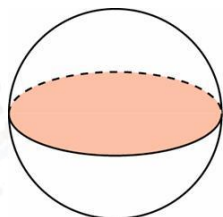


4 Найдите значение выражения

$$\frac{\sqrt{1,2} \cdot \sqrt{1,4}}{\sqrt{0,42}}$$

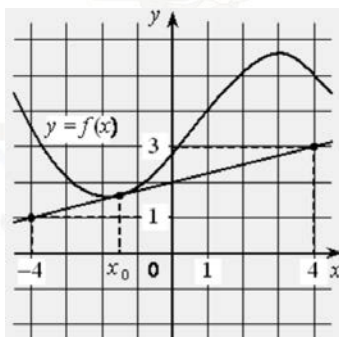
Ответ: _____.

5 Площадь поверхности шара равна 12. Найдите площадь большого круга шара.



Ответ: _____.

6 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



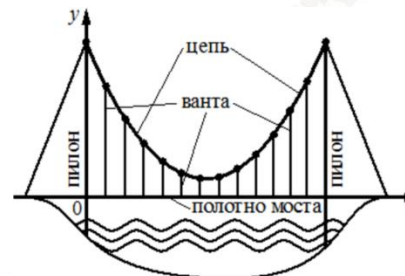
Ответ: _____.

7 На рисунке изображена схема моста. Вертикальные *пилоны* связаны провисающей *цепью*. Тросы, которые свисают с цепи и поддерживают *полотно* моста, называются *вантами*.

Введём систему координат: ось Oy направим вертикально вверх вдоль одного из пилонов, а ось Ox направим вдоль полотна моста, как показано на рисунке. В этой системе координат линия, по которой провисает цепь моста, задаётся формулой

$$y = 0,0043x^2 - 0,74x + 35,$$

где x и y измеряются в метрах. Найдите длину ванта, расположенной в 70 метрах от пилона. Ответ дайте в метрах.



Ответ: _____.

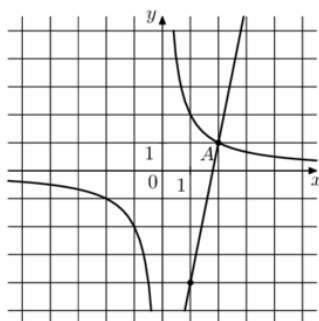
8 Первые 120 км автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, следующие 200 км – со скоростью 100 км/ч, а затем 160 км – со скоростью 120 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

vk.com/ege100ballov



- 9 На рисунке изображены графики функций $f(x) = \frac{k}{x}$ и $g(x) = ax + b$, которые пересекаются в точках A и B . Найдите абсциссу точки B .



Ответ: _____.

- 10 На фабрике керамической посуды 20% произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 55% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Ответ округлите до сотых.

Ответ: _____.

- 11 Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(x + 6)^3 - 3x$ на отрезке $[-5, 5; 0]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 12 а) Решите уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x + 5 \operatorname{tg} x + 6 = 0.$$

- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$$\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right].$$

- 13 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 3, а боковое ребро AA_1 равно $\sqrt{2}$. На рёбрах AB , A_1B_1 и B_1C_1 отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM = B_1N = C_1K = 1$.

- а) Пусть L – точка пересечения плоскости MNK с ребром AC . Докажите, что $MNKL$ – квадрат.
 б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK .

- 14 Решите неравенство

$$(9^x - 2 \cdot 3^x)^2 - 62 \cdot (9^x - 2 \cdot 3^x) - 63 \geq 0.$$

- 15 В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на сумму 300 000 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Найдите r , если известно, что кредит будет полностью погашен за два года, причём в первый год будет выплачено 160 000 рублей, а во второй год – 240 000 рублей.

vk.com/ege100ballov



16 В прямоугольную трапецию $ABCD$ с прямым углом при вершине A и острым углом при вершине D вписана окружность с центром O . Прямая DO пересекает сторону AB в точке M , а прямая CO пересекает сторону AD в точке K .

- а) Докажите, что $\angle AMO = \angle DKO$.
- б) Найдите площадь треугольника AOM , если $BC = 10$ и $AD = 15$.

17 Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{xy^2 - xy - 4y + 4}{\sqrt{x + 2}} = 0, \\ y = x + a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

18 В каждой клетке квадратной таблицы 6×6 стоит натуральное число, меньшее 7. Вася в каждом столбце находит наименьшее число и складывает шесть найденных чисел. Петя в каждой строке находит наименьшее число и складывает шесть найденных чисел.

