Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания с кратким ответом повышенного уровня сложности и 7 заданий с развернутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8 . Бланк 10 −0,8

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

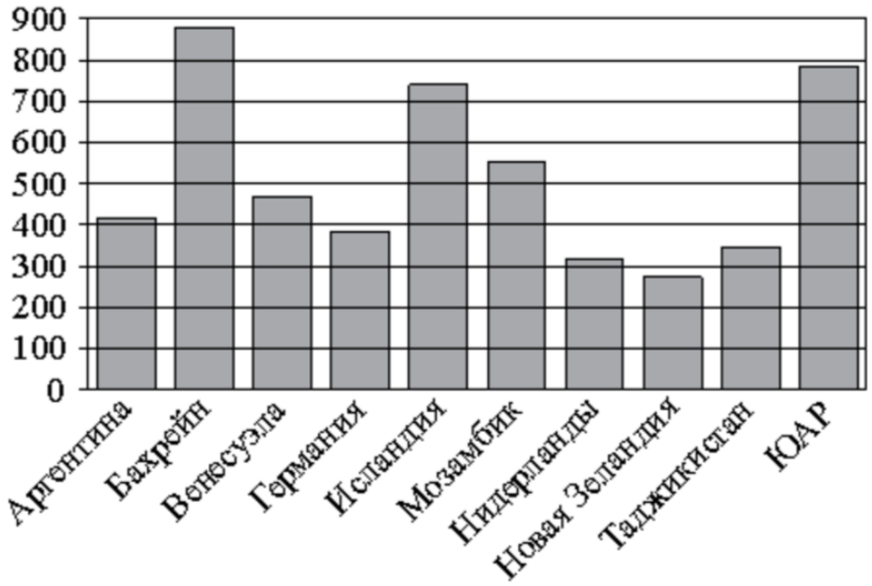
© 2019 Всероссийский проект «ЕГЭ 100 БАЛЛОВ» vk.com/ege100ballov
Составитель: vk.com/shkolapifagora

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Спидометр автомобиля показывает скорость в милях в час. Какую скорость (в милях в час) показывает спидометр, если автомобиль движется со скоростью 56 км в час? Считайте, что 1 миля равна 1,6 км.

Ответ: _____.

2 На диаграмме показано распределение выплавки алюминия в 10 странах (в тысячах тонн) за 2009 год. Среди представленных стран первое место по выплавке алюминия занимал Бахрейн, десятое место – Новая Зеландия. Какое место занимали Нидерланды?

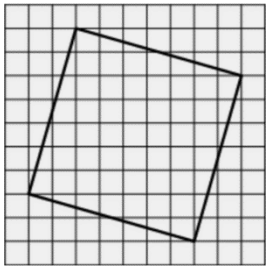


Ответ: _____.

Разбор всех заданий: http://vk.com/math_100/2019kim21
Разрешается свободное копирование в некоммерческих образовательных целях

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 190121

3 Найдите площадь квадрата, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: _____.

4 В чемпионате по гимнастике участвуют 70 спортсменок: 25 из США, 17 из Мексики, остальные из Канады. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Канады.

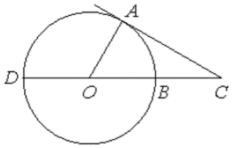
Ответ: _____.

5 Найдите корень уравнения

$36^{x-5} = \frac{1}{6}$.

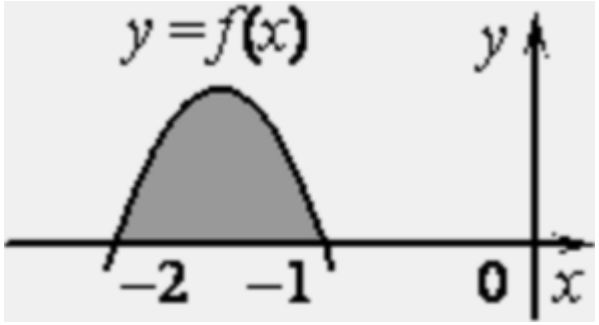
Ответ: _____.

6 Угол ACO равен 28°. Его сторона CA касается окружности с центром в точке O. Сторона CO пересекает окружность в точках B и D (см. рис.). Найдите градусную меру дуги AD окружности, заключённой внутри этого угла. Ответ дайте в градусах.



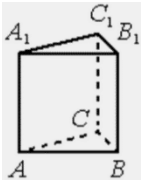
Ответ: _____.

7 На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = -x^3 - \frac{9}{2}x^2 - 6x + 2 -$ одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



Ответ: _____.

8 Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, A_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 5, а боковое ребро равно 6.



