ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
МАТЕМАТИКА. 2023–2024 уч. г.
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП. 4 КЛАСС

ЗАДАНИЯ, ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

1. Установите соответствие таким образом, чтобы были выполнены все четыре равенства.

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{A} & + & \boxed{B} & = & 6 \\ - & & : & & \\ \boxed{C} & \times & \boxed{D} & = & 3 \\ = & & = & & \\ 1 & & 2 & & \end{array}$$

Каждой из букв A, B, C, D поставьте в соответствие числа 1, 2, 3, 4. Каждое число можно использовать один раз.

Ответ:

A	B	C	D
4	2	3	1

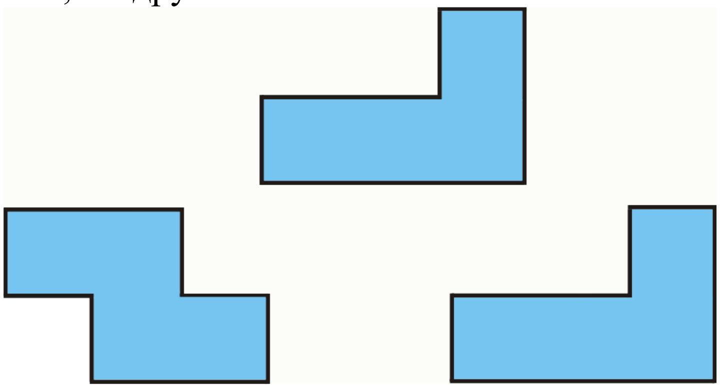
Решение. Поскольку C · D = 3, то есть два случая.
• C = 1, D = 3. Также известно, что B : D = 2, поэтому B = 6, но такого числа у нас нет. Значит, такой случай невозможен.
• C = 3, D = 1. Также известно, что B : D = 2, поэтому B = 2. Методом исключения понимаем, что A = 4. Легко проверить, что полученный набор удовлетворяет всем условиям задачи.

2. По зову дядьки Черномора явились 33 богатыря: каждый либо пешком, либо на коне. Каждый приехавший на коне богатырь взял с собой копьё. Пешком пришли 11 богатырей, а копьё не взяли 3 богатыря. На сколько число пеших богатырей с копьём меньше, чем богатырей, приехавших на коне?
Ответ: 14.

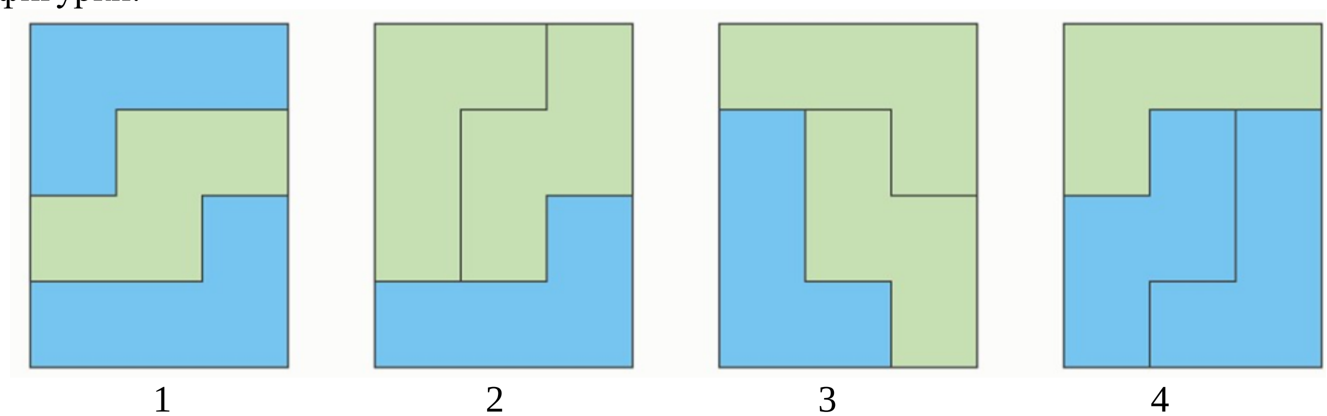
Решение. Всего 33 − 11 = 22 богатыря приехали на коне. По условию задачи мы знаем, что все они взяли с собой копья. Отсюда следует, что 3 богатыря, которые пришли без копья, явились пешком. И тогда пеших богатырей с копьём было 11 − 3 = 8.

Теперь нетрудно вычислить ответ: 22 − 8 = 14 — именно на столько пеших богатырей **с копьём меньше, чем богатырей, приехавших на коне.**

3. Полина вырезала из бумаги три фигурки, изображённые ниже. Каждая из них с одной стороны синяя, а с другой — зелёная.

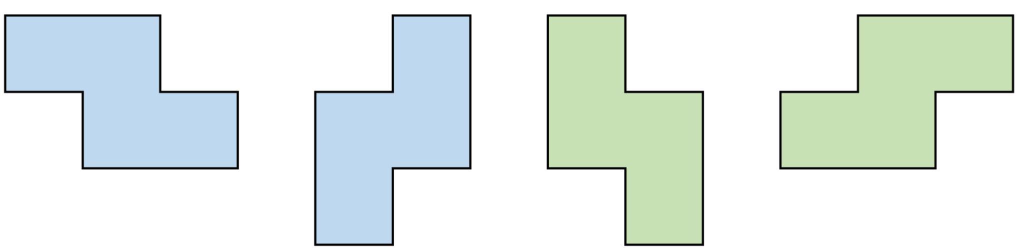


Выберите все прямоугольники, которые могла сложить Полина, используя эти фигурки:

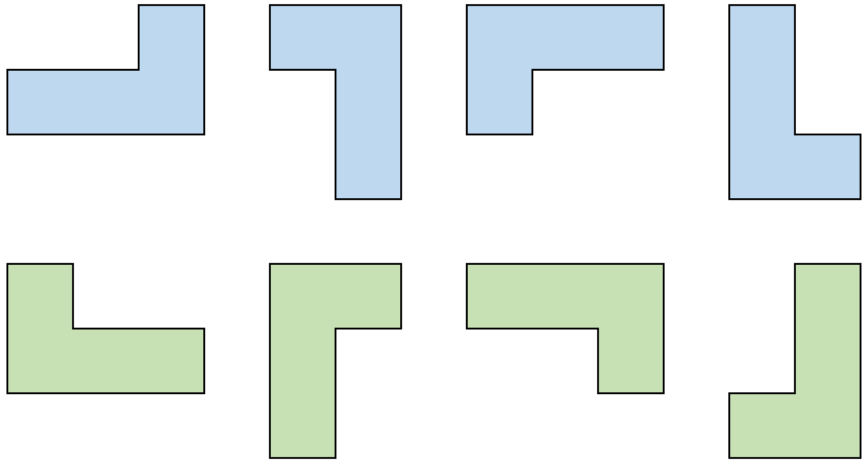


Ответ: 1, 3.

Решение. У Полины есть два вида фигурок: один «зигзаг» и две «буквы Г». Если поворачивать и переворачивать «зигзаг», то может получиться один из четырёх вариантов:



Если поворачивать и переворачивать «букву Г», то может получиться один из восьми вариантов:



Глядя на все эти возможные фигурки, нетрудно понять, что Полина сможет сложить только первый и третий прямоугольники.

4. Алёша, Вася и Саша участвовали в школьном соревновании по бегу. До начала соревнования было сделано четыре прогноза:

- выиграет Вася или Алёша;
- если Саша займёт второе место, то Вася займёт третье место;
- если Саша займёт третье место, то Алёша займёт второе место;
- второе место займёт Вася или Саша.

Оказалось, что все прогнозы сбылись. Кто какое место занял?

Ответ: Алёша занял первое место, Вася занял третье место, Саша занял второе место.

Решение. Из первого прогноза следует, что Саша занял либо второе место, либо третье.

Первый случай. Саша занял второе место.
Тогда из второго прогноза следует, что третье место занял Вася. Тогда методом исключения первое место занял Алёша. Видно, что этот случай удовлетворяет всем условиям задачи.
Второй случай. Саша занял третье место.
Тогда из третьего прогноза следует, что второе место занял Алёша. Но тогда последний прогноз не сбылся. Получаем противоречие, поэтому такой случай невозможен.
Таким образом, возможен лишь один случай: Алёша занял первое место, Саша — второе, Вася — третье.

