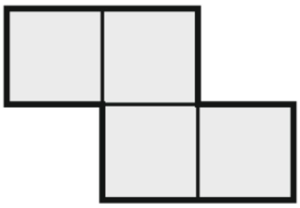
1. Возрасты трёх братьев – это различные натуральные числа. Произведение их возрастов сейчас равно 18. А через год произведение их возрастов будет равно 60. Сколько лет среднему брату сейчас?

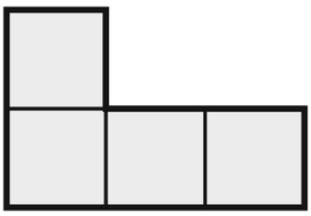
Ответ. 2 года
Формат ответа: Число

Решение. Так как произведение возрастов трёх братьев равно 18, то возраст младшего не может быть больше одного года, иначе произведение, это хотя бы $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Значит, младшему брату 1 год. А произведение возрастов среднего и старшего равно 18, это может быть $2 \cdot 9$ или $3 \cdot 6$.
Проверим оба варианта на соответствие второму условию. Если братьям 1, 2 и 9 лет, то через год произведение их возрастов станет равно $2 \cdot 3 \cdot 10 = 60$ – этот вариант подходит. А если братьям 1, 3 и 6 лет, то через год произведение их возрастов станет равно $2 \cdot 4 \cdot 7 = 56$ – этот вариант не подходит. Получаем, что среднему брату может быть только 2 года.

2. Выберите все четырехклеточные фигурки, из четырех одинаковых копий которых можно сложить фигуру, изображенную на рисунке. Фигурки можно поворачивать и переворачивать.

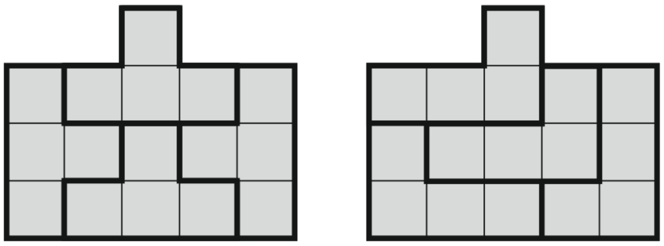


а)  б)  в) 

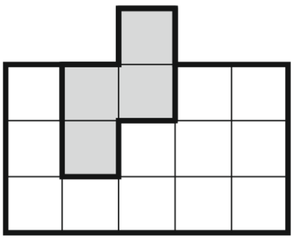
г)  д) 

Ответ. а) г)
Формат ответа: выбор нескольких вариантов

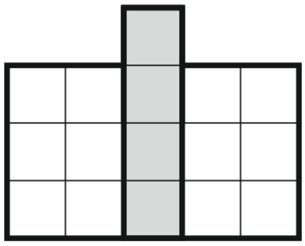
Решение. Варианты ответа а) и г) подходят, примеры разрезания показаны на рисунке.



Докажем, что нашу фигуру нельзя разрезать на фигурки вида б), в) и д).
б) Квадратом 2×2 нельзя покрыть самую верхнюю клетку.
в) Фигурка занимает верхнюю клетку одним из двух способов, они симметричны, поэтому будем считать, что она располагается так, как на рисунке. Тогда слева осталось 2 клетки рядом, их нельзя покрыть нашей фигуркой.



д) Если бы можно было разрезать на фигурки вида 1×4, то верхняя клетка была бы покрыта вертикальным прямоугольником. Тогда в оставшихся частях фигуры не поместится ни один прямоугольник 1×4.



3. Коля забыл код от велосипедного замка, который состоит из трех различных цифр. Он совершил четыре попытки набрать код, при этом замок не открылся.

Известно, что:
1 попытка: Одна из этих цифр есть в коде, и она находится на своем месте.
2 попытка: Одна из этих цифр есть в коде, но она находится не на своем месте.
3 попытка: Две из этих цифр есть в коде, но они обе находятся не на своих местах.
4 попытка: Всех этих цифр нет в коде.
Найдите код.

Ответ. 459
Формат ответа: Число

Решение. Сначала докажем, что цифры 8 нет в коде. 8 стоит на первом месте в попытке 1 и в попытке 2, то есть в обеих попытках стоит на одном и том же месте, а нам сказано, что в 1 попытке нужная цифра стоит на своем месте, а во 2 попытке — не на своем, таким образом 8 не может быть цифрой, которая есть в коде.
Из попытки 4, понимаем, что 2 тоже нет в коде. Следовательно, верная цифра в первой попытке – это 9 и она стоит на правильном месте.
В попытке 3 две цифры верные – это не 8, а 9 и 4. Эти цифры стоят не на своих местах, так как мы уже знаем, что 9 стоит на третьем месте, то цифра 4 должна стоять на первом месте.
В попытке 2 одна цифра верная, и она стоит не на своем месте. Нам осталось найти только цифру на втором месте. Значит, это цифра 5, так как 8 нет в коде, а 3 стоит на втором месте.
Таким образом, мы нашли код — 459.

4. В тетради Оли 100 страниц, девочка решила пронумеровать их по порядку. Но ей не нравилась цифра 1, поэтому она решила не использовать числа, которые содержат в своей записи эту цифру. Таким образом, на первой странице она написала 2, на второй – 3, … на восьмой – 9, на девятой – 20 и так далее. Каким числом Оля пронумеровала последнюю страницу?

Ответ. 232
Формат ответа: Число

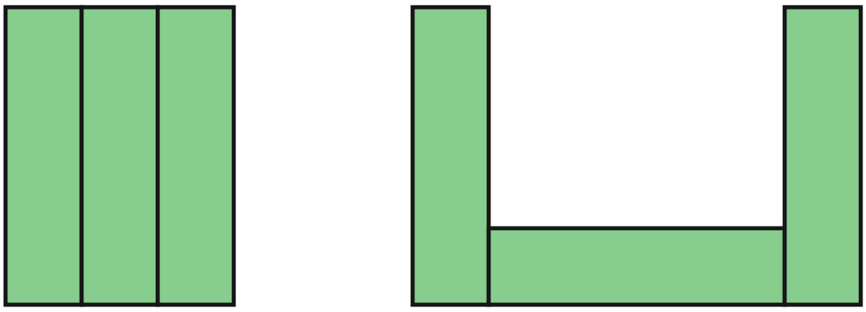
Решение. Среди чисел от 1 до 99 Оля пропустит все числа от 10 до 19, и по одному числу в каждом из оставшихся десятков – те числа, которые заканчиваются на 1: 1, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81 и 91. То есть всего среди этих чисел Оля пропустит 10+9=19 чисел. Таким образом, она пронумерует числами до 99 ровно 99-19=80 страниц. Осталось пронумеровать еще 100-80=20 страниц. Числа от 100 до 199 Оля пропустит, так как они начинаются с 1. Числами от 200 до 209, кроме 201 Оля пронумерует 9 страниц. Числа от 210 до 219 она пропустит, так как в их записи есть 1. Числами от 220 до 229, кроме 221 Оля также пронумерует 9 страниц. Остается пронумеровать еще 2 страницы – это 230 и 232, так как число 231 Оля пропустит. Таким образом, последняя страница пронумерована числом 232.

5. В школе учатся 1200 детей. У каждого ребенка 5 уроков каждый день. Каждый учитель ежедневно ведет ровно 4 урока, а на каждый урок ходит ровно 30 детей. Сколько учителей работает в школе?

Ответ. 50
Формат ответа: Число

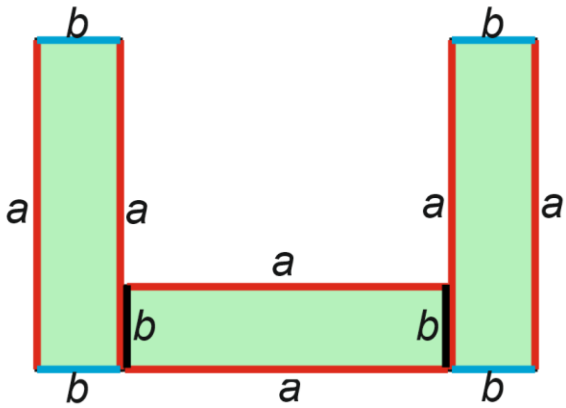
Решение. Общее количество посещений уроков, на которые ходят 1200 детей за один день равно 1200·5=6000 посещений. На каждом уроке ровно 30 детей, значит, в школе проводится 6000:30=200 уроков в день. Каждый учитель ежедневно проводит по 4 урока, тогда количество учителей равно 200:4=50.

6. Две фигуры составлены из шести одинаковых прямоугольников. Периметр фигуры слева равен 52 см, а фигуры справа – 92 см. Найдите площадь одного прямоугольника. Ответ выразите в квадратных сантиметрах.



Ответ. 56 см^2
Формат ответа: Число

Решение. Обозначим длинную сторону прямоугольника за a, а короткую – за b. Тогда периметр левой фигуры равен $2a+6b=52$ см. А периметр правой фигуры равен $6a+4b-2b=6a+2b=92$ см (6 красных сторон a плюс 4 синие стороны b и минус 2 черные стороны b на рисунке). Разделим оба выражения на 2, получим, что $a+3b=26$, $3a+b=46$.
Сложив эти два равенства, получим, $4a+4b=26+46=72$, то есть $a+b=18$.
Из равенства $a+3b=26$ вычтем равенство $a+b=18$, получим, $2b=8$, тогда $b=4$, а $a=18-4=14$.
Площадь одного прямоугольника равна $a\cdot b=4\cdot 14=56$ см^2.