Ответ: _____.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 190121

© 2019 Всероссийский проект «ЕГЭ 100 БАЛЛОВ» vk.com/ege100ballov
Составитель: vk.com/shkolapifagora

Разбор всех заданий: http://vk.com/math_100/2019kim21
Разрешается свободное копирование в некоммерческих образовательных целях

9 Найдите значение выражения $\frac{2^{2,2} \cdot 6^{3,2}}{12^{2,2}}$.

Ответ: _____.

10 Независимое агентство намерено ввести рейтинг R новостных интернет-изданий на основе показателей информативности In, оперативности Op, объективности Tr публикаций, а также качества Qсайта. Каждый отдельный показатель – целое число от 1 до 5.

Составители рейтинга считают, что объективность ценится вдвое, а информативность публикаций – вчетверо дороже, чем оперативность и качество сайта, то есть

$$R = \frac{4In + Op + 2Tr + Q}{A}.$$

Найдите, каким должно быть число A, чтобы издание, у которого все показатели максимальны, получило рейтинг 8.

Ответ: _____.

11 Байдарка в 10:00 вышла из пункта А в пункт В, расположенный в 15 км от А. Пробыв в пункте В 1 час 20 минут, байдарка отправилась назад и вернулась в пункт А в 16:00 того же дня. Определите (в км/ч) собственную скорость байдарки, если известно, что скорость течения реки равна 2 км/ч.

Ответ: _____.

12 Найдите наибольшее значение функции $y = 3x^5 - 5x^3 + 1$на отрезке $[-7; 0]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания* 13–19 *используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (*13, 14 *и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $6\cos^2 x + 5\sin x - 2 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

14 На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E : EA = 1 : 2$, на ребре BB_1 – точка F так, что $B_1F : FB = 1 : 5$, а точка T – середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB = 2$, $AD = 6$, $AA_1 = 6$.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1.
б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью AA_1B_1.

15 Решите неравенство $\frac{4^x - 2^{x+3} + 7}{4^x - 5 \cdot 2^x + 4} \le \frac{2^x - 9}{2^x - 4} + \frac{1}{2^x - 6}$.

16 Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. На катете AC взята точка M. Окружность с центром O и диаметром CM касается гипотенузы в точке N.

а) Докажите, что прямые MN и BO параллельны.
б) Найдите площадь четырёхугольника $BOMN$, если $CN = 4$ и $AM : MC = 1 : 3$.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 190121

© 2019 Всероссийский проект «ЕГЭ 100 БАЛЛОВ» vk.com/ege100ballov
Составитель: vk.com/shkolapifagora
Разбор всех заданий: http://vk.com/math_100/2019kim21
Разрешается свободное копирование в некоммерческих образовательных целях

17 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 7 млн рублей на срок 10 лет. Условия возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга так, чтобы на начало июля каждого года долг уменьшался на одну и ту же сумму по сравнению с предыдущим июлем.

Найдите наименьшую возможную ставку r, если известно, что последний платёж будет не менее 0,819 млн рублей.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$a|x-5| = \frac{3}{x+1}$$

на промежутке $[0;+\infty)$ имеет ровно два корня.

19 Дано трёхзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля).

а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 28?
б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 88?
в) Какое наименьшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?

© 2019 Всероссийский проект «ЕГЭ 100 БАЛЛОВ» vk.com/ege100ballov
Составитель: vk.com/shkolapifagora

О проекте «Пробный ЕГЭ каждую неделю»
Данный ким составлен командой всероссийского волонтёрского проекта «ЕГЭ 100 баллов» https://vk.com/ege100ballov и безвозмездно распространяется для любых некоммерческих образовательных целей.

Нашли ошибку в варианте?
Напишите нам, пожалуйста, и мы обязательно её исправим!
Для замечаний и пожеланий: https://vk.com/topic-10175642_39008096
(также доступны другие варианты для скачивания)

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:	
ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	7 лет репетиторской деятельности
Регалии:	Основатель проекта Школа Пифагора
Аккаунт ВК:	https://vk.com/eugene10
Сайт и доп. информация:	https://vk.com/shkolapifagora https://youtube.com/ШколаПифагора

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 190121

Разбор всех заданий: http://vk.com/math_100/2019kim21
Разрешается свободное копирование в некоммерческих образовательных целях

Система оценивания
Ответы к заданиям 1-19

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Верно выполненные задания 13-15 максимум оцениваются в 2 балла, задания 16-17 – в 3 балла, а задания18-19 – в 4 балла.