5. Коля выпивает 3 литра газировки за 20 минут, а Саша выпивает 4 литра газировки за 40 минут. За сколько минут Коля и Саша смогут выпить 1 литр газировки, действуя сообща?
Ответ: 4.

Решение. Раз Саша выпивает 4 литра газировки за 40 минут, то за 20 минут он выпьет 2 литра газировки. Таким образом, действуя сообща, за 20 минут ребята выпьют 3 + 2 = 5 литров газировки. Тогда 1 литр они выпьют за 20 : 5 = 4 минуты.

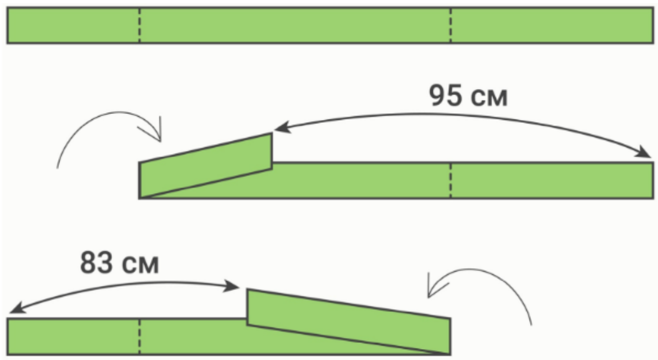
6. В течение учебного полугодия на уроках математики учеников 4 «А» класса вызывали к доске суммарно 84 раза. Все мальчики выходили к доске одинаковое число раз, и все девочки — одинаковое число раз, но на 1 меньше, чем мальчики. Какое наименьшее количество детей могло учиться в этом классе, если известно, что мальчики выходили к доске суммарно столько же раз, сколько и девочки?
Ответ: 13.

Решение. Заметим, что все мальчики суммарно выходили к доске 84 : 2 = 42 раза — столько же раз и все девочки суммарно выходили к доске. Чтобы понять, сколько раз мог выходить один мальчик и одна девочка, выпишем все делители числа 42 в порядке возрастания: 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42. Нам нужно выбрать два из них так, чтобы они отличались ровно на 1 (меньшее число будет количеством выходов к доске девочки, а большее чис ло — мальчика). Есть три случая.

- Каждая девочка вышла к доске 1 раз, а каждый мальчик — 2 раза. Тогда в классе всего 42 : 1 = 42 девочки и 42 : 2 = 21 мальчик — суммарно 63 ученика.
- Каждая девочка вышла к доске 2 раза, а каждый мальчик — 3 раза. Тогда в классе всего 42 : 2 = 21 девочка и 42 : 3 = 14 мальчиков — суммарно 35 учеников.
- Каждая девочка вышла к доске 6 раз, а каждый мальчик — 7 раз. Тогда в классе всего 42 : 6 = 7 девочек и 42 : 7 = 6 мальчиков — суммарно 13 учеников.

Наименьшее из этих чисел — 13.

7. На длинной полоске ткани сделали две отметки. Если согнуть полоску относительно первой отметки, то расстояние между её концами составит 95 сантиметров; если согнуть полоску ткани относительно второй отметки, то расстояние между её концами составит 83 сантиметра.



Определите расстояние между отметками. Ответ выразите в сантиметрах.
Ответ: 89.

Решение. Пусть расстояние от левого края полоски до первой отметки равняется A сантиметров, расстояние от первой отметки до второй — B сантиметров, расстояние от второй отметки до правого края — C сантиметров.
Рассмотрев сгибание полоски относительно первой отметки, получаем, что

$$95 = B + C - A.$$

Рассмотрев сгибание полоски относительно второй отметки, получаем, что

$$83 = A + B - C.$$

Сложив оба этих выражения, получаем, что

$$83 + 95 = (B + C - A) + (A + B - C) = 2 \cdot B,\ 2 \cdot B = 178,$$
$$B = 89.$$

8. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды собралась компания из 33 островитян, среди которых есть хотя бы один рыцарь и хотя бы один лжец. У каждого из них спросили, сколько всего лжецов в этой компании.

- 3 человека сказали: «Трое»;
- 5 человек сказали: «Меньше пяти»;
- 8 человек сказали: «Меньше восьми»;
- 17 человек сказали: «Меньше семнадцати».

Сколько всего лжецов может быть в этой компании? Укажите все возможные варианты.
Ответ: 16.

Решение. Ясно, что каждую из фраз говорили либо только рыцари, либо только лжецы.
По условию задачи среди присутствующих есть хотя бы один рыцарь. Давайте рассмотрим случаи того, что он мог сказать.

Предположим, что рыцарь сказал: «Трое». Тогда лжецов всего трое, а это значит, что все островитяне сказали правду (так как $3 < 5$, $3 < 8$, $3 < 17$), и все они — рыцари. Но это противоречит тому, что среди них есть хотя бы один лжец. Значит, первые трое из нашей компании — это лжецы.

Предположим теперь, что рыцарь сказал: «Меньше пяти». Тогда фразы «Меньше восьми» и «Меньше семнадцати» также являются правдивыми. Выходит, что всего должно быть 3 лжеца и $5 + 8 + 17 = 30$ рыцарей. Но тогда лжецы сказали правду. Противоречие. Значит, первые $3 + 5 = 8$ человек — лжецы.

Предположим, что рыцарь сказал: «Меньше восьми». Тогда фраза «Меньше семнадцати» также является правдивой. Выходит, что всего должно быть $3 + 5 = 8$ лжецов и $8 + 17 = 25$ 13 рыцарей. Но тогда рыцарь, сказавший, что лжецов меньше восьми, соврал. Противоречие. Значит, первые $3 + 5 + 8 = 16$ человек — лжецы.

Тогда нашему рыцарю ничего не остаётся, кроме как сказать: «Меньше семнадцати». Выходит, что всего должно быть $3 + 5 + 8 = 16$ лжецов и 17 рыцарей. И это удовлетворяет всем условиям задачи.

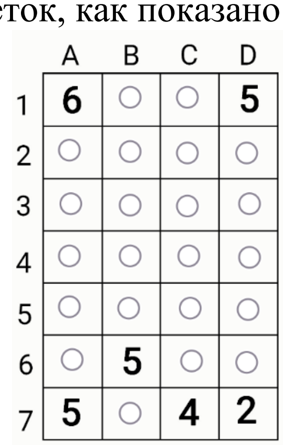
ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
МАТЕМАТИКА. 2023–2024 уч. г.
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП. 5 КЛАСС

ЗАДАНИЯ, ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

1. На большой ферме живут 630 кроликов. В один из дней фермер покормил их из расчёта 3 килограмма моркови на 70 кроликов, а надо было — 7 килограммов моркови на 90 кроликов. Сколько ещё моркови понадобится, чтобы правильно накормить кроликов? Ответ выразите в килограммах.
Ответ: 22.

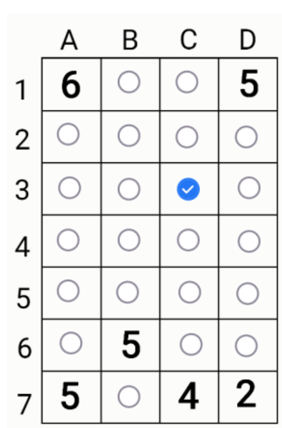
Решение. Первоначально фермер потратил $(630 : 70) \cdot 3 = 27$ килограммов моркови, а должен был потратить $(630 : 90) \cdot 7 = 49$ килограммов моркови. Таким образом, ему понадобится ещё $49 - 27 = 22$ килограмма моркови.

2. Лёня разрезал по линиям сетки прямоугольник 7×4 на семь прямоугольников площадью 6, 5, 5, 5, 4, 2, 1. Площадь каждого из первых шести прямоугольников Лёня написал в одной из его клеток, как показано на рисунке.