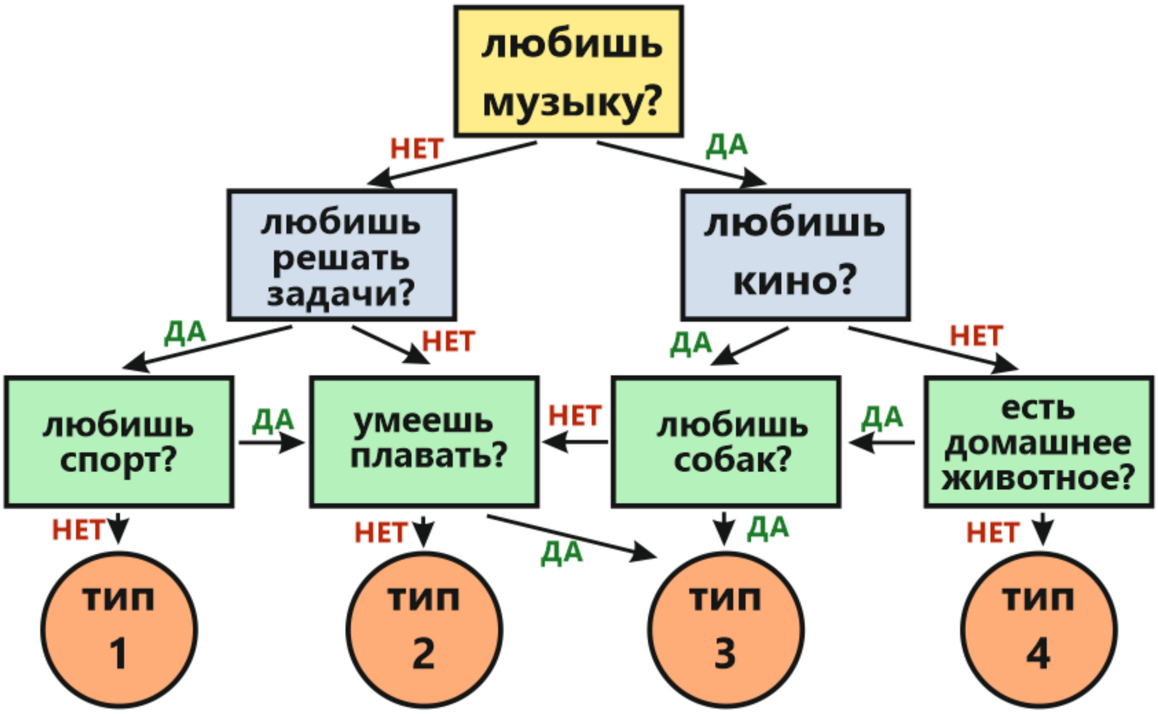


7. Из деревни в город с постоянной скоростью выехал грузовик. Когда он проехал 42 км, из деревни по той же дороге с постоянной скоростью выехал автомобиль. Когда автомобиль проехал 30 км, грузовик находился на расстоянии 65 км от деревни. Найдите расстояние от деревни до города, если в город грузовик и автомобиль приехали одновременно. Ответ выразите в километрах.

Ответ. 180 км
Формат ответа: Число

Решение. За промежуток времени, за который автомобиль проехал 30 км, грузовик проехал 65-42=23 км. То есть расстояние между ними сократилось на 30-23=7 км за один такой промежуток времени.
В момент, когда автомобиль выезжал из города, расстояние между автомобилем и грузовиком 42 км, они сближаются на 7 км за один промежуток времени. Так как они приехали в город одновременно, прошло 42:7=6 таких промежутков времени.
Так как автомобиль за один промежуток времени проезжает 30 км, а всего промежутков 6, то расстояние между городом и деревней равно $30\cdot 6=180$ км.

8.1 Четыре человека Витя, Митя, Петя и Катя прошли тест о предпочтениях, приведенный на картинке. Все они получили разные результаты.



Витя: Я люблю собак, у меня есть бульдог, но я не отношусь к третьему типу.
Митя: Я люблю решать задачи.
Петя: Я люблю кино.
Катя: Все хорошо плавают, кроме меня.
Все участники диалога говорят честно. Кто к какому типу относится?

Ответ. Витя – тип 1, Митя – тип 4, Петя – тип 3, Катя – тип 2.
Формат ответа: выбор из четырех ответов
Витя: тип 1, тип 2, тип 3, тип 4
Митя: тип 1, тип 2, тип 3, тип 4
Петя: тип 1, тип 2, тип 3, тип 4
Катя: тип 1, тип 2, тип 3, тип 4

Решение. Все участники получили разные результаты, значит, кто-то из них типа 2. Это может быть только Катя, так как все хорошо плавают, кроме нее (по ее словам), а тип 2 может получить только тот, кто не умеет плавать.
Теперь поймем кто Витя. По его словам, он не тип 3, у него есть бульдог, значит, он не тип 4, а также он не тип 2, потому что тип 2 — это Катя. Следовательно, Витя — тип 1.
Теперь поймем кто Петя. Остается только тип 3 и 4, но Петя любит кино, тогда он не сможет попасть по стрелкам в кружок тип 4. Значит, Петя тип 3. А Митя тогда является типом 4.

Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике
для 6 класса
2024/2025 учебный год
Максимальное количество баллов — 8

Задача 1

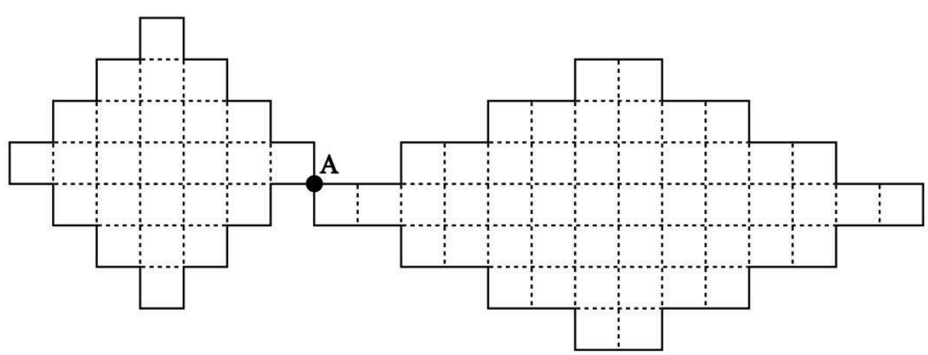
Два арбуза, дыня и четыре нектарина стоят 1000 рублей, а арбуз, две дыни и два нектарина — на 50 рублей дешевле. Сколько стоит набор из арбуза, дыни и двух нектаринов? Ответ выразите в рублях.

Ответ: 650 рублей.

Решение. Из условия получаем, что арбуз, две дыни и два нектарина стоят 950 рублей. Известно, что два арбуза, дыня и четыре нектарина стоят 1000 рублей. Складывая, получаем, что три арбуза, три дыни и шесть нектаринов стоят 1950 рублей, делим на 3 и выясняем, что арбуз, дыня и два нектарина стоят 650 рублей.

Задача 2

Персонаж Ральф живет в компьютерной игре, поэтому озера в его мире имеют форму клетчатых фигур, показанных на рисунке. Каждое утро Ральф идет на пробежку вдоль берега одного из двух озер: начинает в точке A, бежит с постоянной скоростью и заканчивает, когда вновь оказывается в A. Известно, что озеро размером в одну клетку персонаж обежал бы за 2 минуты. На сколько минут одна пробежка Ральфа длится дольше другой?



Ответ: 7.

Решение. Вдоль одной клетки Ральф пробегает за 2 мин = 120 секунд, следовательно, вдоль одной стороны клетки — за 120 : 4=30 секунд. Выясним, на сколько периметр второго озера больше, чем первого. Наборы вертикальных отрезков в озерах совпадают, а каждый горизонтальный отрезок в фигуре справа на 1 длиннее, чем в фигуре слева. Поэтому периметр второй фигуры больше на 7*2=14 (у фигуры в верхней и в нижней частях по 7 горизонтальных отрезков). Значит, на вторую пробежку Ральф потратит на 14*30 секунд, то есть на 7 минут больше.

Задача 3

По кругу расставлены шестьдесят горшков. В каждом из горшков сидит хотя бы одна лягушка, и в любых трех стоящих подряд горшках суммарно сидит ровно четыре лягушки. Сколькими способами цапля Анастасия сможет выбрать два горшка так, чтобы в них суммарно оказалось ровно три лягушки?

Ответ: 800.

Решение. Если в любых трех подряд идущих горшках сидит суммарно ровно четыре лягушки, и при этом (по условию) ни один из горшков не пустует, то единственное возможное расположение лягушек в горшках – это расположение, при котором в каждом третьем горшке сидит по две лягушки, а в остальных горшках сидит по одной лягушке, то есть 112112112112…, расставленные по кругу, где числа обозначают количество лягушек в одном горшке. Таким образом, ровно в двадцати горшках из шестидесяти сидит по две лягушки, а в остальных сорока сидит по одной лягушке. Чтобы в двух из этих горшков суммарно оказалось ровно три лягушки, нужно взять один горшок, в котором одна лягушка, и один горшок, в котором две лягушки. Всего способов выбрать такие два горшка – 20×40 = 800 способов, – это и есть ответ.

Задача 4

Аделина, Эвелина и Паулина писали олимпиаду по математике, где за каждую задачу можно было получить некоторое целое неотрицательное количество баллов. После объявления итогов выяснилось, что Аделина и Эвелина показали одинаковый результат, а сумма их баллов больше 15. Сумма баллов всех трех девочек оказалась меньше 60 и в $3\frac{1}{3}$ раза больше, чем набрала Паулина. Сколько баллов на олимпиаде набрала Аделина?

Ответ: 14.

Решение. По условию А = Э. Посчитаем сумму всех баллов двумя способами:
$2А + П = П * 10/3 < 60$, $2А = П * 7/3 < 60 * 7 / 10 = 42$, $X = П * 7/3 = 2А$, что по условию больше 15, а раз П, А - целые, то X - четное, кратное 7, большее 15 и меньшее 42. Под эти условия подходит единственное число 28 = 2А. Отсюда, А = 14.

Задача 5

В футбольном турнире принимали участие 35 команд, среди которых команды “Белка” и “Стрелка”. Правила футбольного турнира следующие: каждая команда играет с каждой по одному разу, в каждом матче победившая команда получает 3 очка, проигравшая – 0 очков, а в случае ничьей обе команды получают по 1 очку. По результатам турнира команда “Белка” набрала 100 очков, а команда “Стрелка” со всеми командами сыграла вничью. А какая наибольшая сумма очков могла быть у команды, занявшей второе место по результатам турнира?

Ответ: 97.

Решение: Команда “Белка”, которая набрала 100 очков, могла набрать их только одним единственным способом – если она выиграла у тридцати трех команд и сыграла вничью с оставшейся тридцать четвертой. Именно “Белка” и заняла первое место в турнире – больше нее набрать никто не мог, так как больше могла набрать только команда, которая бы у всех выиграла, но таких команд быть не могло, потому что у “Белки” не выиграл никто. Мы знаем, что команда “Стрелка” со всеми сыграла вничью – а значит, это именно она сыграла с “Белкой” вничью, а все остальные команды “Белке” проиграли. Это значит, что команда, занявшая второе место, в любом случае проиграла “Белке” и сыграла вничью со “Стрелкой”; наибольшее возможное количество очков у нее было бы, если бы у всех остальных команд она выиграла. В этом случае она получила бы $32 \times 3 + 1 = 97$ очков. Это и есть ответ.