№ задания	Ответ
1	35
2	9
3	53
4	0,4
5	4,5
6	118
7	0,5
8	10
9	6
10	5
11	7
12	3
13	а) $-\frac{\pi}{6}+2\pi n, -\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ n\in Z.$ б) $-\frac{13\pi}{6}$
14	$\operatorname{arctg} 1{,}5\sqrt{5}$
15	$(-\infty;0)\cup(0;2)\cup(\log_2 6;3]$
16	7
17	17
18	$\left\{\frac{1}{3}\right\}\cup\left(\frac{3}{5};+\infty\right)$
19	а) да, например, для числа 140, б) нет, в) 11

© 2019 Всероссийский проект «ЕГЭ 100 БАЛЛОВ» vk.com/ege100ballov
Составитель: vk.com/shkolapifagora

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 190121

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.
Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов.
Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0баллов.
Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.
При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 а) Решите уравнение

$6\cos^2 x + 5\sin x - 2 = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right].$

Решение:

а)

Основное тригонометрическое тождество

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$6\cdot(1-\sin^2 x) + 5\sin x - 2 = 0$
$6 - 6\sin^2 x + 5\sin x - 2 = 0$
$-6\sin^2 x + 5\sin x + 4 = 0$

Пусть $\sin x = t$
$-6t^2 + 5t + 4 = 0$
$D = b^2 - 4ac = 25 + 96 = 121 = 11^2$

Разбор всех заданий: http://vk.com/math_100/2019kim21
Разрешается свободное копирование в некоммерческих образовательных целях

$$t_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-5+11}{-12} = -\frac{1}{2}$$
$$t_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-5-11}{-12} = \frac{4}{3} \text{ (не подходит)}$$

$$\sin x = -\frac{1}{2}$$
$$x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ n \in Z$$
$$x_2 = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n;\ n \in Z$$

б)

Подберём корни для $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n; n \in Z$

Если $n = -2$, то $x = -\frac{\pi}{6} - 4\pi = -\frac{25\pi}{6} \notin \left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$

Если $n = -1$, то $x = -\frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{13\pi}{6} \in \left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$

Если $n = 0$, то $x = -\frac{\pi}{6} \notin \left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$

Подберём корни для $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; n \in Z$

Если $n = -1$, то $x = -\frac{5\pi}{6} - 2\pi = -\frac{17\pi}{6} \notin \left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$

Если $n = 0$, то $x = -\frac{5\pi}{6} \notin \left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$

Ответ: а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n, -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n;\ n \in Z$. б) $-\frac{13\pi}{6}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б* ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

© 2019 Всероссийский проект «ЕГЭ 100 БАЛЛОВ» vk.com/ege100ballov
Составитель: vk.com/shkolapifagora

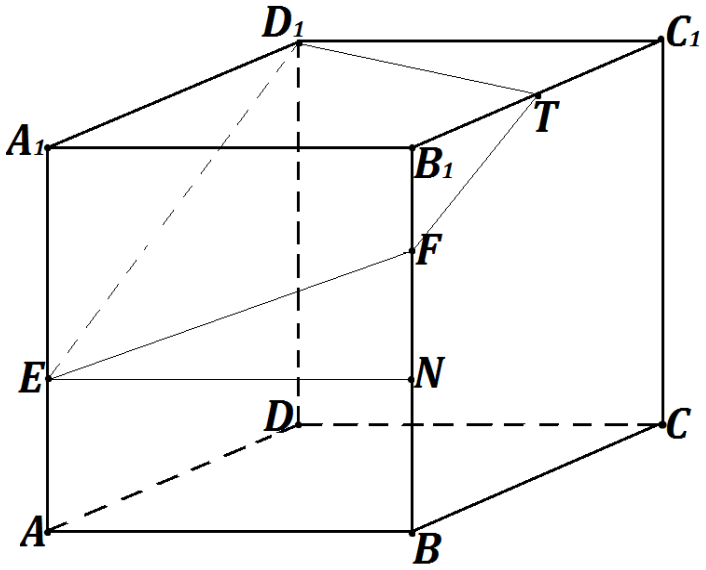
ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 190121

На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E:EA = 1:2$, на ребре BB_1 – точка F так, что $B_1F:FB = 1:5$, а точка T – середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB = 2$, $AD = 6$, $AA_1 = 6$.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1.
б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью AA_1B_1.

Решение:

а)



$A_1E:EA = 1:2$ и $AA_1 = 6$
=>
$A_1E = 2$
$EA = 4$

$B_1F:FB = 1:5$ и $BB_1 = 6$
=>
$B_1F = 1$
$FB = 5$

T – середина B_1C_1
=>
$$B_1T = \frac{1}{2} \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$$

Разбор всех заданий: http://vk.com/math_100/2019kim21
Разрешается свободное копирование в некоммерческих образовательных целях

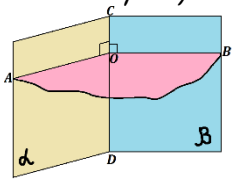
=>
$\triangle B_1FT$ −равнобедренный

Построим сечение:
Построим прямую EF, т.к. точки E и F лежат в одной плоскости
Построим прямую FT, т.к. точки F и T лежат в одной плоскости