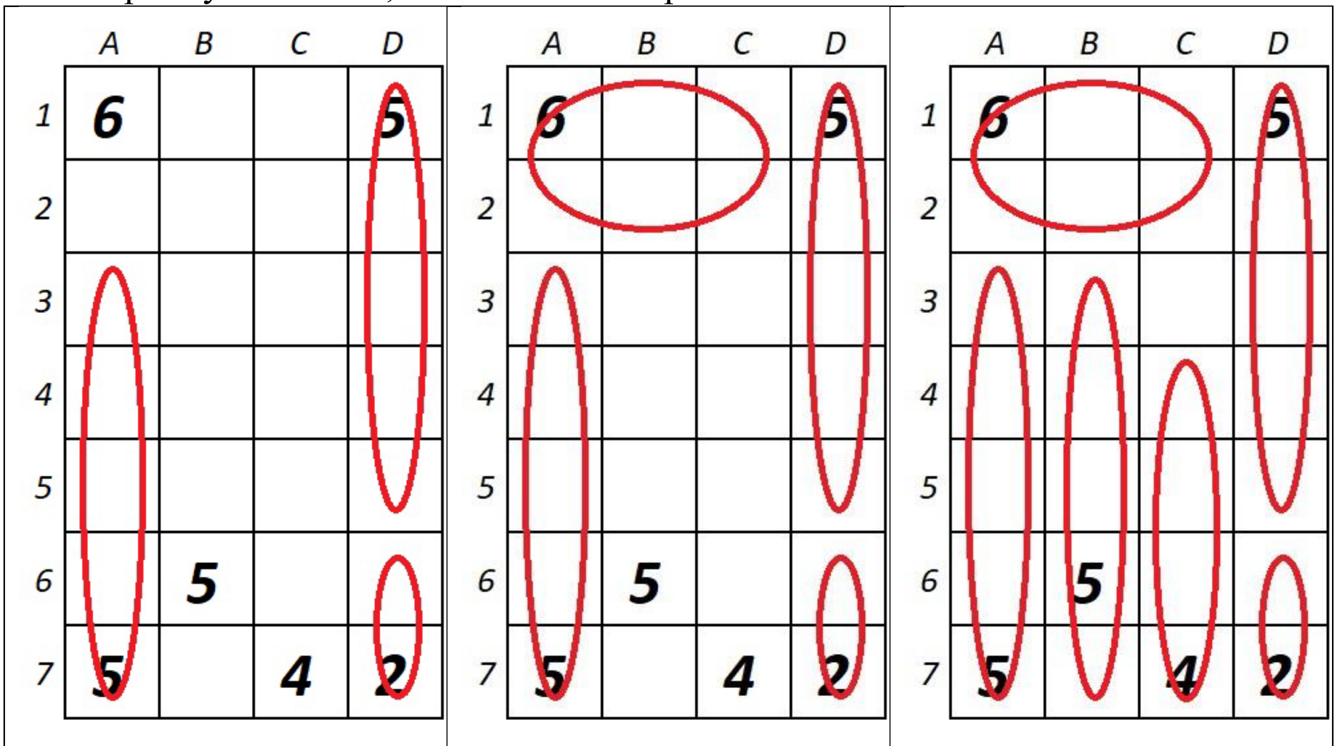


Какой клетке соответствует прямоугольник площади 1?

Ответ:



Решение. В первую очередь обратим внимание на две цифры 5 в противоположных углах прямоугольника, а также на цифру 2. Они однозначно задают расположение своих прямоугольников, как показано на рис 1a.



(a) (b) (c)

Теперь можно определить расположение прямоугольника, состоящего из 6 клеток (рис. 1b).

Расположение двух оставшихся прямоугольников с подписанными клетками после этого определяется однозначно, как показано на рис. 1c.

Таким образом, мы получаем, что квадрат 1×1 расположен в клетке $C3$.

3. Учитель выписал на доску несколько подряд идущих натуральных чисел, начиная с единицы. Петя заметил, что ровно 17 из них делятся на 3, а Вася заметил, что ровно 3 из них делятся на 13. Сколько чисел выписал на доску учитель?

Ответ: 51.

Решение. Поскольку ровно 17 чисел делятся на 3, то на доску точно были выписаны числа 3, 6, 9, ... , 51 и не было выписано число 54.

Также на доске были ровно 3 числа, делящиеся на 13. Значит, там точно были выписаны числа 13, 26, 39 и не было выписано число 52.

Следовательно, учитель выписал на доску все натуральные числа от 1 до 51 — ровно 51 число.

4. У Ильи есть 16 фигурок солдатиков: лучников и мечников. Если он отдаст брату любые 3 фигурки, то мечников у него останется в любом случае больше, чем лучников. Если же он отдаст брату половину мечников, то лучников у него останется больше, чем мечников. Сколько фигурок лучников у Ильи?
Ответ: 6.

Решение. Нам известно, что если Илья отдаст брату любые 3 фигурки, то мечников у него останется в любом случае больше, чем лучников. Отсюда получается, что у Ильи мечников хотя бы на 4 больше, чем лучников. Поскольку всего фигурок 16, то под это условие подходят лишь следующие варианты:

- 16 мечников и 0 лучников,
- 15 мечников и 1 лучник,
- 14 мечников и 2 лучника,
- 13 мечников и 3 лучника,
- 12 мечников и 4 лучника,
- 11 мечников и 5 лучников,
- 10 мечников и 6 лучников.

Теперь воспользуемся другим условием: «Если же он отдаст брату половину мечников, то лучников у него останется больше, чем мечников». Очевидно, что из перечисленных вариантов под это условие подходит только последний: 10 мечников и 6 лучников.

5. Найдите наибольшее восьмизначное число, удовлетворяющее двум условиям:

- У него любые три подряд идущие цифры различны;
- У него произведение любых трёх подряд идущих цифр делится на 20.

Ответ: 98598598

Решение. Чем больше первая цифра числа, тем больше само число, поэтому пусть наше число начинается с цифры 9:

9 . . . .

Первые три цифры должны быть различны, поэтому максимальное значение, которое может принимать вторая цифра, — это 8.

9 8 . . . . . .

Теперь поймём, какое значение в этом случае может принимать третья цифра числа. Чтобы произведение первых трёх цифр делилось на 20, необходимо поставить на третье место либо 0 (тогда $9 \cdot 8 \cdot 0 = 0$, что делится на 20), либо 5 (тогда $9 \cdot 8 \cdot 5 = 360$, что делится на 20). Во втором случае число получится больше.

9 8 5 . . . . .

Теперь рассмотрим следующую тройку: четвёртую, пятую и шестую цифры. Для них можно повторить точно такое же рассуждение.

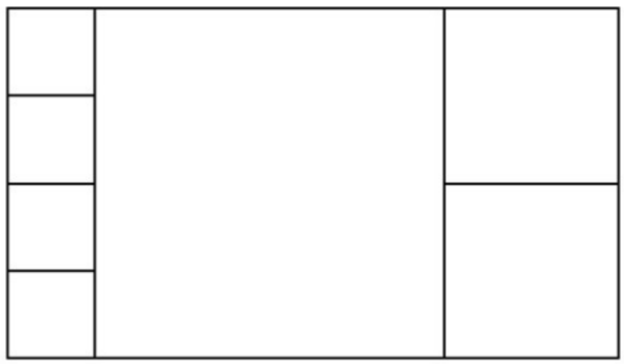
$$9\,8\,5\,9\,8\,5\,.\,.$$

И для последних двух цифр тоже.

$$9\,8\,5\,9\,8\,5\,9\,8$$

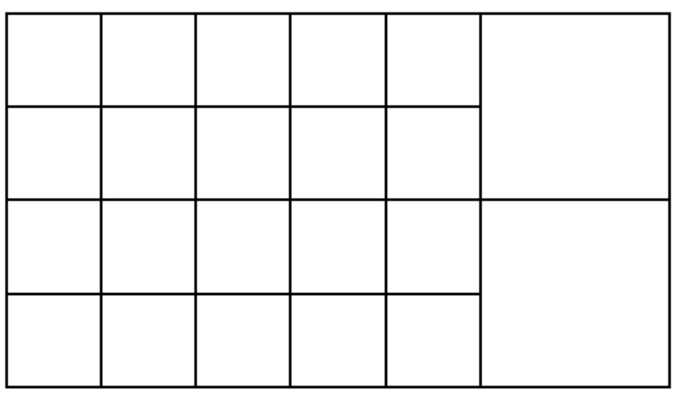
Заметим, что у получившегося числа любые три подряд идущие цифры — это 5, 8 и 9 в каком-то порядке. Они различны, и их произведение делится на 20, поэтому полученное число удовлетворяет условию задачи.