- а) Может ли сумма у Пети получиться в два раза больше, чем сумма у Васи?
- б) Может ли сумма у Пети получиться в шесть раз больше, чем сумма у Васи?
- в) В какое наибольшее число раз сумма у Пети может быть больше, чем сумма у Васи?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

О проекте «Пробный ЕГЭ каждую неделю»

Данный ким составлен командой всероссийского волонтерского проекта «ЕГЭ 100 баллов» <https://vk.com/ege100ballov> и безвозмездно распространяется для любых некоммерческих образовательных целей.

Нашли ошибку в варианте?

Напишите нам, пожалуйста, и мы обязательно её исправим!

Для замечаний и пожеланий: https://vk.com/topic-10175642_47937899
(также доступны другие варианты для скачивания)



















СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:

ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	10 лет готовлю к ЕГЭ и ОГЭ
Регалии:	Набрал 98 баллов на ЕГЭ по математике (профиль) 55 учеников набрали 90-100 баллов на ЕГЭ 2021 Высшее образование (ТГУ, 2009-2014) Победитель трёх олимпиад по высшей математике
Аккаунт и группа ВК:	https://vk.com/eugene10 https://vk.com/shkolapifagora
Ютуб и инстаграм:	https://www.youtube.com/c/pifagor1 https://www.instagram.com/shkola_pifagora/



Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Каждое из заданий 1–11 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Верный ответ на каждое задание оценивается 1 баллом.

Номер задания	Правильный ответ	Видео решение
1	9	
2	0,5	
3	96	
4	2	
5	3	
6	0,25	
7	4,27	
8	90	
9	-0,2	
10	0,9	
11	15	
12	а) $-\arctg 3 + \pi n, -\arctg 2 + \pi n; n \in Z$ б) $-\pi - \arctg 2; -\pi - \arctg 3$	
13	3,75	
14	$\{0\} \cup [2; +\infty)$	
15	20	
16	30	
17	$\{-3\} \cup [0; 3)$	
18	а) да б) нет в) $31/6$	

Решения и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 12–18, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.



12 а) Решите уравнение $\text{tg}^2 x + 5 \text{tg} x + 6 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\frac{\pi}{2}]$.

а) Пусть $\text{tg} x = t$

$$t^2 + 5t + 6 = 0$$

$$t = -2 \quad t = -3$$

$$\text{tg} x = -2 \quad \text{tg} x = -3$$

$$x = -\arctg 2 + \pi n \quad x = -\arctg 3 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

б) Отбросим корни с помощью окружности $\sin x$

ОТВЕТ: а) $-\arctg 2 + \pi n, -\arctg 3 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
 б) $[-\pi - \arctg 2; -\pi - \arctg 3]$

Источники:
 ФИПИ (старый банк)
 Ященко 2020 (36 вар)
 Ященко 2020 (50 вар)
 Ященко 2019 (36 вар)
 Ященко 2018 (20 вар)

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

13 В правильной треугольной призме $ABC A_1 B_1 C_1$ сторона основания AB равна 3, а боковое ребро AA_1 равно $\sqrt{2}$. На ребрах $AB, A_1 B_1$ и $B_1 C_1$ отмечены точки M, N и K соответственно, причём $AM = B_1 N = C_1 K = 1$.

а) Пусть L — точка пересечения плоскости MNK с ребром AC . Докажите, что $MNKL$ — квадрат.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK .

а) Пусть L — точка пересечения плоскости MNK с ребром AC . Докажите, что $MNKL$ — квадрат.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK .

① $NK = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$
 $MN = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

② Заметим, что в $\triangle B_1 N K$ вып. т. Пифагорова $\Rightarrow \angle B_1 N K = 90^\circ$

③ $NK \parallel ML$ (т.к. на сеч. пересек. напр. по пар. пл.) $\Rightarrow \angle BML = 90^\circ \Rightarrow \angle AML = 90^\circ$

④ $\triangle AML$: $AL = 2 \cdot AM = 2 \Rightarrow \angle L = 30^\circ$
 $ML = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$

⑤ $KL = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

⑥ $NL = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$
 $KM = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$
 $\Rightarrow MNKL$ — ромб с равными диаг. $\sqrt{5}$ и $\sqrt{8}$ — квадрат

⑦ $S_{\text{сеч.}} = S_{\triangle MNK} + S_{\triangle KLE}$

① $\triangle CLP$: $\angle CLP = 30^\circ$
 $\angle LCP = 120^\circ \Rightarrow \angle LPC = 30^\circ \Rightarrow PC = LC = 1$

② $\triangle CEP = \triangle LKE$ по 2 углам $\Rightarrow E$ — середина $CC_1 \Rightarrow CE = \frac{\sqrt{2}}{2} = LE$

③ $KE = \sqrt{1^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} = LE$

④ $\triangle KLE$ — равност.