Задача 6

По кругу стоят N человек, пронумерованных по часовой стрелке от 1 до N. Первый, третий, пятый и так далее до конца нумерации сказали: “Мой сосед слева - рыцарь”. Второй, четвертый, шестой и так далее до конца нумерации сказали: “Мой сосед слева - лжец”. Чему может быть равно число N? (Соседом слева называется следующий по часовой стрелке человек.) Выберите все возможные варианты из предложенных:

21

32

43

54

Ответ: 21, 32.

Решение. Заметим, что слева от нечетного человека стоит человек того же вида, а от четного — противоположного. Значит первый и второй будут одного вида, а третий и четвертый — противоположного. Аналогично можно рассуждать для четверки с третьего до шестого человека. Значит круг выглядит как-то так: РРЛЛРРЛЛ… Посмотрим что происходит на стыке. Если N четно, то первый и последний разных видов, значит пары рыцарей чередуются с парами лжецов, следовательно N кратно четырем. Если N нечетно, то первый и последний одного вида, следовательно N имеет вид $4k+1$.

Задача 7

На каждом шаге к исходному числу можно прибавить единицу или удвоить его. За какое наименьшее число шагов из числа 1 можно получить число 51?

Ответ: 8.

Решение. Пример получения за 8 шагов: 1-2-3-6-12-24-25-50-51. Покажем, что за 7 шагов этого сделать невозможно. Для получения числа 51 последним шагом может быть только 50-51, а первый шаг не зависит от выбора операции. Предположим, что из 2 получили 50 за 5 шагов. Среди этих шагов должна присутствовать первая операция. Иначе за пять шагов получим число $2^6 = 64$. Заметим, что если к числу n применяется сначала первая операция, а затем вторая, то получим число 2n+2. Если наоборот, то 2n+1. Кроме того, в первом случае получается число большее, чем во втором: 2n+2 > 2n+1. Значит, даже если первая операция только одна и выполняется первой, за пять шагов получим: 2-3-6-12-24-48, число 48 меньше, чем 50.

Задача 8

Сколько существует чисел, в 23 раза больших своего наименьшего собственного делителя? (Делитель собственный — если он больше 1, но меньше самого числа).

Ответ: 9.

Решение. Наименьший собственный делитель является простым. Числа представляются в виде 23p, где p — простое, не превосходящее 23. Таких простых чисел 9.

Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике
для 7 класса
2024/25 учебный год
Максимальное количество баллов — 8

Задача 1.
Несколько мальчиков купили в магазине по 5 пачек печенья, а экономная девочка Таня купила меньше. В каждой пачке по 12 печений. У всех детей вместе оказалось 396 печений. Сколько пачек печенья купила Таня?

Ответ: 3.
Решение. Общее количество пачек печенья равно 396 : 12 = 33. Если из всех пачек вычесть Танины, останутся только пачки мальчиков, поэтому их количество делится на 5. Кроме того, количество пачек Тани меньше 5 по условию. Значит, количество пачек у Тани равно остатку при делении 33 на 5, то есть 3.

Задача 2.
Четыре числа *a*, *b*, *c* и *d* таковы, что верна пропорция $\frac{a-b}{c-d} = \frac{a+b}{c+d}$ и *ad* = 60. Найдите произведение всех четырех чисел.

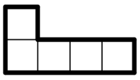
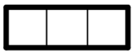
Ответ: 3600.
Решение. По свойству пропорции $(a - b)(c + d) = (a + b)(c - d)$. После упрощения получаем: $ad - bc = bc - ad$, то есть $ad = bc,\ abcd = 60^2 = 3600$.

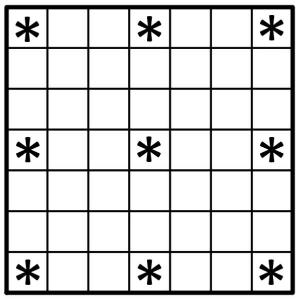
Задача 3.
Андрей, Борис и Виктор хотели позавтракать пончиками. Оказалось, что Андрею не хватает 50 рублей для покупки трех пончиков, Борису – 25 рублей на два пончика, а Виктору – 13 рублей на один пончик. Тогда они сложили свои деньги, и выяснилось, что у них 500 рублей на всех. Сколько стоит пончик?

Ответ: 98.
Решение. Пусть один пончик стоит *x* рублей. Тогда у Андрея $3x - 50$ рублей, у Бориса $2x - 25$ рублей, у Виктора $x - 13$ рублей. По условию $3x - 50 + 2x - 25 + x - 13 = 500$, то есть $6x = 588,\ x = 98$. Значит, один пончик стоит 98 рублей.

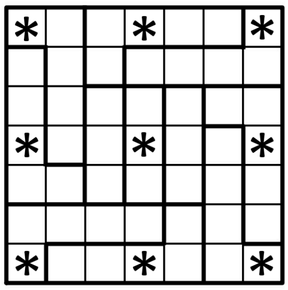
Задача 4.
При нажатии на кнопку этажа в лифте 23-этажного дома кнопка загорается, а при повторном нажатии - гаснет. В лифт зашли Вася, Коля и Петя. Вася нажал на 12 различных кнопок, Коля - на 14, и Петя - на 19. Изначально ни одна кнопка не горела. В результате все кнопки загорелись. Сколько кнопок были нажаты трижды?

Ответ: 11.
Решение. Каждый мальчик нажимал разные кнопки, поэтому каждая кнопка была нажата не более трех раз. Отменим последнее нажатие каждой кнопки. Останется 12+14+19-23=22 нажатия, при этом каждая кнопка была нажата четное количество раз, но не больше двух. Значит, ровно 11 кнопок были нажаты дважды, а именно они в исходной ситуации были нажаты трижды.

Задача 5.
Квадрат 7*7, показанный на рисунке, разрезан без остатка по линиям клеток на фигурки вида  и . Найдите максимально возможное количество пятиклеточных фигурок, содержащих звездочки (одну или больше). Фигурки можно поворачивать и переворачивать.



Ответ: 8.
Решение. Площадь квадрата 7*7 равна 49. Это число не делится на 5, так что обойтись только пятиклеточными фигурками не удастся. Так как 49-45=4 не делится на 3, то не может быть ровно 9 пятиклеточных фигурок. Заметим, что 49=40+9, так что теоретически возможен вариант, в котором окажется 8=40:5 пятиклеточных фигурок и 3=9:3 трехклеточных. Тогда наибольшее количество пятиклеточных фигурок, содержащих звездочки, не может быть больше 8. Тем не менее, существует пример, когда их ровно 8.



Задача 6.
На балу присутствует не более 60 человек. Они танцуют в парах (один мужчина и одна женщина). В настоящий момент танцуют $\frac{3}{4}$ всех мужчин и $\frac{4}{5}$ всех женщин. Сколько людей присутствует на балу?

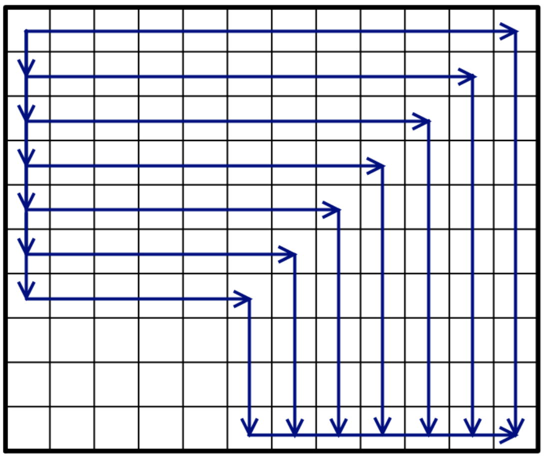
Ответ: 31.
Решение. Пусть мужчин m, а женщин g. Тогда $\frac{3}{4}m = \frac{4}{5}g$. Откуда 15m=16g. Следовательно, m кратно 16, а g кратно 15, то есть m=16k, g=15k. Всего людей, значит, 15k+16k=31k. Откуда $k \leq 1$. То есть k=1. Таким образом, всего людей 31.

Задача 7.
Среди трех друзей один выше всех по росту, другой старше всех, а третий - самый хитрый. Самый высокий всегда говорит правду, самый старший всегда лжёт, а самый хитрый может иногда говорить правду, а иногда лгать. И Петя, и Вася сказали: «Я - самый хитрый!», а Алеша добавил: «Петя выше самого старшего из нас». Кто из ребят старше всех?

Ответ: Вася.
Решение. Самый высокий не мог сказать, что он самый хитрый. Поэтому самый высокий - Алеша. Он сказал правду, значит, Петя - не самый старший, то есть он - самый хитрый, а самый старший - Вася.

Задача 8.
В левой верхней клетке прямоугольной клетчатой поляны 10*12 сидят 7 жуков. За один ход один из жуков переползает на одну клетку вправо или на одну клетку вниз. Через несколько ходов все жуки собрались в правой нижней клетке. Каким может быть наименьшее количество клеток, не посещенных ни одним жуком?

Ответ: 15.
Решение. Рассмотрим диагонали, идущие снизу-слева вверх-вправо. Каждую из них каждый жук пересечет ровно один раз. Их длины: 1, 2, …, 9, 10, 10, 10, 9, …, 1, где чисел, равных 10, 3 штуки. Поэтому на них, начиная с диагонали длины 7+1, останутся не посещенными минимум 1, 2, 3, 3, 3, 2, 1 клетки. Сумма этих чисел равна 15. Пример легко строится. Первый жук ползет направо до конца, потом вниз до конца. Второй сначала сползает на вторую сверху горизонталь, потом ползет вправо до предпоследней вертикали, спускается вниз до конца, и ползет направо, и так далее. Пути жуков показаны на картинке.