6. На рисунке изображён прямоугольник, разрезанный на семь квадратов.

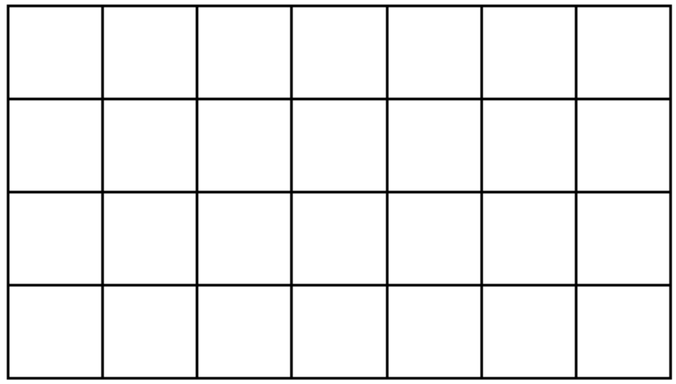


Найдите периметр этого прямоугольника, если его площадь равна 2268.
Ответ: 198.

Решение. Заметим, что сторона большого квадрата в 4 раза больше стороны маленького квадрата, поэтому большой квадрат можно разрезать на 16 маленьких квадратов.



Теперь видно, что сторона среднего квадрата в 2 раза больше стороны маленького квадрата, поэтому каждый из средних квадратов можно разрезать на 4 маленьких квадрата.



Пусть x — площадь маленького квадрата. Тогда площадь всего прямоугольника равна $28x$, а по условию задачи она равна 2268. Получается уравнение

$$28x = 2268,$$
$$x = 81.$$

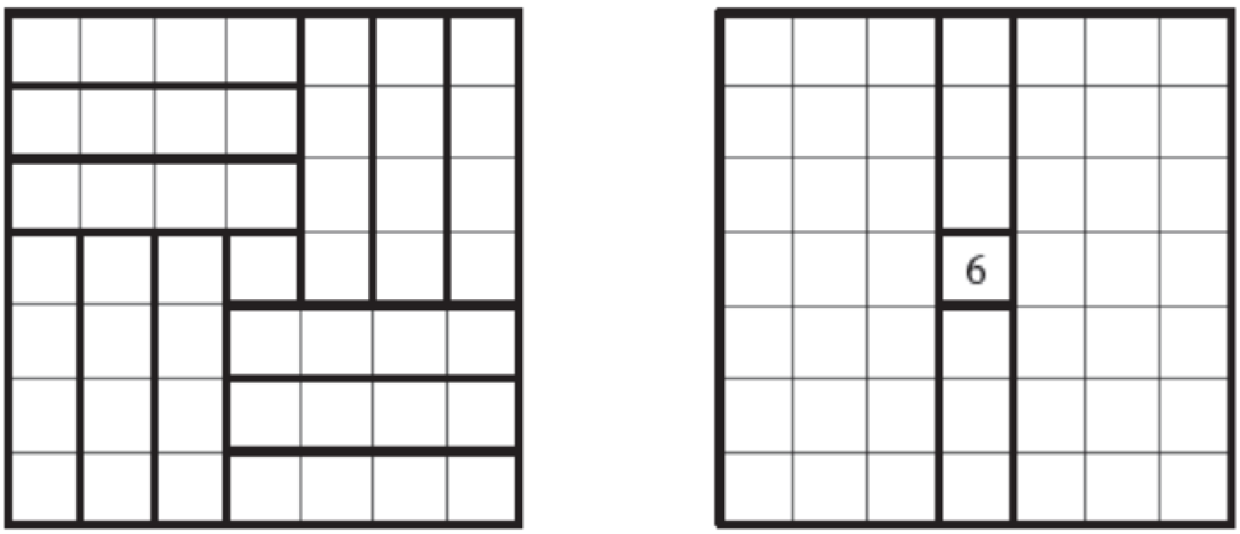
Отсюда можно понять, что маленький квадрат имеет размеры 9×9. Периметр всего прямоугольника равен $2 \cdot (4x+7x) = 22x$, и он в 22 раза больше стороны маленького квадрата. Значит, ответом к задаче является число $22 \cdot 9 = 198$.

7. У Вани есть 234 монеты и доска 7×7. Он разложил все монеты в клетки доски так, что в любых четырёх клетках, образующих прямоугольник 1×4 или 4×1, суммарно оказалось ровно 19 монет (в каких-то клетках могло оказаться несколько монет, а какие-то клетки могли оказаться пустыми).

Сколько всего монет может находиться в четвёртом столбце? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 32.

Решение. Разобьём наш квадрат на 12 прямоугольников 1×4 и 1 квадратик 1×1, как показано на рис. 2а. Из условия задачи следует, что суммарное количество монет во всех



(a) (b)

12 прямоугольниках равно $12 \cdot 19 = 228$. Поскольку всего монет 234, то в центральном квадратике 1×1 лежат ровно $234 - 228 = 6$ монет.

Теперь рассмотрим два прямоугольника 1×4 в четвёртом столбце: образованный верхними 4 клетками и образованный нижними 4 клетками (рис. 2b). Чтобы найти количество монет в четвёртом столбце, мы сложим количества монет в этих двух прямоугольниках:

$19 + 19 = 38$ монет. Но при этом монеты в центральном квадратике посчитаны дважды, поэтому их количество надо вычесть: $38 - 6 = 32$ монеты.

8. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды собрались на заседание 50 жителей острова, среди которых было k лжецов ($k \geq 4$). Все лжецы по очереди сделали заявления:

- Первый лжец: «Среди нас рыцарей меньше, чем лжецов»,
- Второй лжец: «Среди нас рыцарей столько же, сколько лжецов»,
- Третий лжец: «Среди нас рыцарей на 1 больше, чем лжецов»,
- Четвёртый лжец: «Среди нас рыцарей на 2 больше, чем лжецов»,
- ...
- k-й лжец: «Среди нас рыцарей на (k – 2) больше, чем лжецов».

Найдите наибольшее возможное значение k.

Ответ: 17.

Решение. Так как все лжецы соврали, то рыцарей должно быть хотя бы на $k-1$ больше, чем лжецов. Раз лжецов ровно k, то рыцарей хотя бы $2k-1$, а на заседание собрались хотя бы $3k-1$ жителей острова. Но условию задачи нам известно, что на заседании было ровно 50 человек. Получаем неравенство

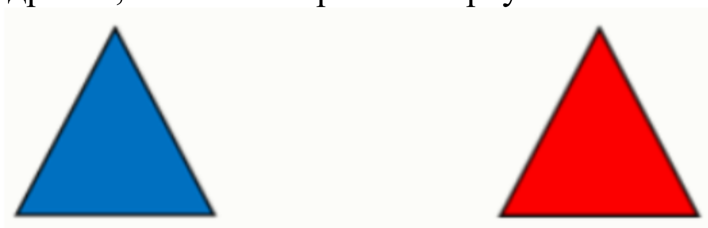
$$3k-1 \leqslant 50 \Rightarrow 3k \leqslant 51 \Rightarrow k \leqslant 17.$$

Осталось лишь понять, что случай с 17 лжецами и 33 рыцарями удовлетворяет условию задачи. Действительно, в этом случае рыцарей на 16 больше, чем лжецов, поэтому все 17 лжецов действительно солгали.

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
МАТЕМАТИКА. 2023–2024 уч. г.
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП. 6 КЛАСС

ЗАДАНИЯ, ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

1. В ряд выложены квадраты и треугольники. Треугольника всего два — синий и красный. Оказалось, что справа от синего треугольника находятся красный треугольник и 7 квадратов, а слева от красного треугольника — 12 квадратов.



Сколько квадратов между треугольниками, если всего выложено 17 фигур?
Ответ: 4.

