Вариант 2.

Ответы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
754	400	0,8	0,06	6	4	1	5	16	45	342	6

Решения заданий 13-19

Задание 13

а) Решите уравнение $\dfrac{\log_2^2(\sin x)+\log_2(\sin x)}{2\cos x-\sqrt{3}}=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

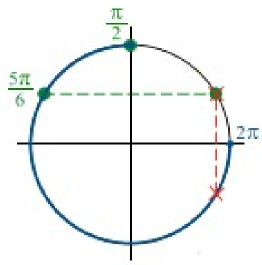
Решение.

а) Запишем уравнение в виде системы:

$$\begin{cases} \log_2(\sin x)(\log_2(\sin x)+1)=0, \\ 2\cos x-\sqrt{3}\neq 0. \end{cases}$$

Пусть $y=\log_2(\sin x)$. Получаем: $y(y+1)=0$, откуда $y=0$ или $y=-1$.

После обратной замены получаем $\log_2(\sin x)=0$ или $\log_2(\sin x)=-1$, то есть $\sin x=1$ или $\sin x=\dfrac{1}{2}$ при условии $\cos x\neq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Если $\sin x=\dfrac{1}{2}$, то $x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi n$ или $x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k,\ n\in\mathbb{Z}$. Числа $x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$, не удовлетворяют условию $\cos x\neq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Если $\sin x=1$, то $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$.



б) С помощью числовой окружности отберём корни на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{2}; 2\pi\right]$. Получим $x=\dfrac{5\pi}{6}$ или $x=\dfrac{\pi}{2}$.

Ответ: а) $x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi m,\ k,\ m\in\mathbb{Z}$; б) $\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5\pi}{6}$.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен правильный ответ	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта и *а* пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	**2**

Задание 14

В конусе с вершиной S и центром основания O радиус основания равен 13, а высота равна $3\sqrt{41}$. Точки A и B — концы образующих, M — середина SA, N — точка в плоскости основания такая, что прямая MN параллельна прямой SB.

а) Докажите что ANO — прямой угол.

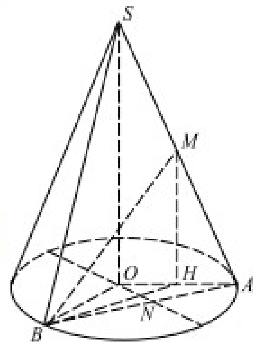
б) Найдите угол между MB и плоскостью основания, если дополнительно известно что $AB = 10$.

Решение.

а) Отрезок MN — средняя линяя треугольника ASB, так как он проходит через середину стороны AS параллельно стороне BS. Поэтому точка N — середина AB, и тогда отрезки ON и AB перпендикулярны, поскольку отрезок ON лежит на диаметре основания конуса, а диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам. Таким образом, угол ANO прямой.

б) Проведём в плоскости SOA отрезок MH параллельно SO, тогда MH — средняя линия треугольника SOA:

$$MH = \frac{1}{2}SO = \frac{3\sqrt{41}}{2}.$$



Прямая MH перпендикулярна основанию конуса, следовательно, BH — проекция MB на плоскость BOA, а тогда угол между MB и плоскостью основания это угол MBH. Заметим, что BH — медиана треугольника OBA и воспользуемся формулой для длины медианы:

$$BH = \frac{1}{2}\sqrt{2BO^2 + 2AB^2 - OA^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2\cdot 169 + 2\cdot 100 - 169} = \frac{1}{2}\sqrt{369} = \frac{3\sqrt{41}}{2}.$$

Тем самым, треугольник BHM прямоугольный и равнобедренный, поэтому угол MBH равен 45°.

Ответ: б) 45°.

Содержание критерия	Баллы
Приведено обоснованное верное доказательство в пункте а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	2
Выполнен только пункт а) или выполнен пункт б) при отсутствии обоснования пункта а)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	**2**

*Критерии распространяются и на случай использования координатного метода.

Задание 15

Решите неравенство $\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x)\le 0.$

Решение.

Определим область допустимых значений:

$$\begin{cases} x+2>0,\\ 3-x>0,\\ 2-x>0,\\ x+3>0,\\ 2-x\ne 1,\\ x+3\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2,\\ x<3,\\ x<2,\\ x>-3,\\ x\ne 1,\\ x\ne -2. \end{cases}$$

Таким образом $x \in (-2; 1) \cup (1; 2)$.

