Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания с кратким ответом повышенного уровня сложности и 7 заданий с развернутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8 . 10 −0,8 Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

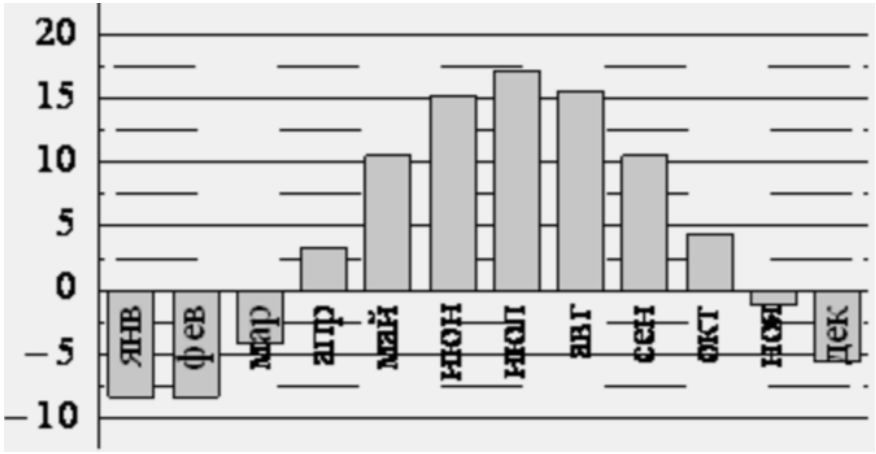
© 2019 Всероссийский проект «ЕГЭ 100 БАЛЛОВ» vk.com/ege100ballov
Составитель: vk.com/shkolapifagora

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Пётр Иванович купил американский автомобиль, спидометр которого показывает скорость в милях в час. Какова скорость автомобиля в километрах в час, если спидометр показывает 28 миль в час? Считайте, что 1 миля равна 1609 м. Ответ округлите до целого числа.

Ответ: _____.

2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха (в градусах Цельсия) в Новгороде по результатам многолетних наблюдений. Найдите по диаграмме количество месяцев с начала августа по конец года, когда среднемесячная температура в Новгороде положительна.

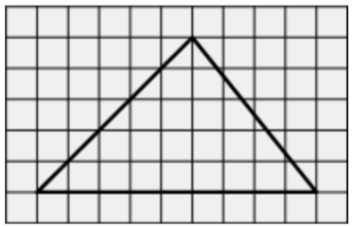


Ответ: _____.

Разбор всех заданий: http://vk.com/math_100/2019kim20
Разрешается свободное копирование в некоммерческих образовательных целях

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 190114

3 Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: _____.

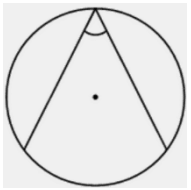
4 Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей – 1 очко, если проигрывает – 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,3.

Ответ: _____.

5 Решите уравнение
$\sqrt{40+3x}=x$.
Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

Ответ: _____.

6 Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, равную $\frac{1}{5}$ окружности. Ответ дайте в градусах.

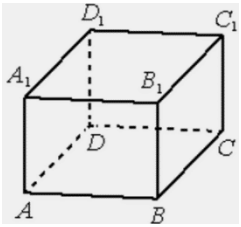


Ответ: _____.

7 Прямая $y=-3x-5$ является касательной к графику функции $y=x^2+7x+c$. Найдите c.

Ответ: _____.

8 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB=15$, $AD=8$, $AA_1=21$. Найдите площадь сечения, проходящего через вершины B, B_1 и D.



Ответ: _____.

9 Найдите значение выражения
$\frac{\log_5 2}{\log_5 13}+\log_{13} 0{,}5$.

Ответ: _____.

10 Наблюдатель находится на высоте h, выраженной в метрах. Расстояние от наблюдателя до наблюдаемой им линии горизонта, выраженное в километрах, вычисляется по формуле $l=\sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R=6400$ км – радиус Земли. На какой высоте находится наблюдатель, если он видит линию горизонта на расстоянии 64 километра? Ответ дайте в метрах.

Ответ: _____.

© 2019 Всероссийский проект «ЕГЭ 100 БАЛЛОВ» vk.com/ege100ballov
Составитель: vk.com/shkolapifagora

Разбор всех заданий: http://vk.com/math_100/2019kim20
Разрешается свободное копирование в некоммерческих образовательных целях

11 Теплоход, скорость которого в неподвижной воде равна 24 км/ч, проходит по течению реки и после стоянки возвращается в исходный пункт. Скорость течения равна 3 км/ч, стоянка длится 2 часа, а в исходный пункт теплоход возвращается через 34 часа после отправления из него. Сколько километров прошёл теплоход за весь рейс?