$S_{\text{сеч.}} = \sqrt{5}^2 + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3,75$

Источники:
 ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Досрочная волна 2016
 Горюхи #14 2019

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ	1

vk.com/ege100ballov

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 211115

обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

14 Решите неравенство $(9^x - 2 \cdot 3^x)^2 - 62 \cdot (9^x - 2 \cdot 3^x) - 63 \geq 0$.

Источники:

Основная волна 2021
Досрочная волна (Резерв) 2017

Пусть $(9^x - 2 \cdot 3^x) = t$

$$t^2 - 62t - 63 \geq 0$$

$$\begin{cases} t \leq -1 \\ t \geq 63 \end{cases}$$

$$9^x - 2 \cdot 3^x \leq -1 \quad 9^x - 2 \cdot 3^x - 63 \geq 0$$

$$9^x - 2 \cdot 3^x + 1 \leq 0$$

Пусть $3^x = a$

$$a^2 - 2a + 1 \leq 0 \quad a^2 - 2a - 63 \geq 0$$

$$(a-1)^2 \leq 0$$

$$a-1=0$$

$$a=1$$

ОТВЕТ: $\{0\} \cup [2; +\infty)$

$$\begin{cases} a = 1 \\ a \leq -1 \\ a \geq 9 \end{cases}$$

$$3^x = 1 \quad 3^x \leq -1 \quad 3^x \geq 3^2$$

$$x = 0 \quad \emptyset \quad x \geq 2$$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

15 В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на сумму 300 000 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Найдите r , если известно, что кредит будет полностью погашен за два года, причём в первый год будет выплачено 160 000 рублей, а во второй год – 240 000 рублей.

Источники:

ГРП (старый банк)
ГРП (новый банк)
Янченко 2021 (36 вар)
Янченко 2020 (36 вар)
Янченко 2019 (36 вар)
Семенов 2015
Основная волна 2020
Основная волна 2017
Основная волна 2015

Пусть β – месяц июля

$$\left(1 + \frac{r}{100}\right) = \beta$$

Дата	Сумма долга
И 20	300 тыс
Я 21	$300 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right) = 300 \cdot \beta$
М 21	$300\beta - 160$
Я 22	$300\beta^2 - 160 \cdot \beta$
М 22	$300\beta^2 - 160\beta - 240 = 0 \quad :20$

$$15\beta^2 - 8\beta - 12 = 0$$

$$D = 64 + 720 = 28^2$$

$$\beta = \frac{8 \pm 28}{30}$$

$$\beta_1 < 0 \quad \beta_2 = \frac{36}{30} = 1,2$$

ОТВЕТ: 20

$$1 + \frac{r}{100} = 1,2$$

$$\frac{r}{100} = 0,2$$

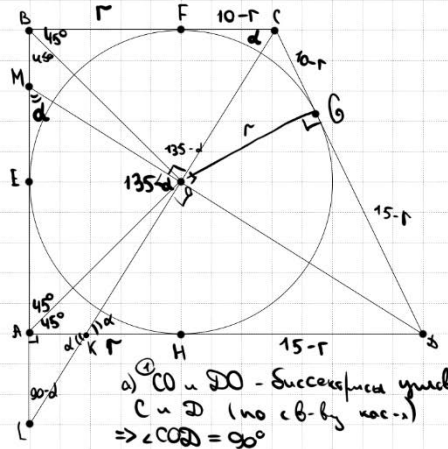
$$r = 20\%$$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2



16 В прямоугольную трапецию $ABCD$ с прямым углом при вершине A и острым углом при вершине D вписана окружность с центром O . Прямая DO пересекает сторону AB в точке M , а прямая CO пересекает сторону AD в точке K .

- а) Докажите, что $\angle AMO = \angle DKO$.
 б) Найдите площадь треугольника AOM , если $BC = 10$ и $AD = 15$.



Источники:
 Основная волна 2017
СВОЙСТВО КАСАТЕЛЬНЫХ
 Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны, и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

② Пусть $\angle BKO = d$
 Тогда $\angle AKC = d$
 $\angle ACK = 180 - 90 - d = 90 - d$

③ $\triangle AOM$:
 $\angle MOC = 180 - 90 - (90 - d) = d$
 $\Rightarrow \angle AMO = d = \angle BKO$

④ Пусть r - радиус окружности
 Тогда $BF = r = AH$
 $CF = 10 - r = CG$ (по св-ву кас-)
 $DK = 15 - r = DG$

ВЫСОТА В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ
 $h^2 = de$

② $\triangle COD$:
 $r^2 = (10 - r)(15 - r)$
 $r^2 = 150 - 25r + r^2$
 $r = 6$

③ $\triangle AOM = \triangle BOC$ по 2 пп.
 $\Rightarrow S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 = 30$