2. Футбольный матч закончился 5 : 1. Каждый гол в этом матче был устроен так: один игрок давал голевой пас своему сокоманднику, а тот забивал гол команде соперников.
После каждого гола в протокол матча записывали имена двух игроков из одной команды: того, кто забил гол, и того, кто отдал голевой пас. По итогу матча в протоколе оказались записаны имена только четырёх игроков: Андрея, Бориса, Вадима и Дениса. Сколько забил голов и сколько отдал голевых передач Денис, если известно, что его сокомандник Андрей забил ровно 2 гола?
Ответ: голы — 3, голевые передачи — 2.

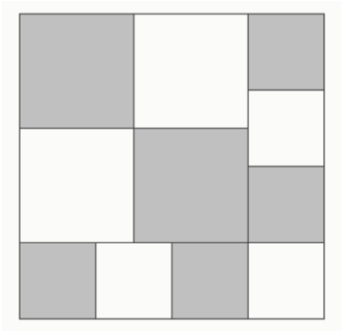
3. В большой кроличьей семье есть дети: кролики и крольчихи. У каждого кролика братьев в 2 раза больше, чем сестёр. А у каждой крольчихи сестёр на 6 меньше, чем братьев. Сколько всего детей в этой семье?

4. У мальчиков Ильи, Максима, Вовы и Лёши есть конфеты: 1, 2 или 3 у каждого. Они заявили следующее:

- Илья: «У Лёши не 1 конфета».
- Максим: «Ровно у двоих из нас по 3 конфеты».
- Вова: «У меня конфет больше, чем у Лёши».
- Лёша: «Количества конфет у Максима и Вовы отличаются не более чем на 1».

Известно, что соврал только один мальчик, и он — единственный, у кого 1 конфета. У кого сколько конфет?
Ответ: Илья — 3, Максим — 2, Вова — 1, Лёша — 3.

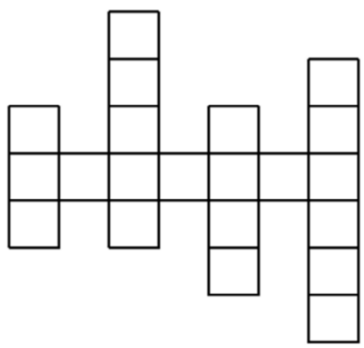
5. Квадрат на рисунке разбит на 11 меньших квадратов: белых и серых. Суммарная площадь серых квадратов равна 102.



Чему равна суммарная площадь белых квадратов?
Ответ: 90.

6. По обе стороны дороги стоят столбы так, что расстояние между первым и последним столбами с каждой стороны равно 37 км. С левой стороны стоит 117 столбов, и расстояние между соседними столбами одинаковое. С правой стороны расстояние между соседними столбами тоже одинаковое, но оно на треть больше, чем с левой. Сколько всего столбов стоит справа?
Ответ: 88.

7. На рисунке изображена клетчатая доска. Будем считать, что фишка на этой доске *видит* другую фишку, если они расположены либо в одной вертикали, либо в одной горизонтали, причём между ними нет границ доски.
Сколькими способами можно расставить 5 фишек на этой доске так, чтобы никакие две из них не *видели* друг друга?
Ответ: 360.



8. Андрей, Боря, Вера, Галя, Денис и Елена решили сыграть в настольную игру. Они разбились на три команды, каждая из которых состоит из мальчика и девочки. Цель игры — получить как можно больше очков.
К концу игры все дети суммарно набрали 151 очко, причём в каждой команде девочка набрала на 5 очков больше, чем мальчик. При этом если к числу очков Андрея прибавить число очков Гали, то получится 52, а если прибавить число очков Веры, то получится 48. Известно, что каждый из детей набрал целое число очков. Сколько очков набрала Елена?
Ответ: 27.

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
МАТЕМАТИКА. 2023–2024 уч. г.
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП. 7 КЛАСС

ЗАДАНИЯ, ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

1. Гоша нашёл в кабинете естествознания 3 гири и весы. После того как он всё взвесил, оказалось, что:

- Первая гиря в 4 раза тяжелее второй;
- Третья гиря в 3 раза тяжелее первой;
- Суммарный вес всех гирь — 340 грамм.

Определите вес первой гири. Ответ выразите в граммах.
Ответ: 80.

2. В 7«А» учится 26 детей, которые на всех уроках сидят по двое за партой. Однажды в этом классе провели самостоятельную работу, за которую каждый получил четвёрку или пятёрку.
Все ученики заявили следующее:

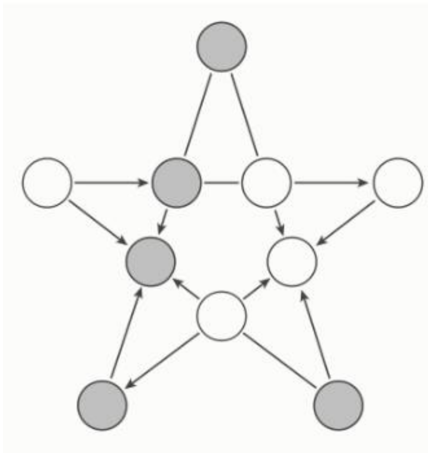
«*Все сидящие не за одной партой со мной получили четвёрки*.»

Оказалось, что правду сказали только те ученики, которые получили пятёрку. Сколько всего четвёрок было выставлено за эту самостоятельную работу?
Ответ: 24.

3. У сладкоежек Пети и Васи были конфеты, у каждого более 1000 конфет. Известно, что у Пети конфет было на 324 больше, чем у Васи. Каждый день они одновременно обменивались конфетами: Петя отдавал треть своих конфет Васе, а Вася отдавал треть своих конфет Пете.
У кого из них через 3 дня оказалось больше конфет?
(x) У Пети
( ) У Васи
( ) Поровну

Чему была равна разница? Если вы считаете, что у мальчиков осталось поровну конфет, в ответ запишите 0.
Ответ: 12.

4. В 10 кружков на картинке расставили целые числа от 1 до 10, каждое по разу. Между некоторыми парами из них нарисовали стрелку или отрезок, руководствуясь следующими правилами:

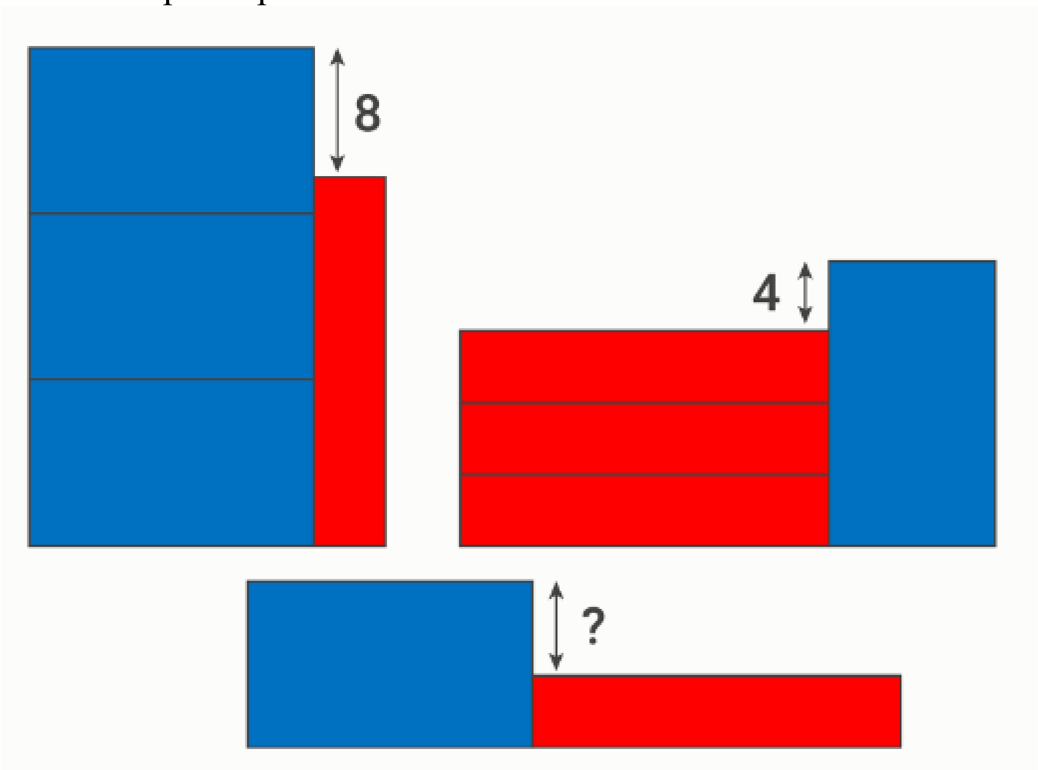


- Если одно число делится на другое, то от большего числа нарисовали стрелку к меньшему;
- Если ни одно число не делится на другое, то между ними нарисовали отрезок.