Воспользуемся функцией перехода логарифма к другому основанию, получим:

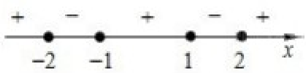
$$\frac{\ln(x+2)}{\ln(2-x)}\cdot\frac{\ln(3-x)}{\ln(x+3)}\le 0$$

И учитывая правило декомпозиции $\log_{\mathrm{a}} f \to (a-1)\cdot(f-1)$, где множитель $a-1>0$ можно сразу отбросить, получим

$$\frac{(x+2-1)\cdot(3-x-1)}{(2-x-1)\cdot(x+3-1)}\le 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(-x+2)}{(-x+1)(x+2)}\le 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}\le 0,$$

откуда следует, что

$$\begin{cases} x=-1,\\ x\ne 1,\\ x\ne 2,\\ x\ne -2. \end{cases}$$



Ответ: $x \in (-2; -1] \cup (1; 2)$.

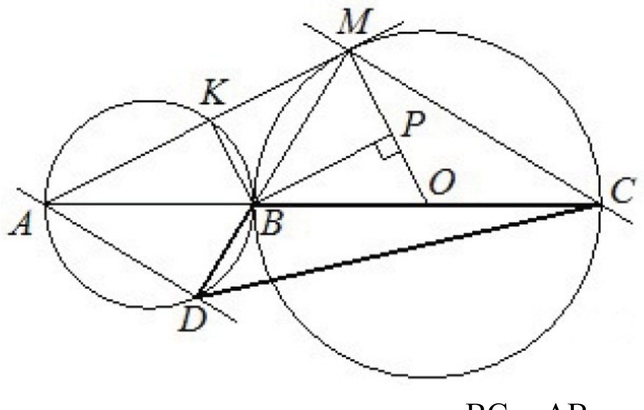
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Допущена единичная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	**2**

Задание 16. Точка B лежит на отрезке AC. Прямая, проходящая через точку A, касается окружности с диаметром BC в точке M и второй раз пересекает окружность с диаметром AB в точке K. Продолжение отрезка BM пересекает окружность с диаметром AB в точке D.

а) Докажите, что прямые AD и MC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника DBC, если $AK = 3$ и $MK = 12$.

Решение.



а) Точки M и D лежат на окружностях с диаметрами BC и AB соответственно, поэтому

$$\angle BMC = \angle BDA = 90^\circ.$$

Прямые AD и MC перпендикулярны одной и той же прямой MD, следовательно, прямые AD и MC параллельны.

б) Пусть O - центр окружности с диаметром BC. Тогда прямые OM и AM перпендикулярны. Учитывая, что прямые BK и AM перпендикулярны, получаем, что прямые OM и BK параллельны. Обозначим BK через x. Треугольник AMO подобен треугольнику AKB с коэффициентом 5, поэтому OB = OM = 5x. Опустим перпендикуляр BP из точки B на прямую OM. Так как четырёхугольник BKMP - прямоугольник, то:

$$BP = KM = 12,\ OP = OM - MP = OM - BK = 5x - x = 4x.$$

По теореме Пифагора имеем $OB^2 = BP^2 + OP^2$, тогда $25x^2 = 144 + 16x^2$. Получаем, что $x = 4$.

Поскольку прямые AD и MC параллельны,

$$S_{DBC} = S_{MDC} - S_{MBC} = S_{MAC} - S_{MBC} = S_{ABM}.$$

Значит, треугольники DBC и AMB равновелики. Следовательно,

$$S_{DBC} = S_{ABM} = \frac{1}{2} AM \cdot BK = \frac{1}{2} \cdot 15x = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 4 = 30.$$

Ответ: 30.

Содержание критерия	**Баллы**
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	**3**

Задание 17. 31 декабря 2019 года Тимофей взял в банке 7007000 рублей в кредит под 20% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20%), затем Тимофей переводит в банк платёж. Весь долг Тимофей выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?

Решение.