ОТВЕТ: 30

Максимальный балл 3

17 Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} xy^2 - xy - 4y + 4 = 0, \\ y = x + a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

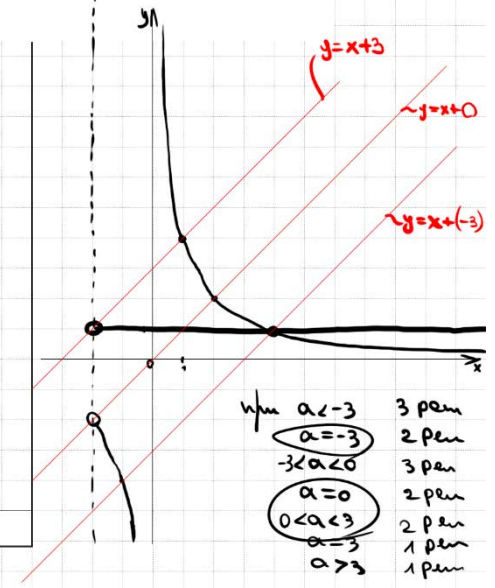
$\begin{cases} xy^2 - xy - 4y + 4 = 0 \\ x + 2 > 0 \\ y = x + a \end{cases}$

Упростим $xy^2 - xy - 4y + 4 = 0$
 $xy(y-1) - 4(y-1) = 0$
 $(y-1)(xy-4) = 0$

$\begin{cases} y = 1 \\ xy = 4 \end{cases}$
 $\begin{cases} y = 1 \\ y = x \\ x > -2 \end{cases}$
 $\begin{cases} y = 1 \\ y = x + a \end{cases}$

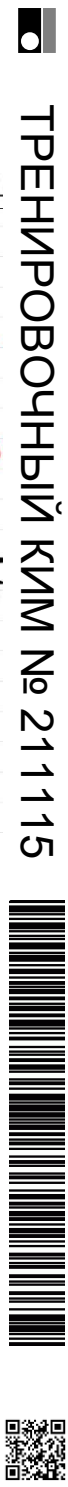
Получаем $\begin{cases} y = 1 \\ y = x \\ x > -2 \\ y = x + a \end{cases}$

ОТВЕТ: $\{-3\} \cup [0; 3]$



Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и обоснованно получен верный ответ в пункте b	3
Получен обоснованный ответ в пункте b ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта a , и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , ИЛИ при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4



18 В каждой клетке квадратной таблицы 6×6 стоит натуральное число, меньшее 7. Васа в каждом столбце находит наименьшее число и складывает шесть найденных чисел. Петя в каждой строке находит наибольшее число и складывает шесть найденных чисел.

Источники:
Основная волна (Резерв) 2017

- а) Может ли сумма у Пети получиться в два раза больше, чем сумма у Васи?
- б) Может ли сумма у Пети получиться в шесть раз больше, чем сумма у Васи?
- в) В какое наибольшее число раз сумма у Пети может быть больше, чем сумма у Васи?

а)

4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Петя = 12

Васа $1+1+1+1+1+1=6$

1) Сумма Васи min = 6
Сумма Пети max = 36 } единственной способ отличия в 6 раз

2) Если Петя получил 36 все числа в таблице д.е. 6, то тогда сумма Васи будет не 6, т.е. не меньше

3) Если сумма Васи min = 6, то Сумма Пети ≤ 31 ⇒ Отличие в $\frac{31}{6}$ раз

1	1	1	1	1	1
6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6

4) Если сумма Васи = 7, то отличие ≤ $\frac{36}{7}$

Сравним $\frac{31}{6} > \frac{36}{7}$
 $\frac{217}{42} > \frac{216}{42}$
⇒ $\frac{31}{6}$ - наибольшее отличие.

ОТВЕТ:

- а) Да
- б) Нет
- в) $\frac{31}{6}$

Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта а; – обоснованное решение пункта б; – искомая оценка в пункте в; – пример в пункте в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособнадзора от 07.11.2018 № 190/1512, зарегистрирован Минюстом России 10.12.2018 № 52952)

«82. <...> По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют баллы за каждый ответ на задания экзаменационной работы ЕГЭ с развернутым ответом. <...>

В случае существенного расхождения в баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения:

1) расхождение в баллах, выставленных двумя экспертами за выполнение любого из заданий 12–18, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только ответ на то задание, который был оценен двумя экспертами со столь существенным расхождением;

2) расхождения экспертов при оценивании ответов на хотя бы два из заданий 12–18. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2



ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 21 11 15