Построим такую прямую через точку E, чтобы она была параллельна FTи т.к. $\triangle A_1D_1E \sim \triangle B_1FT$(по двум пропорциональным сторонам и углу между ними), то плоскость EFT проходит через вершину D_1
■

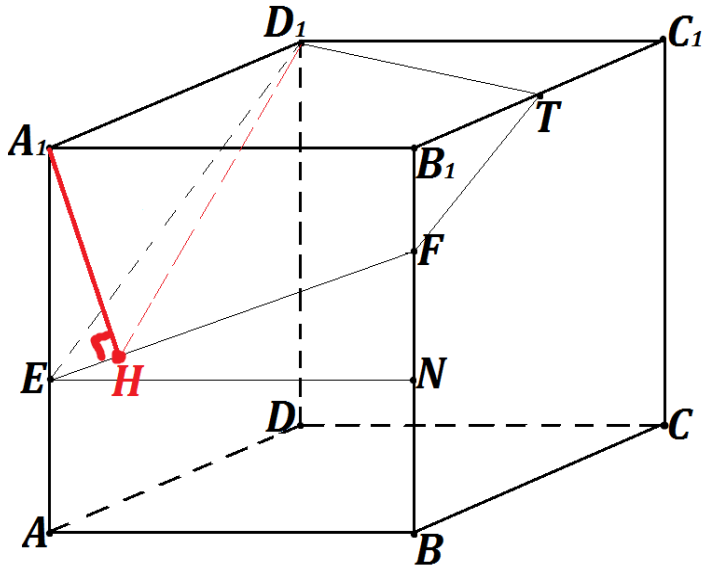
б)

Схема нахождения угла между плоскостями



1) Ищем прямую пересечения плоскостей (на рисунке это CD)
2) На этой прямой ставим точку (на рисунке это точка O)
3) Проводим из этой точки два перпендикуляра в каждой из плоскостей (на рисунке $OA \perp CD$ в плоскости α и $OB \perp CD$ в плоскости β)
4) Угол между этими перпендикулярами – искомый угол между плоскостями (на рисунке $\angle AOB$ − угол между плоскостями α и β)

Плоскости пересекаются по прямой EF



Из точки A_1 опустим перпендикуляр A_1H на прямую EF
D_1H −проекцияA_1H на плоскость EFT
=>
$\angle A_1HD_1$ −искомый угол между плоскостью EFT и плоскостью AA_1B_1

Найдём A_1H:

Пусть EN − прямая, параллельная AB, тогда:
$EN = 2$ и $FN = BF - EA = 5 - 4 = 1$
$EF = \sqrt{EN^2 + FN^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ (по теореме Пифагора)

Найдём площадь треугольники A_1EF двумя способами:
$S_{\triangle}A_1EF = \frac{1}{2} \cdot EF \cdot A_1H = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot A_1H$
$S_{\triangle}A_1EF = S_{A_1B_1FE} - S_{A_1B_1F}$

$S_{A_1B_1FE} = \frac{B_1F + A_1E}{2} \cdot AB = \frac{1+2}{2} \cdot 2 = 3$
$S_{A_1B_1F} = \frac{A_1B_1 \cdot B_1F}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$
$S_{\triangle}A_1EF = S_{A_1B_1FE} - S_{A_1B_1F} = 3 - 1 = 2$

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 190121

© 2019 Всероссийский проект «ЕГЭ 100 БАЛЛОВ» vk.com/ege100ballov
Составитель: vk.com/shkolapifagora
Разбор всех заданий: http://vk.com/math_100/2019kim21
Разрешается свободное копирование в некоммерческих образовательных целях

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot A_1H = 2$$
$$A_1H = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$\operatorname{tg}\angle A_1HD_1 = \frac{A_1D_1}{A_1H} = \frac{6}{\frac{4}{\sqrt{5}}} = 1{,}5\sqrt{5}$$

$$\angle A_1HD_1 = \operatorname{arctg} 1{,}5\sqrt{5}$$

Ответ: б) $\operatorname{arctg} 1{,}5\sqrt{5}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство

$$\frac{4^x - 2^{x+3} + 7}{4^x - 5\cdot 2^x + 4} \le \frac{2^x - 9}{2^x - 4} + \frac{1}{2^x - 6}.$$

.

