

# XIV МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА имени ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

## Региональный этап

4 февраля 2022 г.

---

*8 класс.*

### *Первый день.*

1. Как без остатка разрезать клетчатый квадрат размером  $8 \times 8$  клеточек на 10 клетчатых прямоугольников, чтобы все прямоугольники имели различные площади? Все разрезы должны проходить по границам клеточек.
2. Учитель придумал ребус, заменив в примере  $a+b=c$  на сложение двух натуральных чисел цифры буквами: одинаковые цифры одинаковыми буквами, а разные — разными (например, если  $a=23$ , а  $b=528$ , то  $c=551$ , и получился, с точностью до выбора букв, ребус  $АБ+ВАГ = ВВД$ ). Оказалось, что по получившемуся ребусу однозначно восстанавливается исходный пример. Найдите наименьшее возможное значение суммы  $c$ .
3. В треугольнике  $ABC$  проведены биссектрисы  $BK$  и  $CL$ . На отрезке  $BK$  отмечена точка  $N$  так, что  $LN \parallel AC$ . Оказалось, что  $NK = LN$ . Найдите величину угла  $ABC$ .
4. Числа  $1, 2, \dots, 1000$  разбили на два множества по 500 чисел: красные  $k_1, k_2, \dots, k_{500}$  и синие  $s_1, s_2, \dots, s_{500}$ . Докажите, что количество таких пар  $m$  и  $n$ , у которых разность  $k_m - s_n$  дает остаток 7 при делении на 100, равно количеству таких пар  $m$  и  $n$ , у которых разность  $s_n - k_m$  дает остаток 7 при делении на 100. Здесь рассматриваются **все** возможные разности, в том числе и отрицательные.  
Напомним, что остатком от деления целого числа  $a$  на 100 называется разность между числом  $a$  и ближайшим числом, не большим  $a$  и делящимся на 100. Например, остаток от деления числа 2022 на 100 равен  $2022 - 2000 = 22$ , а остаток от деления числа  $-11$  на 100 равен  $-11 - (-100) = 89$ .
5. При каком наибольшем  $n$  существует выпуклый  $n$ -угольник, у которого длины диагоналей принимают не больше двух различных значений?

# XIV МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА имени ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

## Региональный этап

5 февраля 2022 г.

---

*8 класс.*

### *Второй день.*

6. Сумма остатков от деления трёх последовательных натуральных чисел на 2022 — простое число. Докажите, что одно из чисел делится на 2022.
7. Существует ли треугольник, у которого длины не совпадающих между собой медианы и высоты, проведенных из одной его вершины, соответственно равны длинам двух сторон этого треугольника?
8. Будем называть натуральное число *красивым*, если в его десятичной записи поровну цифр 0, 1, 2, а других цифр нет (во избежание недоразумений напомним, что десятичная запись числа не может начинаться с нуля). Может ли произведение двух красивых чисел быть красивым?
9. Петя и Вася написали на доске по 100 различных натуральных чисел. Петя поделил все свои числа на Васины с остатком и выписал все 10000 получившихся остатков себе в тетрадь. Вася поделил все свои числа на Петины с остатком и выписал все 10000 получившихся остатков себе в тетрадь. Оказалось, что наборы выписанных Васей и Петей остатков совпадают. Докажите, что тогда и наборы их исходных чисел совпадают.
10. В вершины правильного 100-угольника поставили 100 фишек, на которых написаны номера 1, 2, ..., 100, именно в таком порядке по часовой стрелке. За ход разрешается обменять местами некоторые две фишки, стоящие в соседних вершинах, если номера этих фишек отличаются не более чем на  $k$ . При каком наименьшем  $k$  серией таких ходов можно добиться расположения, в котором каждая фишка сдвинута на одну позицию по часовой стрелке по отношению к своему начальному положению?