Пусть сумма кредита равна S, а годовые составляют a%. Тогда 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $b = 1 + 0{,}01a$. После первой выплаты сумма долга составит $S_1 = Sb - X$, где X - сумма выплаты. После второй выплаты сумма долга составит

$$S_2 = S_1 b - X = (Sb - X)b - X = Sb^2 - (1+b)X.$$

После третей выплаты сумма оставшегося долга равна

$$S_3 = Sb^3 - (1 + b + b^2)X = Sb^3 - \frac{b^3 - 1}{b - 1}X.$$

По условию тремя выплатами Тимофей погасил кредит полностью, поэтому

$$Sb^3 - \frac{b^3 - 1}{b - 1}X = 0.$$

Откуда $X = \dfrac{Sb^3(b-1)}{b^3 - 1}$.

Рассуждая аналогично, находим, что если бы Тимофей гасил долг двумя равными выплатами, то каждый год он должен был бы выплачивать $Y = \dfrac{Sb^2}{b+1}$ рублей. Значит, он отдал банку на $3X - 2Y$ больше.

При $S = 7007000$ и $a = 20$ получаем: $b = 1{,}2$ и

$$X = \frac{7007000 \cdot 1{,}728 \cdot 0{,}2}{0{,}728} = 3326400 \text{ (рублей).}$$

$$Y = \frac{7007000 \cdot 1{,}44}{2{,}2} = 4586400 \text{ (рублей).}$$

Значит, $3X - 2Y = 806400$.

Ответ: 806400.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	3
Условие задачи верно сведено к решению математической (вычислительной, алгебраической, геометрической и т.д.) задачи, но получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано.	2
Условие задачи верно сведено к решению математической (вычислительной, алгебраической, геометрической и т.д.) задачи, но при этом решение не завершено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше.	0
Максимальный балл	**3**

Задание 18

Найти все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{2x-1}\ln(4x-a)=\sqrt{2x-1}\ln(5x+a).$$

имеет ровно один корень на отрезке [0; 1].

Решение.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{2x-1}(\ln(5x+a)-\ln(4x-a))=0$ и рассмотрим два случая.

Первый случай: $\sqrt{2x-1}=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ является корнем при выполнении условий

$$\begin{cases}5x+a>0,\\ 4x-a>0.\end{cases}$$

То есть, если

$$\begin{cases}a+\dfrac{5}{2}>0,\\ 2-a>0\end{cases} \Leftrightarrow -\frac{5}{2}<a<2.$$

Второй случай:

$$\begin{cases}\ln(5x+a)-\ln(4x-a)=0,\\ 2x-1\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5x+a=4x-a,\\ 4x-a>0,\\ 2x-1\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2a,\\ -9a>0,\\ -4a-1\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2a,\\ a\leq -\dfrac{1}{4}.\end{cases}$$

Корень $x=-2a$ удовлетворяет условию и лежит на отрезке [0; 1] при $-\dfrac{1}{2}\leq a\leq -\dfrac{1}{4}$.

Корни уравнения $x=\dfrac{1}{2}$ и $x=-2a$ совпадают при $a=-\dfrac{1}{4}$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно один корень на отрезке [0; 1] при $-\dfrac{5}{2}<a<-\dfrac{1}{2}$ и $-\dfrac{1}{4}\leq a<2$.

Ответы: $-\dfrac{5}{2}<a<-\dfrac{1}{2}$; $-\dfrac{1}{4}\leq a<2$.

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся включением/исключением точек $a=-\frac{1}{2}$ и/или $a=-\frac{1}{4}$	3
В решении верно найдены все граничные точки $a=-\frac{5}{2}$, $a=-\frac{1}{2}$, $a=-\frac{1}{4}$, $a=2$, но неверно определены промежутки ИЛИ верно пройдены все этапы решения, но неверно найдены граничные точки множества значений a из-за вычислительной ошибки	2
Верно рассмотрен хотя бы один из случаев решения и верно получен один из промежутков, входящих в решение, возможно за исключением граничных точек	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	**4**

Задание 19

Вася и Петя решали задачи из сборника, причем каждый следующий день Вася решал на одну задачу больше, чем в предыдущий, а Петя — на две задачи больше, чем в предыдущий. В первый день каждый решил хотя бы одну задачу, а в итоге каждый решил все задачи сборника.

а) Могло ли быть в сборнике 85 задач?