Решение:

Пусть $2^x = t$

$$\frac{t^2 - 8t + 7}{t^2 - 5t + 4} \le \frac{t - 9}{t - 4} + \frac{1}{t - 6}$$

Разложение квадратного трёхчлена на множители

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$t^2 - 8t + 7 = 0$$
$$D = (-8)^2 - 4\cdot 1\cdot 7 = 36$$
$$t_1 = \frac{8+6}{2} = 7$$
$$t_2 = \frac{8-6}{2} = 1$$
$$t^2 - 8t + 7 = (t-1)(t-7)$$

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$
$$D = (-5)^2 - 4\cdot 1\cdot 4 = 9$$
$$t_1 = \frac{5+3}{2} = 4$$
$$t_2 = \frac{5-3}{2} = 1$$
$$t^2 - 5t + 4 = (t-1)(t-4)$$

$$\frac{(t-1)(t-7)}{(t-1)(t-4)} \le \frac{t-9}{t-4} + \frac{1}{t-6}$$

ОДЗ:

1.
$t \ne 1$
$2^x \ne 1$
$2^x \ne 2^0$
$x \ne 0$

2.
$t \ne 4$
$2^x \ne 4$
$2^x \ne 2^2$
$x \ne 2$

3.
$t \ne 6$
$2^x \ne 6$
$2^x \ne 2^{\log_2 6}$
$x \ne \log_2 6$

$$\frac{t-7}{t-4} \le \frac{t-9}{t-4} + \frac{1}{t-6}$$

$$\frac{t-7}{t-4} - \frac{t-9}{t-4} \le \frac{1}{t-6}$$

$$\frac{2}{t-4} - \frac{1}{t-6} \le 0$$

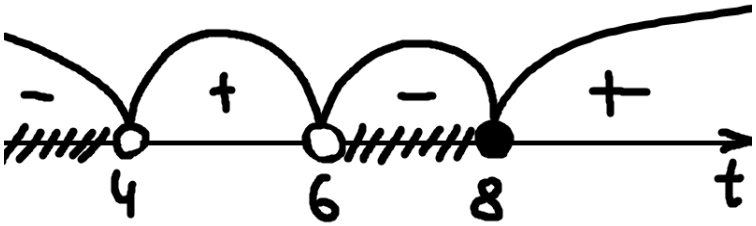
© 2019 Всероссийский проект «ЕГЭ 100 БАЛЛОВ» vk.com/ege100ballov
Составитель: vk.com/shkolapifagora
Разбор всех заданий: http://vk.com/math_100/2019kim21
Разрешается свободное копирование в некоммерческих образовательных целях

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 190121

$$\frac{2t-12-t+4}{(t-4)(t-6)} \le 0$$

$$\frac{t-8}{(t-4)(t-6)} \le 0$$

$t-8=0$ $t=8$	$(t-4)(t-6)\neq 0$ $t\neq 4$ $t\neq 6$	ОДЗ: $t\neq 1$



$t<4$ $2^x<4$ $2^x<2^2$ $x<2$	$6<t\le 8$ $6<2^x\le 8$ $2^{\log_2 6}<2^x\le 2^3$ $\log_2 6<x\le 3$	ОДЗ: $x\neq 0$

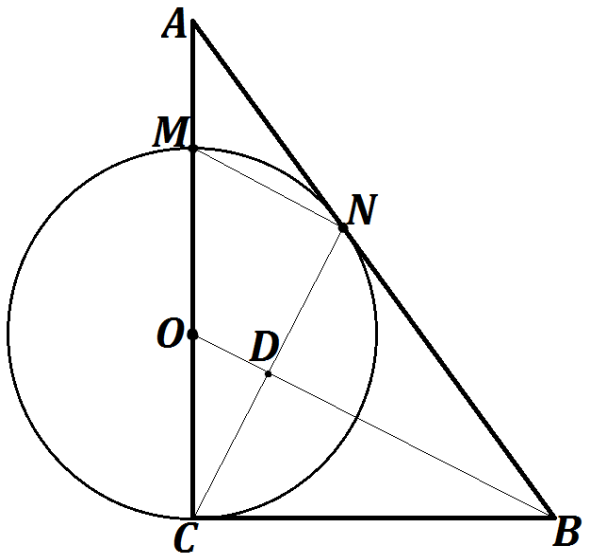
Ответ: $(-\infty;0)\cup(0;2)\cup(\log_2 6;3]$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. На катете AC взята точка M. Окружность с центром O и диаметром CM касается гипотенузы в точке N.

а) Докажите, что прямые MN и BO параллельны.
б) Найдите площадь четырёхугольника $BOMN$, если $CN=4$ и $AM:MC=1:3$.