Затем все исходные числа стёрли. Восстановите, где какое число стояло.
В ответ запишите в произвольном порядке 5 чисел, которые стояли в пяти серых кружках.
Ответ: 1, 3, 5, 6, 7.

5. По кругу стоят 36 натуральных чисел (не обязательно различных). Известно, что в каждой тройке подряд идущих чисел есть число, большее суммы двух других. Какое наименьшее значение может принимать сумма всех 36 чисел?
Ответ: 60.

6. На рисунке изображены прямоугольники с одинаковыми периметрами: синие и красные, причём одноцветные прямоугольники равны друг другу.
Два отмеченных отрезка равны 8 и 4 соответственно.



Найдите длину отрезка, обозначенного знаком «?».
Ответ: 6.

7. На доске в строчку выписаны семь красных целых чисел, среднее арифметическое которых равно 18. Паша собирается записать под каждым красным числом синее целое число, отличающееся от него не более чем на 3 (возможно, равное красному). Сколько различных значений (не обязательно целых) может принимать среднее арифметическое семи синих чисел?
Ответ: 43.

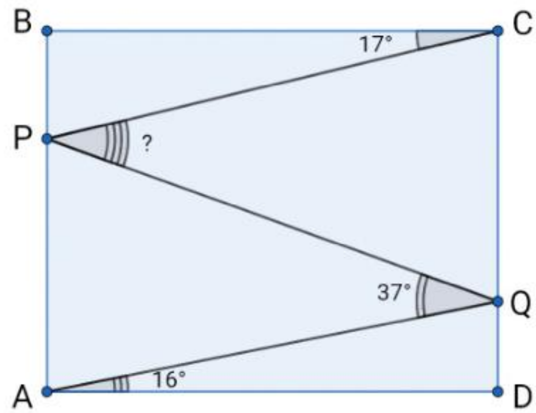
8. У Коли есть 100 монет и доска $m \times n$, где $m \geq n$ и $\mathrm{m} > 1$. Он разложил все монеты в клетки доски так, что в любых двух соседних по стороне клетках суммарно оказалось ровно 10 монет (в каких-то клетках могло оказаться несколько монет, а какие-то клетки могли оказаться пустыми). Какие значения может принимать m? Укажите все возможные варианты.
Ответ: 5, 7, 10, 19, 20, 21.

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
МАТЕМАТИКА. 2023–2024 уч. г.
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП. 8 КЛАСС

ЗАДАНИЯ, ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

1. В понедельник у Семёна был день рождения, ему подарили некоторое количество рублей. Он решил не тратить все деньги сразу. Со вторника по субботу он тратил каждый день по 20 % от текущей суммы. Сколько рублей он потратил в четверг, если в пятницу его траты составили 384 рубля?
Ответ: 480.

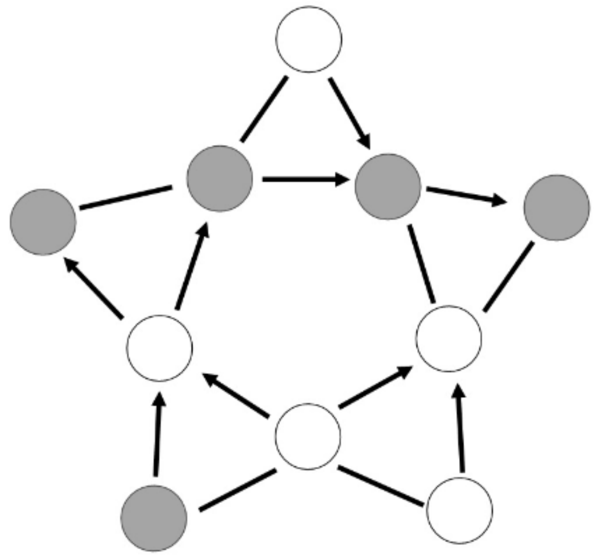
2. На стороне AB прямоугольника $ABCD$ выбрана точка P, а на стороне CD — точка Q. Известно, что $\angle BCP = 17°$, $\angle AQP = 37°$, $\angle QAD = 16°$.
Сколько градусов составляет $\angle CPQ$?



Ответ: 38.

3. Учитель написал на доске четыре **различных** целых числа. Отличник Паша перемножил какие-то три из них и получил 37, а отличник Ваня перемножил какие-то три из них и получил 74. Какое наименьшее значение может принимать сумма четырёх чисел на доске?
Ответ: –111.

4. В 10 кружков на картинке расставили целые числа от 0 до 9, каждое по разу.



Между некоторыми парами из них нарисовали стрелку или отрезок, руководствуясь следующими правилами:

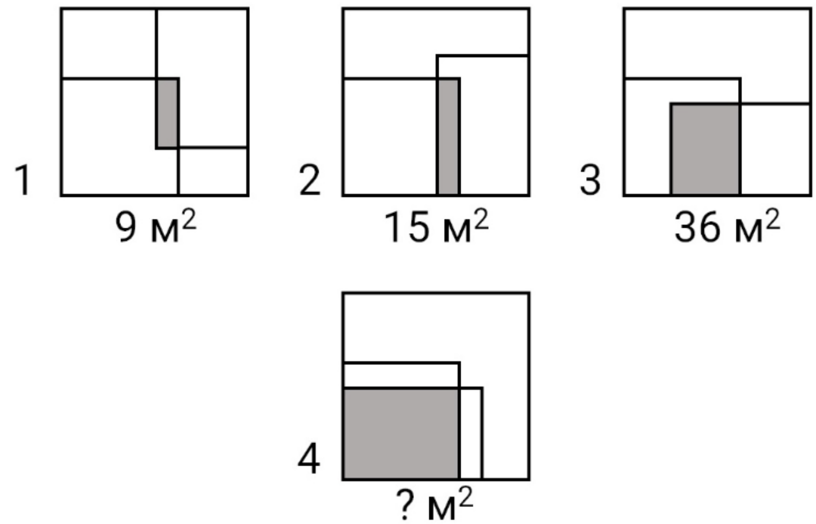
- Если числа отличаются хотя бы на 2, то от меньшего числа нарисовали стрелку к большему;
- Если числа отличаются на 1, то между ними нарисовали отрезок.

Затем все исходные числа стёрли. Восстановите, где какое число стояло.
В ответ запишите в произвольном порядке 5 чисел, которые стояли в пяти серых кружках.
Ответ: 1, 5, 6, 7, 9.

5. В течение нескольких дней Дима ходил в кафе и каждый раз выбирал там себе комбо-обед. При заказе комбо-обеда нужно выбрать один из нескольких супов, один из нескольких салатов и одно из 13 горячих блюд. За все дни каждый из возможных комбо-обедов Дима либо заказывал 1 раз, либо не заказывал вовсе.

Известно, что один вид горячего он заказывал ровно 1 раз, второй вид — ровно 2 раза, ..., тринадцатый вид — ровно 13 раз, а каждую возможную комбинацию «суп +салат» он попробовал ровно 1 раз. Известно, что салатов больше, чем супов.
Сколько супов предлагается на выбор при заказе комбо-обеда?
Ответ: 7.
Сколько салатов предлагается на выбор при заказе комбо-обеда?
Ответ: 13

6. В большой квадратный зал купили два ковра: прямоугольный и квадратный. Квадратный ковёр положили в угол комнаты, а прямоугольный попробовали положить несколькими способами, как показано на рисунке. Площадь комнаты, накрытая коврами в два слоя, в первых трёх случаях составляла 9 м^2, 15 м^2 и 36 м^2 соответственно.