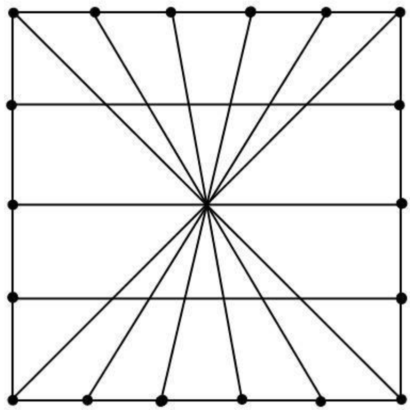
Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике

для 8 класса

2024/25 учебный год

Максимальное количество баллов — 8

1. Аня нарисовала на плоскости квадрат и поделила верхнюю и нижнюю его стороны на 9 равных частей каждую. Затем она провела 10 прямых, соединяющих самую левую верхнюю точку с самой правой нижней, вторую слева верхнюю точку со второй справа нижней, и так далее. После этого она поделила правую и левую стороны каждую на 8 равных частей и провела 7 горизонтальных прямых через точки деления. (На рисунке показан пример, когда сначала она провела 6 прямых сверху вниз, а затем 3 горизонтальных). На сколько частей эти прямые поделили квадрат?



Решение. 10 прямых сверху вниз поделили квадрат на $9 + 9 + 2$ частей. Затем каждая горизонтальная прямая, кроме той, что проведена посередине, делит на две 9 частей (либо сверху, либо снизу) и еще две (одну справа и одну слева). Таких делений 6. Каждое из них прибавляет $9 + 2 = 11$ частей. Средняя горизонтальная прямая делит две части каждую на две (то есть, прибавляет две части). Итого: $20 + 11 \cdot 6 + 2 = 88$.

Ответ. 88.

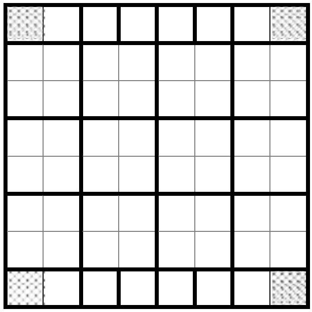
2. Однажды утром 10 января Кот в сапогах обнаружил, что его вес стал на 20% больше, чем был до новогодних праздников. Чтобы восстановить в форму, Кот в сапогах сел на диету, и вскоре обнаружил, что его вес уменьшился на 20% по сравнению с весом 10 января, и на 224 грамма по сравнению с весом до новогодних праздников. Сколько весил Кот в сапогах до новогодних праздников? В ответ запишите только число – вес Кота в сапогах до новогодних праздников в килограммах.

Решение. Обозначим вес Кота в сапогах до новогодних праздников за x. Тогда его вес 10 января составлял $1{,}2x$, поскольку 120% от числа - это $120 : 100 = 1{,}2$ части от целого. Аналогично, после уменьшения веса на 20%, он стал равняться $1{,}2x \cdot 0{,}8 = 0{,}96x$. Этот вес на 224 грамма меньше изначального, то есть x. Значит, $x - 0{,}96x = 224$ грамма, то есть

$0{,}04x = 224$ грамма, откуда $x = 5600$ граммов, то есть 5,6 килограммов. Это и есть ответ.

Ответ. 5,6.

3. Из клетчатого квадрата 8×8 вырезали часть угловых клеток, а оставшуюся фигуру разбили на квадраты со сторонами 1 и 2 так, чтобы квадратов каждого типа получилось поровну. Сколько клеток могло быть вырезано?



Решение. Пусть имеется k квадратов со стороной 1 и k квадратов со стороной 2. Тогда общая площадь, которую занимают эти фигуры, составляет $k + 4 \cdot k = 5 \cdot k$. Значит, площадь должна делиться на 5. Поскольку площадь исходного квадрата равна 4, а вырезали не более 4 клеток, то разность будет делиться на 5 только если вырезали 4 клетки. Покажем, что фигура с удаленными угловыми клетками условию удовлетворяет. Пример справа.

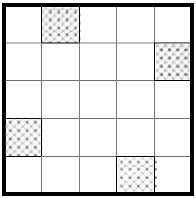
4. В кошельке лежит 1000 рублей одно-, двух- и пятирублёвыми монетами. Известно, что общее число монет равно 300, и что монет каких-то двух достоинств равное количество. Найдите это количество.

Решение. Пусть у нас x, y и z рублёвых, двухрублёвых и пятирублёвых монет соответственно. По условию $x + y + z = 300$, $x + 2y + 5z = 1000$. Допустим, $x = y$. Тогда $z = 300 - 2x$, откуда $x + 2x = 1000 - 5(300 - 2x)$, то есть $7x = 500$, что невозможно, так как 500 не делится на 7.

Допустим, $x = z$. Тогда $y = 300 - 2x$, откуда $x + 5x = 1000 - 2(300 - 2x)$, то есть $2x = 400$, $x = 200 = z$. Но тогда монет больше 300, что противоречит условию задачи.

Значит, $y = z$. Тогда $x = 300 - 2y$, откуда $300 - 2y = 1000 - 2y - 5y$, то есть $5y = 700$ и $y = z = 140$, $x = 20$.

Ответ. 140.



5. Сколько клеточных прямоугольников, содержащих хотя бы одну закрашенную клетку, изображено на рисунке? Любой квадрат (в частности, сам квадрат 5×5) является прямоугольником.

Решение. Способов выбрать горизонтальные линии (столько же, сколько и вертикальных) $\frac{6\cdot5}{2} = 15$. Таким образом, квадрат 5×5 содержит $15 \cdot 15 = 225$ прямоугольников.

Из них не содержат закрашенные клетки 21 квадрат 1×1, 28 прямоугольников 1×2, 18 прямоугольников 1×3, 8 прямоугольников 1×4, 2 прямоугольника 1×5, 8 квадратов 2×2, 8 прямоугольников 2×3, 4 прямоугольника 2×4, 1 квадрат 3×3. Значит, число прямоугольников, содержащих хотя бы одну закрашенную клетку, равно $225 - 21 - 28 - 18 - 8 - 2 - 8 - 8 - 4 - 1 = 127$ прямоугольников.

Ответ. 127.

6. В соревновании по настольному теннису участвовало ровно 50 ребят, среди которых половина рыцари, всегда говорящие правду, и половина - лжецы, которые всегда лгут. По правилам турнира проигравший выбывал. В результате после нескольких игр ровно половина ребят выбыла. После этого событий каждый из оставшихся участников заявил, что выиграл ровно у одного рыцаря. Какое наибольшее количество рыцарей могло остаться участниками турнира?

Решение. Каждый из оставшихся рыцарей выиграл ровно у одного рыцаря. Поэтому оставшихся рыцарей не больше, чем выбывших, то есть удвоенное количество оставшихся рыцарей не больше 25, следовательно, их не больше 12. Пример: один из рыцарей выигрывает у другого, затем половина оставшихся рыцарей выигрывает у одного из оставшихся, включая того, который выиграл у первого рыцаря (сначала 2-й рыцарь выиграет у 1-го, потом 3-й у 2-го, 5-й у 4-го и т. д. 25-й у 24-го), а среди 25 лжецов, например, один выиграет по очереди у 12 других лжецов.

Ответ. 12.

7. Даша нарисовала прямоугольник с целыми сторонами. Катя нарисовала свой прямоугольник, уменьшив длину Дашиного на 2 и увеличив ширину на 3. Таня тоже нарисовала свой прямоугольник, уменьшив длину Дашиного на 3 и увеличив ширину на 5. Оказалось, что площади прямоугольников Кати и Тани равны. Выберите из приведенных чисел те, которые могли быть периметром прямоугольника Даши.

- 50
- 52
- 54
- 100
- 206

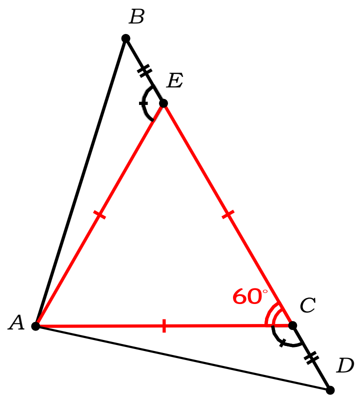
Решение. Пусть Дашин прямоугольник имел длину x и ширину y. Тогда площади Катиного и Таниного прямоугольников равны, соответственно, $(x-2)(y+3)$ и $(x-3)(y+5)$.

Приравняв эти два выражения, получим $xy-2y+3x-6 = xy-3y+5x-15$, откуда $y = 2x-9$. Тогда периметр Дашиного прямоугольника равен $2x+2y = 6x-18 = 6(x-3)$. Это число кратно 6. Из приведенных чисел подходит только 54. Если $6x-18 = 54$, то $x = 12$. Тогда $y = 2x-9 = 15$.

Ответ. 54.

8. Угол C треугольника ABC равен 60°. На продолжении стороны BC за точку C выбрана точка D так, что $DC + CA = BC$. Известно, что $AB = 8$. Найдите длину AD.

Решение. На стороне CB отметим точку E так, что $CE = CA$. Тогда треугольник ACE равносторонний, а $EB = DC$. Тогда заметим, что треугольник AEB равен треугольнику ADC (поскольку $\angle AEB = \angle ACD = 120^\circ$, $BE = CD$, $AE = AC$). Тогда $AD = 8$.



Ответ. 8.

Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике для 9 класса, 2024–2025 учебный год

1. В актовом зале расставили 25 рядов по 10 стульев в каждом из них. Стулья пронумерованы: сначала от 1 до 10 в первом ряду, потом от 11 до 20 во втором ряду и так далее. Зрителям выдали билеты на спектакль с указанием номера стула. В перерыве решили сделать 25 рядов по 13 стульев в каждом и пронумеровать: сначала от 1 до 13 в первом ряду, потом от 14 до 26 во втором и так далее; зрители сели по указанным в билете номерам. Сколько зрителей теперь оказались в том же ряду, что первоначально?

Ответ. 22.

Решение. Количество мест в ряду увеличилось на 3, поэтому в первом ряду останутся все 10 зрителей, которые там сидели.

Во втором ряду останутся все, кроме трёх пересевших в первый ряд, — то есть 7 зрителей.

Из третьего ряда вперёд пересядут 6 зрителей: во втором ряду, как мы уже знаем, остались 7 зрителей, поэтому для зрителей из следующих рядов осталось $13-7=6$ мест, то есть останутся $10-6=4$ зрителя.