Решение:
а)



Проведём CN
Пусть $CN\cap BO=D$
BD –биссектриса угла B
$BC=BN$
(по свойству касательных)

Рассмотрим $\triangle BCN$ – равнобедренный
BD –биссектриса, высота и медиана (по свойству равнобедренного треугольника)
=>
$BD\perp CN$

© 2019 Всероссийский проект «ЕГЭ 100 БАЛЛОВ» vk.com/ege100ballov
Составитель: vk.com/shkolapifagora
Разбор всех заданий: http://vk.com/math_100/2019kim21
Разрешается свободное копирование в некоммерческих образовательных целях

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 190121

=>
$BO \perp CN$

$\angle CNM = 90°$
(т.к. это вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности)
=>
$MN \perp CN$

=>
$MN \parallel BO$
■

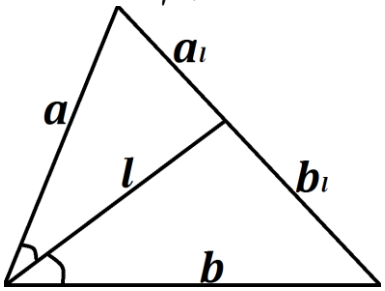
б)
$BOMN -$ трапеция
$DN -$ высота трапеции
$DN = \frac{1}{2} \cdot CN = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$
(по свойству равнобедренного треугольника)

Осталось найти основания трапеции:

Пусть
$AM = 2x$
$MC = 6x$

Тогда
$OM = 3x$
$OC = 3x$
$AO = 5x$
$AC = 8x$

Свойство биссектрисы



$\frac{a_l}{b_l} = \frac{a}{b}$

$BO -$биссектриса ΔABC
=>
$\frac{OC}{AO} = \frac{BC}{AB}$

$\frac{3x}{5x} = \frac{BC}{AB}$

$\frac{3}{5} = \frac{BC}{AB}$

Пусть
$BC = 3y$
$AB = 5y$

Тогда
$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{(5y)^2 - (3y)^2} = 4y$ (по теореме Пифагора)

$AC = 4y = 8x$
$y = 2x$

=>
$BC = 6x$
$AB = 10x$

$\cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{6x}{10x} = \frac{3}{5}$

По теореме косинусов из ΔBCN:
$CN^2 = BC^2 + BN^2 - 2 \cdot BC \cdot BN \cdot \cos B$
$4^2 = 2BC^2 - 2BC^2 \cdot \frac{3}{5}$
$16 = \frac{4}{5} BC^2$
$BC^2 = 20$
$BC = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} = 6x$
$x = \frac{2\sqrt{5}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

© 2019 Всероссийский проект «ЕГЭ 100 БАЛЛОВ» vk.com/ege100ballov
Составитель: vk.com/shkolapifagora
Разбор всех заданий: http://vk.com/math_100/2019kim21
Разрешается свободное копирование в некоммерческих образовательных целях

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 190121

$OC = 3x = 3 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \sqrt{5}$

$BC = 6x = 6 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = 2\sqrt{5}$

$BO = \sqrt{OC^2 + BC^2} = \sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 + \left(2\sqrt{5}\right)^2} = 5$ (по теореме Пифагора)

$BD = \sqrt{BC^2 - CD^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2 - 2^2} = 4$ (по теореме Пифагора)

$OD = BO - BD = 5 - 4 = 1$
OD –средняя линия $\triangle CNM$
=>
$MN = 2 \cdot OD = 2 \cdot 1 = 2$

$S_{BOMN} = \frac{BO + MN}{2} \cdot DN$

$S_{BOMN} = \frac{5 + 2}{2} \cdot 2 = 7$

Ответ: 7

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 7 млн рублей на срок 10 лет. Условия возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга так, чтобы на начало июля каждого года долг уменьшался на одну и ту же сумму по сравнению с предыдущим июлем.

Найдите наименьшую возможную ставку r, если известно, что последний платёж будет не менее 0,819 млн рублей.

Решение:
Переведём миллионы в тысячи:
7 млн это 7000 тыс.
0,819 млн это 819 тыс.

Составим таблицу:

Год	Долг на начало года	Основной платёж	Дополнительный платёж
1	7000	$\frac{7000}{10} = 700$	$\frac{r}{100} \cdot 7000 = 70r$
…			
10	700	700	$\frac{r}{100} \cdot 700 = 7r$

=>
Последний платёж ≥ 819 тыс.

$700 + 7r \geq 819$
$7r \geq 119$
$r \geq 17$

© 2019 Всероссийский проект «ЕГЭ 100 БАЛЛОВ» vk.com/ege100ballov
Составитель: vk.com/shkolapifagora

Разбор всех заданий: http://vk.com/math_100/2019kim21
Разрешается свободное копирование в некоммерческих образовательных целях

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 190121

=>

$r = 17$
(т.к. мы искали наименьшее, удовлетворяющее неравенству r)

Ответ: 17

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$a|x-5| = \frac{3}{x+1}$
на промежутке $[0; +\infty)$ имеет ровно два корня.