Чему равна площадь комнаты, накрытая коврами в два слоя, в четвёртом случае? Ответ выразите в квадратных метрах.
Ответ: 60.

7. На острове живут лжецы, которые всегда лгут, и хитрецы, которые могут говорить что угодно. Однажды 30 жителей острова собрались на заседание. Все они по очереди сделали заявления:

- 1-й человек: «*Среди нас менее 1 хитреца*»;
- 2-й человек: «*Среди нас менее 2 хитрецов*»;
- ...
- 15-й человек: «*Среди нас менее 15 хитрецов*»;
- 16-й человек: «*Среди нас более 1 хитреца*»;
- 17-й человек: «*Среди нас более 2 хитрецов*»;
- ...
- 30-й человек: «*Среди нас более 15 хитрецов*».

Какое наибольшее количество лжецов могло быть на этом заседании?
Ответ: 16.

8. За год каждый из восьмиклассников гимназии № 1 получил по алгебре либо 8, либо 10 оценок (все оценки — от 2 до 5). Известно, что у любых двух восьмиклассников средние баллы по алгебре за год различны. Какое наибольшее количество восьмиклассников может быть в этой гимназии?
Средний балл — это сумма всех оценок ученика, делённая на их количество.
Ответ: 49.

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
МАТЕМАТИКА. 2023–2024 уч. г.
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП. 9 КЛАСС

ЗАДАНИЯ, ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

1. Мотоциклист Вася запланировал поездку из пункта А в пункт Б с постоянной скоростью. Первую половину пути он проехал со скоростью v_1 — на 15 % меньшей, чем хотел. Затем он увеличил скорость до v_2 и приехал в пункт Б точно в тот момент, в какой и планировал. Найдите v_2/v_1.
Ответ: 10/7.

2. В пиццерии в каждую пиццу обязательно кладут помидоры и моцареллу. При заказе пиццы надо выбрать одну или несколько начинок: ветчину, грибы, салями или курицу. Также надо выбрать размер пиццы — 25, 30, 35 или 40 сантиметров. Сколько вариантов пиццы можно заказать в пиццерии?
Пиццы считаются разными, если они имеют разные размеры или различаются хотя бы одним видом начинки.
Ответ: 60.

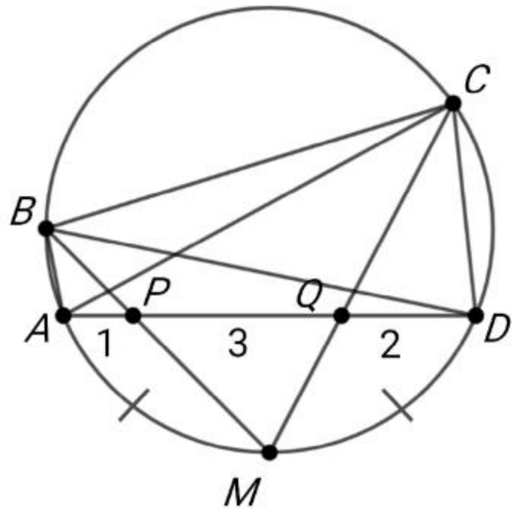
3. Рассмотрим 450 чисел, состоящих из одних девяток:
$$9,\ 99,\ 999,\ \ldots,\ \underbrace{999\ldots9}_{450}.$$
Сколько единиц в десятичной записи суммы этих 450 чисел?
Ответ: 447.

4. Петя задумал составное натуральное число N, меньшее 1000.Он выписал на доску все натуральные делители N, не равные 1. Оказалось, что два наименьших числа на доске различаются на 39.
Чему может быть равно N?
Укажите все возможные варианты.
Ответ: 82.

5. В выпуклом n-угольнике каждый угол составляет целое число градусов. Известно, что два угла этого n-угольника равны 63° и 97°. Какое наибольшее значение может принимать n?
Ответ: 162.

6. Действительное число a таково, что уравнение $ax^2 + (a + 10)x - 10 - 2a = 0$ имеет два действительных корня, отличающихся в 3 раза. Чему может быть равно a? Укажите все возможные варианты.
Ответ: –2, –30/7.

7. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность Ω. Точка M — середина дуги AD окружности Ω, не содержащей точек B и C. Отрезки BM и CM пересекают отрезок AD в точках P и Q соответственно.



Известно, что $AP : PQ : QD = 1 : 3 : 2$.
Вычислите значение выражения:

$$\frac{AC \cdot BD}{AB \cdot CD}.$$

Ответ: 10.

8. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды собралось несколько жителей острова, и каждый из них произнёс по одной фразе:

- Один сказал: «*Среди нас не более 9 рыцарей*».
- Двое сказали: «*Среди нас не более 8 рыцарей*».
- Трое сказали: «*Среди нас не более 7 рыцарей*».
- ...
- Девять человек сказали: «*Среди нас не более 1 рыцаря*».
- А все остальные сказали: «*Среди нас не более 10 рыцарей*».

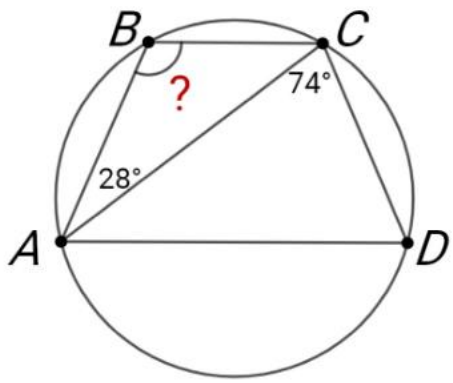
Сколько человек могло сказать последнюю фразу? Укажите все возможные варианты.
Ответ: 1, 5, 8, 10.

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
МАТЕМАТИКА. 2023–2024 уч. г.
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП. 10 КЛАСС

ЗАДАНИЯ, ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

1. Действительные числа a, b, c, d таковы, что $|a-b| = |b-c| = |c-d| = 5$. Чему может быть равно значение выражения $|a-d|$? Укажите все возможные варианты.
Ответ: 5, 15.

2. В окружность вписана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD. Известно, что $\angle$ BAC = 28° < и $\angle ACD = 74°$. Сколько градусов составляет $\angle ABC$?



Ответ: 113.

3. На окружности красным цветом записали четыре различных натуральных числа. На дуге между каждыми двумя соседними красными числами записали синим цветом их произведение. Известно, что сумма всех четырёх синих чисел равна 1133. Найдите сумму всех красных чисел.
Ответ: 114.

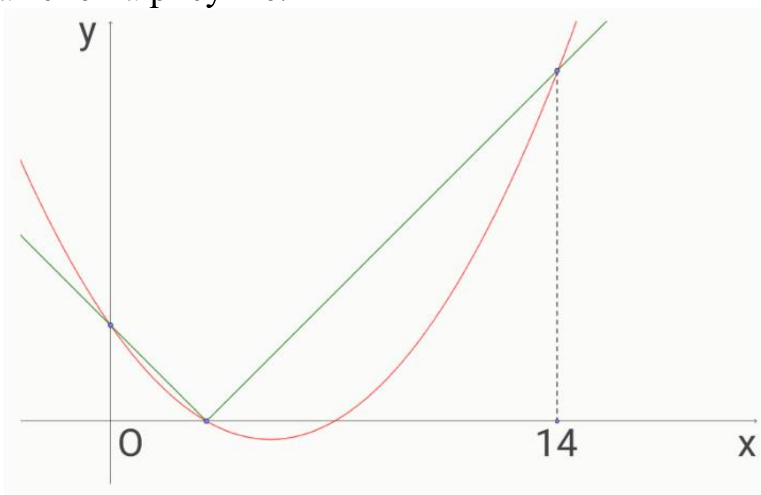
4. Школьники Анна, Богдан, Вероника, Герман и Диана собирали грибы. Известно следующее:

- Всего было собрано 30 грибов;
- Мальчики собрали грибов суммарно столько же, сколько и девочки;
- Богдан собрал грибов больше, чем любые два других школьника вместе взятые;
- Анна собрала грибов столько же, сколько Герман и Диана вместе взятые;
- Кто-то собрал ровно 8 грибов.