Из четвёртого ряда вперёд пересядет 9 зрителей (так как в третьем ряду остались 4 зрителя, остались $13-4=9$ мест для зрителей из следующих рядов), останется $10-9=1$ зритель. Заметим, что теперь в четвёртом ряду осталось $13-1=12>10$ мест для зрителей из следующих рядов, поэтому в пятом и последующих рядах все зрители будут перемещаться хотя бы на один ряд вперёд.

Значит, общее число зрителей, оставшихся в своём ряду, равно $10+7+4+1=22$.

2. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка E. Известно, что $\angle EBC=25^\circ$, $\angle BCA=32^\circ$, $\angle BAC=60^\circ$. Точка D на плоскости такова, что $AD \parallel BE$. Какое наименьшее значение может принимать величина угла $\angle DAB$? Ответ выразите в градусах.

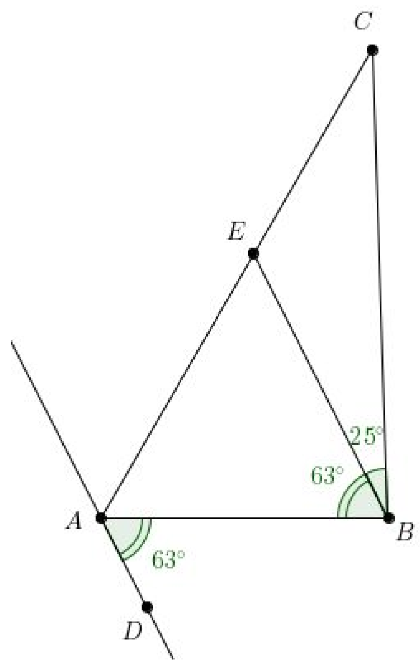
Ответ. 63.

Решение. Так как

$$\angle ABC = 180^\circ - (\angle BAC + \angle BCA) = 180^\circ - (60^\circ + 32^\circ) = 88^\circ,$$

то

$$\angle ABE = \angle ABC - \angle EBC = 88^\circ - 25^\circ = 63^\circ.$$



Проведём прямую $\ell \parallel BE$ — на ней лежит точка D из условия.

Если точка D в той же полуплоскости относительно прямой AC, что и точка B, то $\angle DAB = \angle ABE = 63^\circ$ (накрест лежащие при параллельных прямых AD и BE и секущей AB).

Если точка D в другой полуплоскости относительно прямой AC, нежели точка B, то $\angle DAB = 180^\circ - \angle ABE = 117^\circ$ (внутренние односторонние углы при прямых AD и BE и секущей AB). Из найденных двух значений (63° и 117°) наименьшее значение равно 63°.

3. Жора задумал три натуральных числа a, b, c. Чему могут равняться $a+b$, $b+c$ и $c+a$?
a) 102, 201, 300
b) 201, 302, 403,
c) 201, 303, 606,
d) 302, 305, 507,
e) 301, 403, 505.

Ответ. b) и d)

Решение. Пусть $a+b=x$, $b+c=y$ и $c+a=z$ (для определённости $x \leqslant y \leqslant z$). Сложим эти равенства: $(a+b)+(b+c)+(c+a)=x+y+z$, откуда $x+y+z=2(a+b+c)$ — чётное число (условие 1).

Далее заметим, что $a+b+c=\frac{1}{2}(x+y+z)$. Отсюда

$$a=a+b+c-(b+c)=\frac{1}{2}(x+y+z)-y=\frac{1}{2}(x-y+z).$$

Аналогично

$$b=\frac{1}{2}(x+y-z) \quad \text{и} \quad c=\frac{1}{2}(y+z-x).$$

Так как a натуральное, то $\frac{1}{2}(x-y+z)>0$, откуда $x+z>y$. Аналогично $x+y>z$ и $y+z>x$: т.е. заданные в условии задачи суммы должны соответствовать и такому условию — сумма любых двух из них больше третьей (условие 2).

Теперь можем найти ответ:
a) Не выполняется условие 1.
b) Подходит тройка $(151, 50, 252)$.
c) Не выполняется условие 2: $201+303<606$.
d) Подходит тройка $(252, 50, 255)$.
e) Не выполняется условие 1.

4. В турнире по боксу принимают участие 27 человек. Правила турнира таковы, что матч обязательно заканчивается победой одного из участников (т.е. ничьих не бывает). Турнир на выбывание: проигравший в каком-то поединке участник выбывает и больше не принимает участие в соревнованиях. По окончании турнира выяснилось, что N участников провели на ринге не менее 4 матчей. При каком наибольшем N такое возможно?

Ответ. 8.

Решение. Для начала докажем, что больше 8 таких участников быть не могло. Для начала вспомним, что если участников 27, то в турнире на вылет будет ровно 26 матчей: каждый матч выбывает ровно один участник, в начале их 27, а остаться должен ровно 1. Это значит, что побед у различных участников также было 26.

Если участник проводит на ринге не менее 4 матчей, то по крайней мере 3 из них он должен выиграть. Если бы таких участников было хотя бы 9, то всего побед было бы хотя бы 27, что неправда. Значит, участников, которые провели на ринге не менее 4 матчей, не более 8.

Теперь докажем, что 8 таких участников в турнире быть могло. Для этого достаточно привести один пример такого турнира. Пронумеруем всех участников от 1 до 27 и

- участник 1 обыгрывает участников 27, 26, 25 и проигрывает участнику 2;
- участник 2 обыгрывает участников 24, 23 (и 1) и проигрывает участнику 3;
- участник 3 обыгрывает участников 22, 21 (и 2) и проигрывает участнику 4;
- ...
- участник 7 обыгрывает участников 14, 13 (и 6) и проигрывает участнику 8;
- участник 8 обыгрывает участников 12, 11, 10, 9 (и 7).

5. Саша и Юра задумали по числу от 1 до 10, после чего Саша заявил: «Неважно, какое число ты задумал, в произведении наших чисел нет цифры 6», на что Юра ответил: «Тогда сумма наших чисел равна 14». Саша и Юра не ошибаются. Какое число задумал Юра?

Ответ. 9.

Решение. Докажем, что Саша задумал 5. Это число подходит, так как при умножении числа 5 на любое число от 1 до 10 результат не содержит цифры 6. Осталось для каждого остального числа показать, какое число мог задумать Юра, чтобы в произведении чисел Саши и Юры была цифра 6.

Если Саша задумал,	1	2	3	4	6	7	8	9	10
то Юра мог задумать	6	3	2	4	1	9	2	4	6
Тогда произведение	6	6	6	16	6	63	16	36	60

Таким образом, Саша задумал 5. Тогда Юра задумал $14 - 5 = 9$.

6. Баба Яга готовит зелье. Рецепт подразумевает, что в зелье должны попасть:

- не более 5 лягушек (возможно, 0);
- чётное число волчьих зубов (возможно, 0);
- кратное шести число драконьих чешуек (возможно, 0);
- ровно 2025 ингредиентов.

Сколькими способами Баба Яга может приготовить зелье? Порядок добавления ингредиентов неважен.

Ответ. 1013.

Решение. Заметим, что всего ингредиентов — нечётное количество, а волчьих зубов и драконьих чешуек должно быть чётное количество. Значит, лягушек должно быть нечётное количество.

1 Если лягушка одна, то на волчьи зубы и драконьи чешуйки приходится 2024 слота. Заметим, что выбрав количество драконьих чешуек (их может быть от $0 \cdot 6$ до $337 \cdot 6 = 2022$ — 338 вариантов), остаток точно удастся заполнить волчьими зубами. Значит, в этом случае всего 338 вариантов.

3 Если лягушек три, то аналогично предыдущему, здесь всего 338 вариантов.

5 Если лягушек пять, то аналогично предыдущему, здесь всего 337 вариантов.

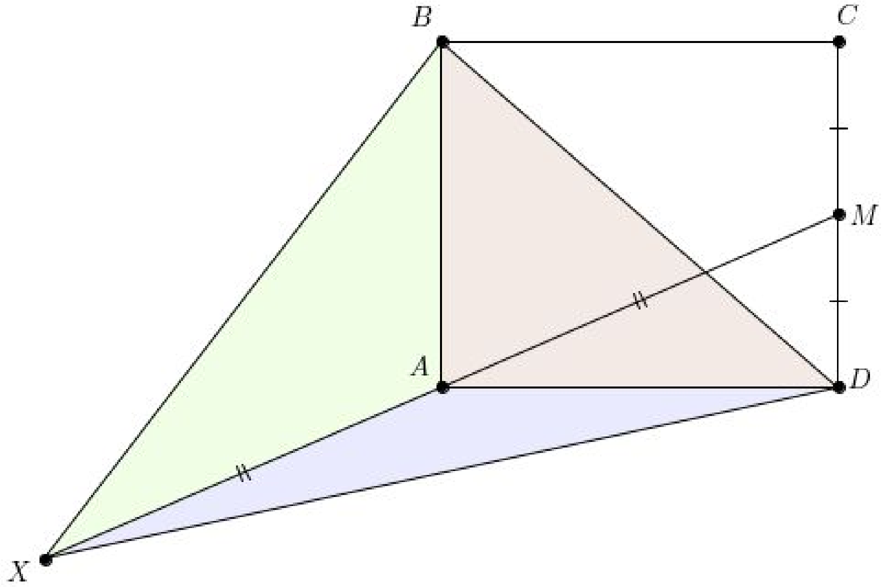
Итак, всего вариантов $338 + 338 + 337 = 1013$.

7. Длины сторон AB и AD прямоугольника $ABCD$ равны 20 и 23 соответственно. Пусть M — середина стороны CD и пусть X — такая точка на плоскости, что A — середина отрезка XM. Найдите площадь треугольника XBD.

Ответ. 575.

Решение. Будем пользоваться такими фактами.

1. Площадь треугольника, одна сторона которого совпадает со стороной прямоугольника, а ещё одна вершина лежит на противоположной стороне, равна половине площади прямоугольника. Если прямоугольник со сторонами a и b, то его площадь равна ab, а площадь «вписанного» треугольника равна $\frac{1}{2}ab$.
2. Медиана делит треугольник на два треугольника равной площади. Действительно, середина стороны разбивает отрезок на две равные стороны в этих треугольниках, а опущенная на эти стороны высота одна и та же.