Решение:
Решим графически:

Построим гиперболу $y = \frac{3}{x+1}$ (можно строить только в первой и четвёртой четверти)

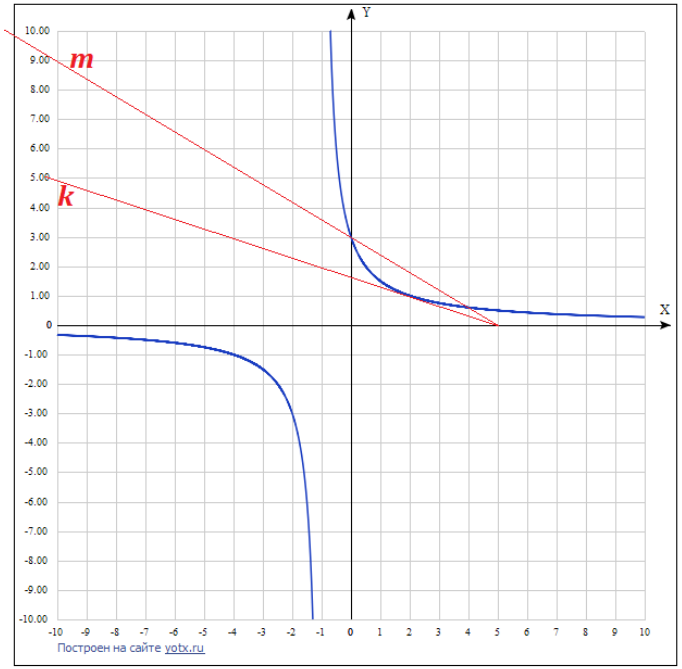
Уравнение $y = a|x-5|$ задаёт множество «галочек», проходящих через точку $(5; 0)$

Если $a = 1$, то получаем 2 пересечения с гиперболой
Если $a < 0$, то получаем 0 пересечений с гиперболой (т.к. «галочка» будет располагаться ниже оси Ox)

Если $a = 0$, то получаем 0 пересечений с гиперболой (т.к. «галочка» станет осью абсцисс)
Если $a > 1$, то получаем 2 пересечения с гиперболой (т.к. «галочка» будет сужаться)

Пусть
m – прямая (левая ветка «галочки»), проходящая через точку $(0; 3)$
k – прямая (левая ветка «галочки»), проходящая через точку касания гиперболы

Проведём прямые m и k:



Левая ветка «галочки» – это убывающая прямая, поэтому раскрываем модуль, меняя знаки на противоположные
$y = a|x-5|$
$y = -ax + 5a$ – множество убывающих лучей, стартующих из точки $(5; 0)$

Найдём значение параметра a у прямойm:
$y = -ax + 5a$ проходит через т. $(0; 3)$
$3 = -a \cdot 0 + 5a$
$3 = 5a$

© 2019 Всероссийский проект «ЕГЭ 100 БАЛЛОВ» vk.com/ege100ballov
Составитель: vk.com/shkolapifagora

Разбор всех заданий: http://vk.com/math_100/2019kim21
Разрешается свободное копирование в некоммерческих образовательных целях

$$a = \frac{3}{5}$$

Найдём значение параметра a у прямойk:
$y = -ax + 5a$ является касательной к гиперболе $\frac{3}{x+1}$

Условие касания функции и прямой

$$\begin{cases} y' = f'(x_0) \\ y = f(x_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-ax + 5a)' = \left(\frac{3}{x+1}\right)' \\ -ax + 5a = \frac{3}{x+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a = (3 \cdot (x+1)^{-1})' \\ -ax + 5a = \frac{3}{x+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a = \frac{-3}{(x+1)^2} \\ -ax + 5a = \frac{3}{x+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{3}{(x+1)^2} \\ -ax + 5a = \frac{3}{x+1} \end{cases}$$

Подставим значение a под второе уравнение системы:

$$\frac{-3x}{(x+1)^2} + \frac{5 \cdot 3}{(x+1)^2} = \frac{3}{x+1}$$

$$\frac{-3x + 15}{(x+1)^2} = \frac{3}{x+1}$$

$$\frac{-x + 5}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1}$$

$$(x+1)^2 = (x+1) \cdot (5 - x)$$

© 2019 Всероссийский проект «ЕГЭ 100 БАЛЛОВ» vk.com/ege100ballov
Составитель: vk.com/shkolapifagora

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 190121

$$(x+1)^2 - (x+1) \cdot (5 - x) = 0$$
$$(x+1) \cdot (x + 1 - 5 + x) = 0$$
$$x \neq -1$$
$$2x - 4 = 0$$
$$x = 2$$

$$a = \frac{3}{(x+1)^2} = \frac{3}{(2+1)^2} = \frac{1}{3}$$

Если $a > \frac{3}{5}$, то получаем 2 пересечения с гиперболой
Если $a = \frac{3}{5}$, то получаем 3 пересечения с гиперболой
Если $\frac{1}{3} < a < \frac{3}{5}$, то получаем 3 пересечения с гиперболой
Если $a = \frac{1}{3}$, то получаем 2 пересечения с гиперболой
Если $0 < a < \frac{1}{3}$, то получаем 1 пересечение с гиперболой

Ответ: $\left\{\frac{1}{3}\right\} \cup \left(\frac{3}{5}; +\infty\right)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений а, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений а	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений а	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Дано трёхзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля).