Кто сколько грибов собрал?
Ответ: Анна: 4; Богдан: 14; Вероника: 8; Герман: 1; Диана: 3.

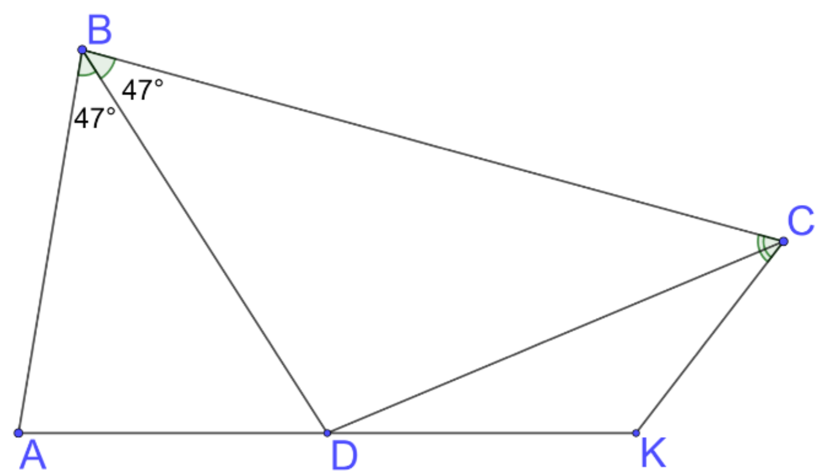
5. Петя записал на доску два целых числа. Каждую минуту Вася записывал на доску новое число, равное сумме двух каких-то чисел на доске. Спустя пять минут на доске оказались числа 21, 15, 12, 9, 6, 3,−3.
Выберите все числа, которые гарантированно были записаны Васей:
Ответ: 21; 3.

6. График функции $y = ax^2 + bx + c$ пересекает график функции $y = |x - 3|$ в трёх точках, как изображено на рисунке.



Оказалось, что абсцисса самой правой точки пересечения равна 14. Найдите a.
Ответ: 1/7.

7. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ таков, что $\angle ABD = \angle CBD = 47°$. Точка K такова, что точка D является серединой отрезка AK.
Оказалось, что $BC = AB + CK$.



Сколько градусов составляет $\angle BCK$?
Ответ: 86.

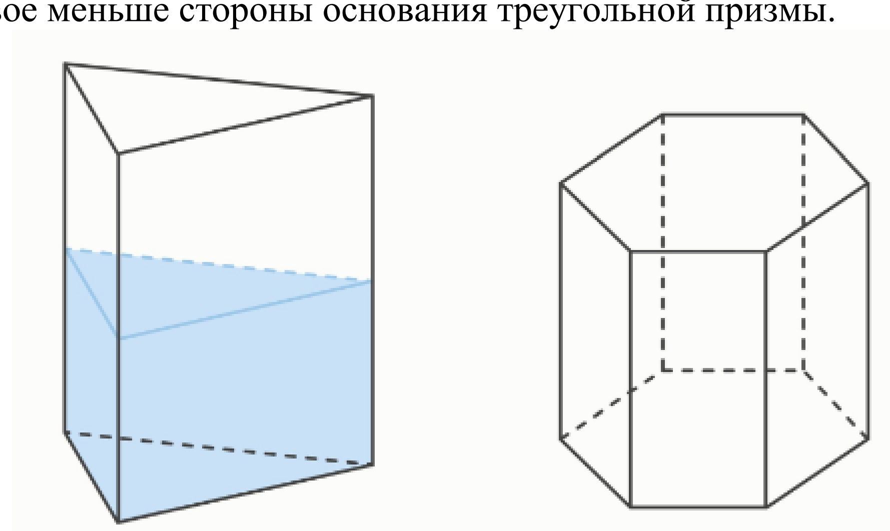
8. В клетках таблицы 11×11 расставили числа от 1 до 121, каждое по разу. В каждой строке все числа идут по возрастанию слева направо, и в каждом столбце все числа идут по возрастанию сверху вниз. Назовём число *особым*, если оно отличается от каждого своего соседа хотя бы на 2. Какое наибольшее количество *особых* чисел может быть?
Числа являются соседями, если они стоят в соседних по стороне клетках.
Ответ: 117.

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
МАТЕМАТИКА. 2023–2024 уч. г.
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП. 11 КЛАСС

ЗАДАНИЯ, ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

1. Девять действительных a_1, a_2, ..., a_9 образуют арифметическую прогрессию. Известно, что a_9 в 3 раза больше среднего арифметического этих девяти чисел. Найдите a_1, если известно, что $a_4 = 6$.
Ответ: –12.

2. В сосуде, имеющем форму правильной треугольной призмы, находилась вода, причём её уровень составлял 30 сантиметров. Всю эту воду перелили в пустой сосуд, имеющий форму правильной шестиугольной призмы, сторона основания которой вдвое меньше стороны основания треугольной призмы.



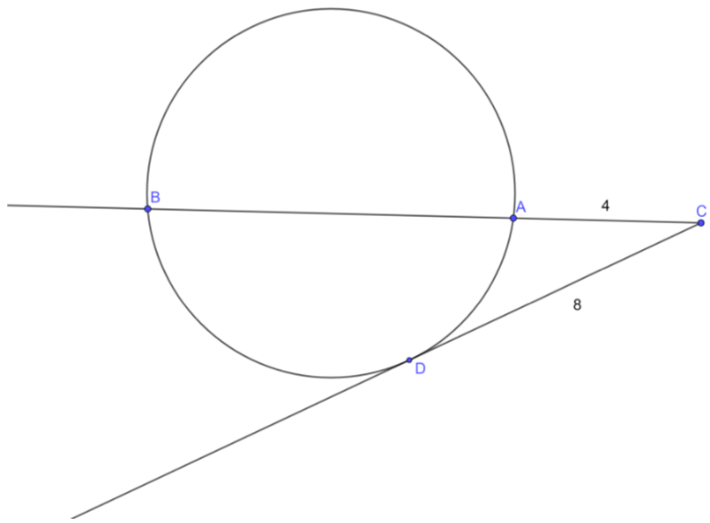
Чему равен уровень воды теперь? Ответ выразите в сантиметрах.
Ответ: 20.

3. Андрей, Борис и Влад зашли в магазин. Андрей купил 1 мороженое, 2 булочки и 3 шоколадки и заплатил за это 235 рублей. Борис купил 3 порции мороженого, 2 булочки и 1 шоколадку и заплатил за это 205 рублей. Сколько рублей должен будет заплатить Влад, если он купит 6 порций мороженого, 5 булочек и 4 шоколадки?
Ответ: 535.

4. Каждая клетка таблицы 11×11 покрашена в один из трёх цветов: красный, синий или зелёный. Известно, что одноцветные клетки не граничат по стороне, а также что красные и синие клетки не граничат по стороне. Сколько зелёных клеток может быть в таблице? Укажите все возможные варианты.
Ответ: 60, 61.

5. Найдите наибольшее натуральное число, которое в 9 раз больше своего остатка от деления на 1024.
Ответ: 8064.

6. Даны окружность ω радиуса 6 и точка *C*, лежащая вне её. Из точки *C* провели касательную, касающуюся ω в точке *D*, и секущую, пересекающую ω в точках *A* и *B*. Оказалось, что $CD = 8$ и $AC = 4$. Найдите площадь треугольника *BCD*.



Ответ: 38.4.

7. В стране 15 городов. Между каждыми двумя из них либо есть дорога, либо её нет. Оказалось, что для любого города *A* найдутся такие три города, что они между собой попарно не соединены дорогами, но каждый из них соединён дорогой с *A*. Какое наибольшее количество дорог может быть в этой стране?
Ответ: 99.

8. Три приведённых квадратных трёхчлена имеют одинаковые дискриминанты, большие 0. Все корни этих трёхчленов упорядочили по возрастанию, и получилось 6 различных целых чисел:

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6.$$

Известно, что $x_1 = 1$, $x_2 = 11$, $x_3 = 12$, $x_6 = 23$. Найдите x_4 и x_5.
Ответ: $x_4 = 13$, $x_5 = 22$.