Пусть площадь $ABCD$ равна S. Тогда

$$S_{XAB} = S_{ABM} = \frac{1}{2}S,$$
$$S_{XAD} = S_{ADM} = \frac{1}{2}AD \cdot DM = \frac{1}{2}AD \cdot \frac{1}{2}CD = \frac{1}{4}AD \cdot CD = \frac{1}{4}S,$$
$$S_{BAD} = \frac{1}{2}S.$$

Отсюда

$$S_{XBD} = S_{XAB} + S_{XAD} + S_{BAD} = \frac{1}{2}S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{2}S = \frac{5}{4}S.$$

Так как $S = 20 \cdot 23 = 460$, то $S_{XBD} = \frac{5}{4} \cdot 460 = 575$.

8. Простое число p таково, что для любых целых чисел a и b числа $10a + 3b$ и $a + 8b$ или оба делятся на p, или оба не делятся. Найдите, чему может быть равно p.

Ответ. 7 или 11.

Решение. Решение будет опираться на такое наблюдение:

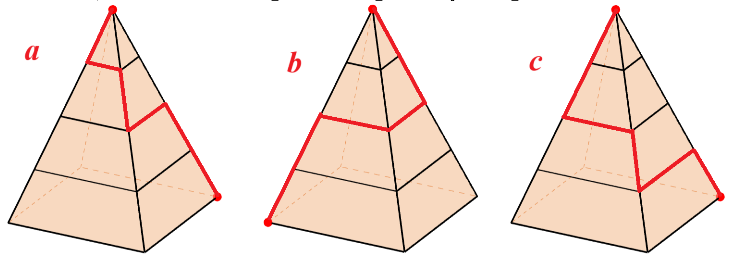
$$10 \cdot (a + 8b) - (10a + 3b) = 77b. \qquad (*)$$

Для начала докажем, что 7 и 11 подходят. Так как разность $10 \cdot (a + 8b)$ и $10a + 3b$ делится на 7 (см. $(*)$), то или эти оба числа делятся на 7, или оба не делятся. Так как 10 и 7 взаимно просты, то числа $10 \cdot (a + 8b)$ и $a + 8b$ или оба делятся на 7, или оба не делятся. Итак, $10a + 3b$ и $a + 8b$ или оба делятся на 7, или оба не делятся.

Теперь докажем, что ни одно другое p не подходит. Для этого надо предъявить какие-то числа a и b, что из чисел $10a + 3b$ и $a + 8b$ одно делится на p, а другое — нет. Равенство $(*)$ показывает, что лучше взять $b = 1$. Тогда в качестве a подойдёт $p - 8$. Тогда $10a + 3b = 10p - 77$ — не делится на p (т.к. p это не 7 и не 11), $a + 8b = p$ — делится на p.

Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике для 10 класса, 2024–2025 учебный год

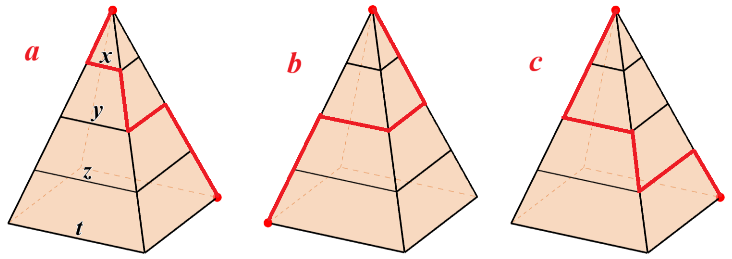
1. Боковые грани пирамиды — четыре равных равнобедренных треугольника. На этих гранях проведены отрезки, параллельные основанию, как показано на чертеже. Длины путей, отмеченные на чертежах красным, соответственно равны a, b и c. Выберите верное утверждение:



a) $c > b = a$,
b) $b = c > a$,
c) $a = b = c$,
d) $a < b < c$.

Ответ. d).

Решение. Обозначим длину горизонтальных участков через x, y, z и t (см. рисунок).



Боковые стороны равнобедренных треугольников, отсекаемых соответственно основаниями x, y, z и t от боковой грани, идут в порядке возрастания. Тогда из подобия этих треугольников следует, что $x < y < z < t$.

Пути состоят из нескольких горизонтальных участков и нескольких участков вдоль боковых рёбер пирамиды. В сумме длины участков вдоль боковых рёбер для каждого из приведённых путей равны длине бокового ребра (обозначим её через L). Тогда $a = L + x + y$, $b = L + 2y$, $c = L + y + z$.

Заметим, что

- $L + x + y < L + y + y = L + 2y$, откуда $a < b$;
- $L + 2y = L + y + y < L + y + z$, откуда $b < c$

Значит, $a < b < c$.

2. Действительные числа x и y таковы, что

$$\frac{9x}{y} = xy = 2x + 4y.$$

Какое наибольшее значение может принимать x?

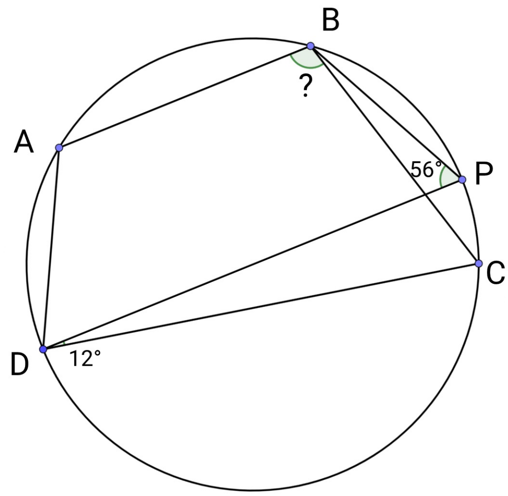
Ответ. 12.

Решение. Из равенства $\frac{9x}{y} = xy$ следует, что либо $x = 0$, либо $9 = y^2$, откуда $y = -3$ или $y = 3$.

- Если $y = -3$, то равенство $xy = 2x + 4y$ превращается в следующее: $-3x = 2x - 12$, откуда $x = \frac{12}{5}$.
- Если $y = 3$, то равенство $xy = 2x + 4y$ превращается в следующее: $3x = 2x + 12$, откуда $x = 12$.

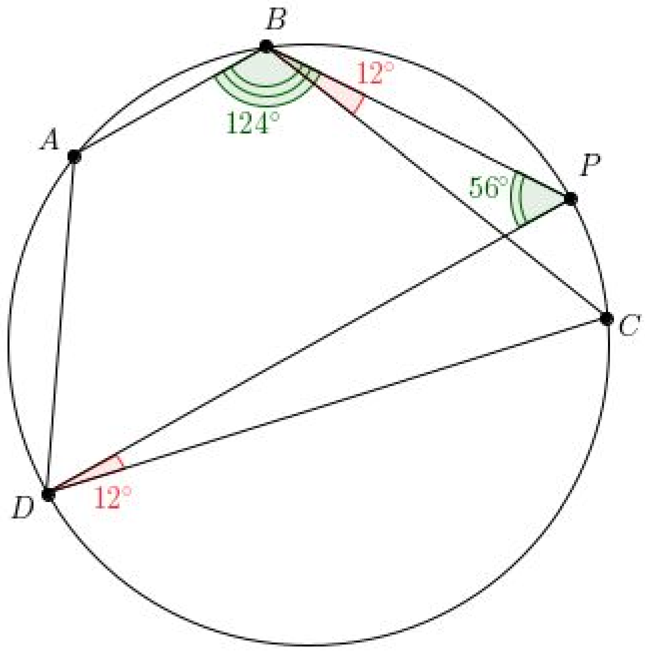
Таким образом, $x = 0$, $\frac{12}{5}$ или 12, поэтому наибольшее значение x равно 12.

3. На чертеже четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность ω. Прямая, проходящая через точку D, параллельно AB, пересекает ω в точке P. Известно, что $\angle PDC = 12°$, $\angle DPB = 56°$. Найдите величину угла $\angle ABC$. Ответ дайте в градусах.



Ответ. 112.

Решение. Заметим, что $\angle ABP = 180° - \angle DPB = 180° - 56° = 124°$ (внутренние односторонние углы при параллельных прямых AB и DP и секущей BP).



Из равенства вписанных углов, опирающихся на дугу CP, получим $\angle PBC = \angle PDC = 12°$. Наконец, $\angle ABC = \angle ABP - \angle PBC = 124° - 12° = 112°$.

4. Натуральные числа a, b и c таковы, что НОД$(a,b) = 2$ и НОД$(b,c) = 4$. Чему может быть равен НОД(a,c)? Выберите все верные ответы:
a) 12; b) 3; c) 6; d) 1; e) 2.

Ответ. c), e).

Решение. a) Если НОД$(a,c) = 12$, то и a, и c делятся на 4. По условию, НОД$(b,c) = 4$, т.е. и b, и c делятся на 4. Но тогда и a, и b делятся на 4, а значит и их НОД должен делится на 4, что не так.
b) Так как НОД$(a,b) = 2$ и НОД$(b,c) = 4$, то каждое из чисел a, b, c должно делится на 2. Значит, НОД(a,c) тоже должен делится на 2, поэтому не может быть равен 3.
c) Подойдут числа $a = 6$, $b = 4$, $c = 12$.
d) Аналогично пункту b).
e) Подойдут числа $a = 2$, $b = 4$, $c = 4$.

5. У Жоры есть коробка конфет, в которой конфеты расположены прямоугольником 4×5 (4 строчки, 5 столбцов). Жора берёт по одной конфете, каждый раз выбирая из строки, в которой осталось максимальное количество конфет; если таких несколько — из любой из них. Сколькими способами Жора мог съесть первые 5 конфет; порядок поедания важен?

Ответ. 240000.

Решение.

- Первую конфету Жора может съесть любую — т.е. у него 20 способов.
- Для каждого из этих 20 способов вторую конфету Жора сможет съесть уже только 15 способами: в таблице останется 3 строки, в каждой из которых по 5 конфеты (и из этих 15 будет выбирать Жора), а также одна строка с 4 конфетами. То есть выбрать первые две конфеты у Жоры

$$\underbrace{15+15+\ldots+15}_{20}=20\cdot 15$$

способов.