а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 28?
б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 88?
в) Какое наименьшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?

Разбор всех заданий: http://vk.com/math_100/2019kim21
Разрешается свободное копирование в некоммерческих образовательных целях

Решение:
Пусть
a −число сотен $1 \le a \le 9$
b −числодесятков $0 \le b \le 9$
c −числоединиц $0 \le c \le 9$

Тогда
$a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$ −данное трёхзначное число

а)
$$\frac{a \cdot 100 + b \cdot 10 + c}{a + b + c} = 28$$

$a \cdot 100 + b \cdot 10 + c = 28 \cdot (a + b + c)$
$100a + 10b + c = 28a + 28b + 28c$
$72a = 18b + 27c$

Если $a = 1$, то
$72 = 18b + 27c$

Нетрудно подобрать подходящую комбинацию:
$b = 4$
$c = 0$
=>
Может, частное числа 140 и суммы его цифр равно 28

б)
$$\frac{a \cdot 100 + b \cdot 10 + c}{a + b + c} = 88$$

$a \cdot 100 + b \cdot 10 + c = 88 \cdot (a + b + c)$
$100a + 10b + c = 88a + 88b + 88c$
$12a = 78b + 87c$

Рассмотрим варианты комбинаций b и c, начиная с наименьших:
Вариант #1
$b = 0$
$c = 0$

Тогда
$12a = 0$

Не подходит, т.к. $1 \le a \le 9$
Вариант #2
$b = 0$
$c = 1$

Тогда
$12a = 87$
Не подходит, т.к. a должно быть целым
Вариант #3
$b = 1$
$c = 0$

Тогда
$12a = 78$
Не подходит, т.к. a должно быть целым
Вариант #4
$b = 1$
$c = 1$

Тогда
$12a = 78 + 87$
$12a = 165$
Не подходит, т.к. a должно быть целым
$1 \le a \le 9$
$12 \le 12a \le 108$
=>
дальнейшее увеличение значений b и c не имеет смысла, т.к. правая часть уравнения будет всё больше и больше
=>
Не может

в)
Подбором можно заметить, что частное числа 198 и суммы его цифр равно 11

Проверим 10
$$\frac{a \cdot 100 + b \cdot 10 + c}{a + b + c} = 10$$

$a \cdot 100 + b \cdot 10 + c = 10 \cdot (a + b + c)$
$100a + 10b + c = 10a + 10b + 10c$
$90a = 9c$

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 190121

© 2019 Всероссийский проект «ЕГЭ 100 БАЛЛОВ» vk.com/ege100ballov
Составитель: vk.com/shkolapifagora
Разбор всех заданий: http://vk.com/math_100/2019kim21
Разрешается свободное копирование в некоммерческих образовательных целях

$10a = c$
=>
c в 10 раз больше, чем a
=>
противоречие, т.к. a и c – цифры

Проверим 9
$$\frac{a \cdot 100 + b \cdot 10 + c}{a + b + c} = 9$$

$a \cdot 100 + b \cdot 10 + c = 9 \cdot (a + b + c)$
$100a + 10b + c = 9a + 9b + 9c$
$91a + b = 8c$
=>
левая часть уравнения больше правой
=>
противоречие

Проверим 8
$$\frac{a \cdot 100 + b \cdot 10 + c}{a + b + c} = 8$$

$a \cdot 100 + b \cdot 10 + c = 8 \cdot (a + b + c)$
$100a + 10b + c = 8a + 8b + 8c$
$92a + 2b = 7c$
=>
левая часть уравнения стала ещё больше правой
=>
противоречие и дальнейший перебор натуральных значений частного от числа и суммы его цифр также не даст решения
=>
11

Ответ: а) да, например, для числа 140, б) Нет, в) 11

Содержание критерия	**Баллы**
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: - обоснованное решение п. а; - обоснованное решение п. б; - искомая оценка в п. в; - пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

© 2019 Всероссийский проект «ЕГЭ 100 БАЛЛОВ» vk.com/ege100ballov
Составитель: vk.com/shkolapifagora

Разбор всех заданий: http://vk.com/math_100/2019kim21
Разрешается свободное копирование в некоммерческих образовательных целях

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 190121