б) Могло ли быть в сборнике 213 задач, если каждый из мальчиков решал их более трех дней?

в) Какое наибольшее количество дней мог решать задачи Петя, если Вася решил весь сборник за 16 дней, а количество задач в сборнике меньше 300.

Решение.

Пусть Вася в первый день решил a задач, а Петя — b задач. Вася решал задачи n дней, а Петя — m дней. Воспользуемся формулой суммы арифметической прогрессии. Получим, что за n дней Вася решил $S_n = \dfrac{a+a+n-1}{2} \cdot n$ задач, а Петя за m дней решил $S_m = \dfrac{b+b+2(m-1)}{2} \cdot m$ задач.

а) Проверим, могли ли мальчики решить 85 задач.

Для Васи: $\dfrac{a+a+n-1}{2} \cdot n = 85 \Leftrightarrow (2a+n-1) \cdot n = 85 \cdot 2 \Leftrightarrow (2a+n-1) \cdot n = 17 \cdot 5 \cdot 2.$ Очевидно, что это уравнение имеет решения в натуральных числах. Например, $n = 2$; $a = 42$.

Для Пети: $\dfrac{b+b+2(m-1)}{2} \cdot m = 85 \Leftrightarrow (b+m-1) \cdot m = 17 \cdot 5.$ Очевидно, что и это уравнение имеет решения в натуральных числах. Например, $m = 5$; $b = 13$.

Значит, в сборнике могло быть 85 задач.

б) Проверим, могло ли в сборнике быть 213 задач, если каждый из мальчиков решал их более трех дней.

Для Пети: $(b+m-1) \cdot m = 213 \Leftrightarrow (b+m-1) \cdot m = 71 \cdot 3.$ Тогда m — один из делителей числа 213. Заметим, что 71 — простое число, и по условию $m > 3$. Тогда или $m = 71$, или $m = 213$. При любом из этих значений получаем $b < 0$. Значит, в сборнике не могло быть 213 задач.

в) Если в сборнике меньше 300 задач, то для числа дней, потраченных Петей, имеем: $300 > (b+m-1) \cdot m \geq (1+m-1) \cdot m = m^2$. Следовательно, $m \leq 17$.

При $m = 17$ получаем $(b+16) \cdot 17 < 300 < 18 \cdot 17$, тогда $b = 1$; $S = 289$. Проверим, мог ли Вася за 16 дней решить 289 задач: $\dfrac{2a+16-1}{2} \cdot 16 = 289 \Leftrightarrow (2a+15) \cdot 8 = 289.$ Левая часть уравнения кратна 8, а правая нет, значит, m не может равняться 17.

Рассмотрим $m = 16$. Имеем $(b+15) \cdot 16 = (2a+15) \cdot 8 \Leftrightarrow (b+15) \cdot 2 = 2a+15.$ Левая часть уравнения кратна 2, а правая нет. Значит, m не может равняться 16.

Рассмотрим $m = 15$. Имеем $(b+14) \cdot 15 = (2a+15) \cdot 8.$ Левая часть уравнения кратна 15, правая может быть кратна 15 при $a \geq 15$, но тогда $S \geq 360$. Значит, m не может равняться 15.

Рассмотрим $m = 14$. Имеем $(b+13) \cdot 14 = (2a+15) \cdot 8 \Leftrightarrow \dfrac{b+13}{4} = \dfrac{2a+15}{7}$. Это уравнение имеет решение $b = 7$; $a = 10$. При этом $S = (7+13) \cdot 14 = (2 \cdot 10 + 15) \cdot 8 = 280 < 300.$ Таким образом, все условия задачи выполнены.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующий результатов:	1

— обоснованное решение в п. *а*; — пример в п. *б*; — искомая оценка в п. *в*; — пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	**4**

Перевод набранных первичных баллов в стобалльную и в пятибалльную системы

Первичный	Тестовый
0	0
1	5
2	9
3	14
4	18
5	23
6	27
7	33
8	39
9	45
10	50
11	56
12	62
13	68
14	70
15	72
16	74
17	76
18	78
19	80
20	82
21	84
22	86
23	88
24	90
25	92
26	94
27	96
28	98
29	99
30	100
31	100
32	100

Тестовый	Оценка
0-26	2
27-46	3
47-64	4
65-100	5