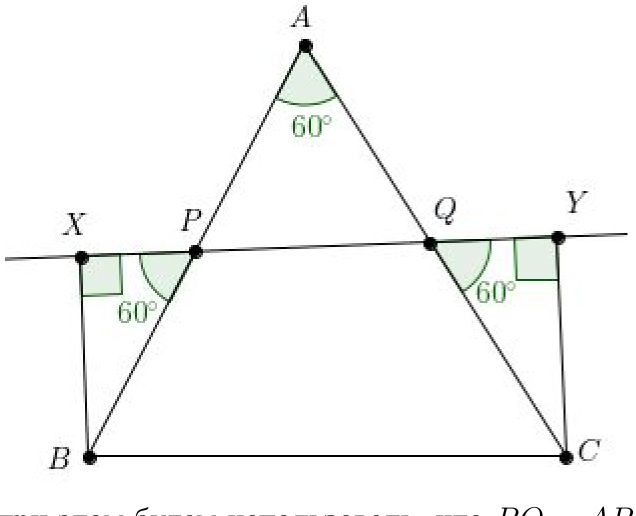
- Аналогично предыдущему: для каждого из этих $20 \cdot 15$ способов выбрать первые две конфеты у Жоры есть по 10 способов выбрать третью конфету. То есть выбрать первые три конфеты у него $20 \cdot 15 \cdot 10$ способов.
- Аналогично предыдущему: выбрать первые четыре конфеты у Жоры $20 \cdot 15 \cdot 10 \cdot 5$ способов.
- Наконец, для каждого из $20 \cdot 15 \cdot 10 \cdot 5$ способов выбрать первые четыре конфеты у Жоры есть по 16 способов выбрать пятую конфету: за предыдущие четыре выбора Жора взял по одной конфете из каждой строки, т.е. сейчас в каждой строке осталось по 4 конфеты и Жора вновь может выбрать из всех конфет.

Итого, ответ $20 \cdot 15 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 16 = 240\,000$.

6. Прямая ℓ, пересекающая стороны AB и AC треугольника ABC, разбивает его на равносторонний треугольник и на четырёхугольник. Пусть X и Y — проекции точек B и C на прямую ℓ. Найдите длину отрезка XY, если $AB = 20$, $AC = 21$.

Ответ. $20{,}5 = \dfrac{41}{2}$

Решение. Обозначим точки пересечения ℓ с AB и AC соответственно как P и Q. Заметим, что $\angle XPB = \angle APQ = 60^\circ$ (так как треугольник APQ равносторонний по условию), поэтому треугольник PXB — прямоугольный с острыми углами 60° и 30°, а тогда $XP = \frac{1}{2}BP$. Аналогично $QY = \frac{1}{2}CQ$.



Тогда запишем равенство (при этом будем использовать, что $PQ = AP = BP$):

$$XY = XP + PQ + QY = \frac{1}{2}BP + PQ + \frac{1}{2}CQ = \frac{BP + 2PQ + CQ}{2} =$$
$$= \frac{(BP + AP) + (AQ + CQ)}{2} = \frac{AB + AC}{2} = \frac{20 + 21}{2} = 20{,}5.$$

7. В стране 3 мегаполиса и 7 городков. Авиакомпания планирует расписание полётов между ними. Руководитель хочет, чтобы выполнялись следующие условия:

- от любого населённого пункта до любого другого можно добраться (прямым рейсом или с пересадками);
- если из пункта A есть рейс в пункт B, то и из пункта B есть рейс в пункт A;
- из двух мегаполисов можно улететь ровно в четыре населённых пункта, а из одного — в три;
- из каждого городка можно улететь ровно в один населённый пункт.

Сколько существует способов организовать такое расписание?

Ответ. 1680.

Решение. Для начала заметим, что из городка можно улететь только в мегаполисы: если из какого-то городка X единственный рейс ведёт в городок Y, то и из Y единственный рейс ведёт в X, т.е. из городков X и Y больше никуда не добраться.

Заметим, что ни в один мегаполис не может прилетать 4 рейса: тогда из этих 5 населённых пунктов (мегаполиса и 4 городков) больше нельзя никуда улететь. Значит, в каждый мегаполис прилетают рейсы не более чем из трёх городков.

Суммарно в мегаполисы должны прилететь 7 рейсов из городков. Существует только два способа, как можно представить число 7 в виде суммы трёх чисел, каждое из которых не превосходит 3:

- $\mathbf{3+3+1}$. Назовём эти мегаполисы A_1, A_2 и B соответственно. Мегаполис B дополнительно должен быть соединён ещё хотя бы с двумя другими мегаполисами, значит ровно с двумя он и соединён. После этого у мегаполисов A_1 и A_2 также будет по 4 рейса.

  Посчитаем теперь количество таких расписаний:

  $$3 \cdot C_7^3 \cdot C_4^3 = 420$$

  вариантов (тут 3 — это количество способов выбрать мегаполис B, после чего для мегаполиса A_1 надо из 7 городков выбрать 3, в которые из него будет рейс, далее из 4 оставшихся — 3 для мегаполиса A_2).

- $\mathbf{3+2+2}$. Назовём мегаполис, соответствующий 3, A. Заметим, что из A должна быть какая-то возможность ещё куда-то добраться, т.е. должен быть ешё хотя бы один рейс в какой-то другой мегаполис. Назовём этот мегаполис B, а оставшийся — C.

  Сейчас мы уже знаем про 4 рейса из A, 3 рейса из B и 2 рейса из C. Из C должен выходить ещё хотя бы один рейс в какой-то мегаполис. Это может быть только B, ведь из A уже идёт 4 рейса.

  Сейчас все рейсы между мегаполисами определены. Посчитаем теперь количество таких расписаний:

  $$3 \cdot 2 \cdot C_7^3 \cdot C_4^2 = 1260$$

  вариантов (здесь 3 — способы выбрать мегаполис A, 2 — мегаполис B, C_7^3 — сколькими способами можно выбрать городки для A, C_4^2 — после этого выбрать городки для B).

Итого, всего способов $1260 + 420 = 1680$.

8. Числа a_1, a_2, $\ldots$, a_9 таковы, что

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_9^2}{a_1 + a_2 + \ldots + a_9} = 48.$$

Какое наибольшее значение может принимать a_1?

Ответ. 96.

Решение. Домножим обе части равенства на знаменатель дроби, перенесём всё в левую часть равенства и сгруппируем:

$$(a_1^2 - 48a_1) + (a_2^2 - 48a_2) + \ldots + (a_9^2 - 48a_9) = 0.$$

Теперь прибавим к выражениям в скобках по 24^2, а чтобы равенство сохранилось — к правой части прибавим $9 \cdot 24^2$, получим:

$$(a_1^2 - 48a_1 + 24^2) + (a_2^2 - 48a_2 + 24^2) + \ldots + (a_9^2 - 48a_9 + 24^2) = 9 \cdot 24^2.$$

Теперь каждую скобку запишем как квадрат разности:

$$(a_1 - 24)^2 + (a_2 - 24)^2 + \ldots + (a_9 - 24)^2 = 72^2.$$

Оценим первое слагаемое:

$$(a_1 - 24)^2 = 72^2 - (a_2 - 24)^2 - \ldots - (a_9 - 24)^2 \leqslant 72^2,$$

поэтому $-72 \leqslant a_1 - 24 \leqslant 72$ и $-48 \leqslant a_1 \leqslant 96$. Таким образом, $a_1 \leqslant 96$. Значение $a_1 = 96$ достигается при $a_2 = \ldots = a_9 = 24$.

Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике для 11 класса, 2024–2025 учебный год

1. Пете, Васе и Толе выдали одинаковые наборы из пяти карточек: 1, 4, 5, 6, 13. Каждый случайно выбирает одну из своих карточек и выкладывает на стол. Найдите вероятность того, что произведение чисел на карточках — простое число.

Ответ. $\dfrac{6}{125}$.

Решение. Простое число может являться произведением натуральных чисел только в том случае, если один из множителей — простое число, а остальные множители равны 1. Поэтому соответствующее событие произойдёт тогда и только тогда, когда числа у Пети, Васи и Толи соответственно равны $(5, 1, 1)$, $(1, 5, 1)$, $(1, 1, 5)$, $(13, 1, 1)$, $(1, 13, 1)$, $(1, 1, 13)$ — т.е. в одном из 6 *благоприятных исходов*.

Общее количество исходов найдём так: Петя может выбрать любую из 5 карточек, для каждого из этих вариантов Вася может выбрать тоже любую из 5 карточек (таким образом, пока пару карточек можно выбрать $5 \cdot 5 = 25$ способами), а для каждого из этих способов Толя может выбрать свою карточку тоже 5 способами. Таким образом, три карточки можно выбрать $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ способами — это и есть общее число исходов. Вероятность нужного события найдём как отношение количества благоприятных исходов к общему количеству исходов, то есть $\dfrac{6}{125}$.

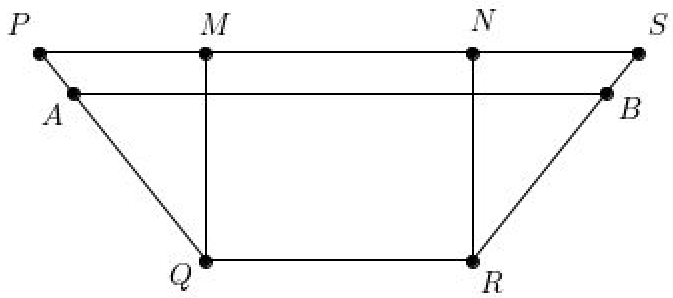
2. Если длину прямоугольного поля увеличить на 20 м, а ширину увеличить на 8 м, то его площадь увеличится на 9280 м^2. На сколько уменьшится площадь поля, если его длину уменьшить на 20 м, а ширину уменьшить на 8 м? Ответ выразите в квадратных метрах.

Ответ. 8960. **Решение.** Пусть исходная длина поля равна x метров, а ширина равна y метров. Первоначальная площадь поля равна xy м^2. После увеличения длины и ширины, как в условии задачи, площадь поля стала бы равна $(x+20)(y+8)$ м^2. То есть площадь увеличилась на $(x+20)(y+8)-xy = 8x+20y+160$ м^2, что по условию задачи равно 9280 м^2, откуда $8x + 20y = 9280 - 160 = 9120$ м^2. При уменьшении длины и ширины площадь поля стала бы равна $(x - 20)(y - 8)$, то есть площадь уменьшилась бы на $xy - (x - 20)(y - 8) = 8x + 20y - 160 = 9120 - 160 = 8960$ м^2.

3. На сторонах правильного семиугольника со стороной 2 отмечены две точки A и B. Чему может быть равна длина отрезка AB?
a) 1; b) 4; c) 7; d) 15.

Ответ. a), b).

Решение. a) Достаточно выбрать две точки на одной стороне на расстоянии 1 друг от друга.
b) Пусть P, Q, R, S — четыре последовательные вершины семиугольника. Тогда $PQRS$ — равнобокая трапеция. Опустим из Q и R перпендикуляры QM и RN на основание PS.



Заметим, что $\angle PQM = \frac{180° \cdot 5}{7} - 90° > 30°$, откуда $PM > PQ \sin 30° = 1$. Тогда на отрезке PQ найдётся такая точка A, что перпендикуляр из A на MQ будет равен 1. Тогда продолжение этого перпендикуляра до пересечения с RS будет равен $1 + 2 + 1 = 4$, что и требовалось.
c) Заметим, что от точки A до точки B можно «добраться по границе» 7-угольника, пройдя расстояние (по границе) не более 7: весь периметр 7-угольника равен 14, т.е. хотя бы один из путей будет не более 7. Но тогда длина отрезка AB будет строго меньше 7.
d) Аналогично пункту c).

4. Какой остаток при делении на 32 даёт число $2^4 \cdot 5^6 \cdot 11^{10} \cdot 17^{17}$?

Ответ. 16. **Решение.** Число из условия задачи можно обозначить как N. Оно записывается в виде $N = 32k + r$, где k и r — соответственно неполное частное и остаток при делении N на 32 ($0 \leqslant r < 32$).

N делится на 16, так как в разложении N на простые множители есть $2^4 = 16$, поэтому $32k + r$ делится на 16, откуда (так как $32k$ делится на 32, а значит и на 16) r делится на 16, поэтому равно или 0, или 16 (только они делятся на 16 в диапазоне $0 \leqslant r < 32$). Если $r = 0$, то $N = 32k$, поэтому должно делиться на 32, но это неверно (в его разложении на простые множители двойка входит только в степени 4, поэтому N не делится на $2^5 = 32$). Следовательно, $r = 16$ (единственный оставшийся возможный вариант).

5. Каждое из чисел от 1 до 3491 покрашено в один из k цветов (каждый цвет встречается). Оказалось, что для каждого цвета количество чисел этого цвета равно наименьшему числу этого цвета. При каком наибольшем k это возможно?

Ответ. 83.

Решение. Обведём в кружочек наименьшее число каждого цвета. Наименьшее из обведённых чисел не меньше 1, следующее по величине — не меньше 2, следующее — не меньше 3, и т.д., последнее обведённое число не менее k. Общее количество покрашенных чисел по условию задачи равно сумме обведённых чисел, поэтому не меньше $1 + 2 + 3 + \ldots + k = \dfrac{k(k+1)}{2}$, но по условию покрашенных чисел ровно 3491. Отсюда $3491 \geqslant \dfrac{k(k+1)}{2}$ — несложно убедиться, что это неравенство выполняется при $k \leqslant 83$.

Для $k = 83$ можно привести пример раскраски чисел: покрасим каждое из чисел от 1 до 82 в свой уникальный цвет (сами цвета также будем соответственно называть: 1-й, 2-й, 3-й, ..., 82-й), а числа 88, 89, 90, 91, ..., 175 покрасим в 83-й цвет. Далее во 2-й цвет покрасим ещё одно из пока не покрашенных чисел, в 3-й цвет — ещё два числа, и так далее, в 82-й цвет — ещё 81 число. В результате в 1-й цвет покрашено только число 1, во 2-й цвет — два числа, из которых наименьшее равно 2, в 3-й цвет — три числа, из которых наименьшее равно 3, и так далее, а вот в 83-й цвет покрашено 88 чисел, из которых наименьшее равно 88. Всего покрашены

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 82 + 88 = \frac{82 \cdot 83}{2} + 88 = 3491$$

чисел, то есть все числа из набора.

Таким образом, для 83 цветов удалось предъявить пример, а большего количества цветов, как ранее доказано, быть не может.

6. Жора решил систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ xy = \frac{9}{2}. \end{cases}$$

Для каждого решения Жора посчитал, чему равно $(x+y)^2$. Чему равна сумма всех чисел, посчитанных Жорой?

Ответ. 116.

Решение. Сложим первое равенство с удвоенным вторым и выделим в левой части полный квадрат:

$$x^2 + y^2 + 2xy = (x+y)^2 = 20 + 2 \cdot \frac{9}{2} = 29,$$

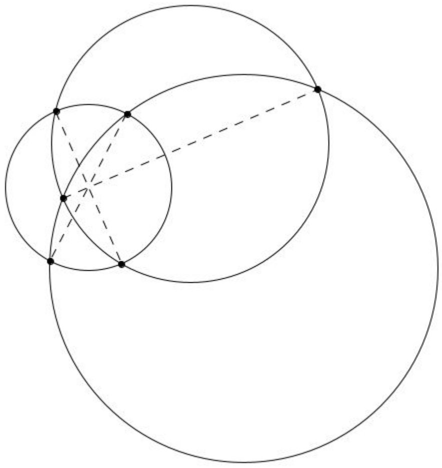
откуда $x + y = \pm\sqrt{29}$ (два значения). Отсюда $y = \pm\sqrt{29} - x$. Подставим это во второе уравнение системы, получим $x \cdot \left(\pm\sqrt{29} - x\right) = \dfrac{9}{2}$. Это преобразуется к квадратному уравнению $x^2 \mp \sqrt{29}x + \dfrac{9}{2} = 0$, дискриминант которого равен $29 - 4 \cdot 1 \cdot \dfrac{9}{2}$, то есть положителен. Таким образом, это уравнение имеет по два корня для каждого из вариантов выбора знаков при $\sqrt{29}$, то есть всего четыре корня, каждому из них соответствует решение (x, y) исходной системы.

Для каждого из этих четырёх решений Жора находил $(x+y)^2$, что равно $(x^2+y^2) + 2 \cdot xy = 20 + 2 \cdot \frac{9}{2} = 29$. Поэтому для четырёх решений Жора получит общую сумму $4 \cdot 29 = 116$.

Комментарий. Каждому решению, которое нашёл Жора, соответствует точка пересечения окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 20$, с одной из двух ветвей гиперболы, заданной уравнением $xy = \frac{9}{2}$ (или $y = \frac{9/2}{x}$). Каждая из этих ветвей гиперболы имеет с окружностью две точки пересечения (для этого можно проверить, что ближайшая к началу координат точка каждой из этих ветвей — т.е. точки $\left(\sqrt{\frac{9}{2}}, \sqrt{\frac{9}{2}}\right)$ и

$\left(-\sqrt{\frac{9}{2}}, -\sqrt{\frac{9}{2}}\right)$ — находится внутри окружности, так как расстояние до начала координат меньше $\sqrt{20}$). Всего получаем четыре точки пересечения, что соответствует четырём решениям системы.

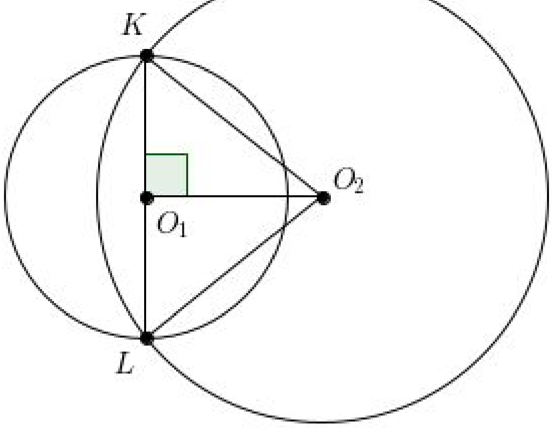
7. Три окружности радиусами 3, 5, 7 расположены так, что общая хорда пересечения любых двух окружностей является диаметром меньшей из них.
1) Найдите квадраты длин сторон треугольника, образованного центрами этих окружностей.
2) Найдите квадрат площади треугольника, образованного центрами этих окружностей.



Ответ. 1) 16, 24, 40;   2) 96.

Решение. 1) Для начала докажем следующую лемму.

Лемма. Пусть окружности радиусами $r < R$ расположены так, что их общая хорда является диаметром меньшей из них. Тогда длина отрезка между их центрами равняется $\sqrt{R^2 - r^2}$.



Действительно, хорошо известно, что общая хорда двух окружностей перпендикулярна их линии центров. На чертеже KL — общая хорда, проходящая через центр первой окружности O_1, перпендикулярная отрезку O_1O_2. Тогда утверждение леммы — это просто теорема Пифагора для треугольника O_1O_2L.

Применяя лемму к каждой из пар окружностей, получаем ответ.

Комментарий. Теперь, зная длины сторон, с использованием формулы Герона можно получить площадь треугольника. Однако такой путь может быть сопряжён с громоздкими выкладками. Предложим здесь другой путь решения.

2) Заметим, что по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник со сторонам, квадраты которых равны 16, 24 и 40 — прямоугольный (ведь $16 + 24 = 40$). Поэтому квадрат площади — это четверть произведения квадратов длин катетов, т.е. $16 \cdot 24/4 = 96$.

8. Пусть $n > 2024$ — натуральное число. На доске написаны натуральные числа от 2024 до n. За одну операцию робот берёт два наибольших числа на доске и заменяет их на их разность, тем самым уменьшая количество чисел на доске. Через некоторое время на доске останется только одно число. Сколько существует натуральных $n < 10\,000$, для которых это число будет равно 0?

Ответ. 2976.

Решение. Если n чётно, то после $\frac{n-2024}{2}$ операций мы получим 2024 и $\frac{n-2024}{2}$ единиц. Чтобы в итоге осталось число 0, единиц должно быть чётно и хотя бы 2024. Значит, $n - 2024$ (а с ним и n) делится на 4 и $\frac{n-2024}{2} \geqslant 2024$, $n \geqslant 6072$. Таким чисел, больших 2024 и меньших 10000 всего 982 (от $1518 \cdot 4 = 6072$ до $2499 \cdot 4$).

Если n нечётно, то после $\frac{n-2023}{2}$ операций мы получим $\frac{n-2023}{2}$ единиц. Чтобы остался 0 единиц должно быть чётное число. Следовательно, $n - 2023$ делится на 4, т.е. $n \equiv 3 \pmod 4$. Таких чисел, больших 2024 и меньших 10000, всего 1994 (от $506 \cdot 4 + 3$ до $2499 \cdot 4 + 3$).

Итого, ответ $982 + 1994 = 2976$.