Ответ: _____.

12 Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 12x + 5$на отрезке $[-3; 0]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания* 13–19 *используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (*13, 14 *и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$\cos 2x + \sin^2 x = 0{,}75$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 3, а боковое ребро AA_1 равно $\sqrt{2}$. На рёбрах AB, A_1B_1 и B_1C_1 отмечены точки M, N и K соответственно, причём $AM = B_1N = C_1K = 1$.

а) Пусть L – точка пересечения плоскости MNK с ребром AC. Докажите, что $MNKL$ – квадрат.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK.

15 Решите неравенство

$$\frac{2^x}{2^x - 3} + \frac{2^x + 1}{2^x - 2} + \frac{5}{4^x - 5 \cdot 2^x + 6} \le 0.$$

16 В треугольнике ABC точки A_1, B_1 и C_1 – середины сторон BC, AC и AB соответственно, AH – высота, $\angle BAC = 120°$, $\angle BCA = 45°$.

а) Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности.

б) Найдите A_1H, если $BC = 6\sqrt{3}$.

17 В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S млн рублей, где S – **целое** число. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019	Июль 2020
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}7S$	$0{,}4S$	$0{,}2S$	0

Найдите наименьшее значение S, при котором общая сумма выплат будет больше 10 млн рублей.

© 2019 Всероссийский проект «ЕГЭ 100 БАЛЛОВ» vk.com/ege100ballov
Составитель: vk.com/shkolapifagora

Разбор всех заданий: http://vk.com/math_100/2019kim20
Разрешается свободное копирование в некоммерческих образовательных целях

18 Найдите все значения a, при которых уравнение
$$\frac{5a}{a-3}\cdot 7^{|x|}=49^{|x|}+\frac{6a+7}{a-3}$$
имеет ровно два различных корня.

19 Три числа назовём *хорошей* тройкой, если они могут быть длинами сторон треугольника.

Три числа назовём отличной тройкой, если они могут быть длинами сторон прямоугольного треугольника.

а) Даны 5 различных натуральных чисел. Может ли оказаться, что среди них не найдётся ни одной хорошей тройки?
б) Даны 4 различных натуральных числа. Может ли оказаться, что среди них можно найти три отличных тройки?
в) Даны 10 различных чисел (необязательно натуральных). Какое наибольшее количество отличных троек могло оказаться среди них?

О проекте «Пробный ЕГЭ каждую неделю»
Данный ким составлен командой всероссийского волонтёрского проекта «ЕГЭ 100 баллов» https://vk.com/ege100ballov и безвозмездно распространяется для любых некоммерческих образовательных целей.

Нашли ошибку в варианте?
Напишите нам, пожалуйста, и мы обязательно её исправим!
Для замечаний и пожеланий: https://vk.com/topic-10175642_39008096
(также доступны другие варианты для скачивания)

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:	
ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	7 лет репетиторской деятельности
Регалии:	Основатель проекта Школа Пифагора
Аккаунт ВК:	https://vk.com/eugene10
Сайт и доп. информация:	https://vk.com/shkolapifagora https://youtube.com/ШколаПифагора

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 190114

© 2019 Всероссийский проект «ЕГЭ 100 БАЛЛОВ» vk.com/ege100ballov
Составитель: vk.com/shkolapifagora

Система оценивания
Ответы к заданиям 1-19

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Верно выполненные задания 13-15 максимум оцениваются в 2 балла, задания 16-17 – в 3 балла, а задания18-19 – в 4 балла.

№ задания	Ответ
1	45
2	3
3	22,5
4	0,33
5	8
6	36
7	20
8	357
9	0
10	320
11	378
12	21
13	а) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n;\ n\in Z.$ б) $\frac{7\pi}{6};\ \frac{11\pi}{6};\ \frac{13\pi}{6}$
14	3,75
15	$\{0\}\cup(1;\log_2 3)$
16	3
17	7
18	$\{-42\}\cup(-2;3)$
19	а) Да, б) нет, в) 20

© 2019 Всероссийский проект «ЕГЭ 100 БАЛЛОВ» vk.com/ege100ballov
Составитель: vk.com/shkolapifagora

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 190114

Решения и критерии оценивания заданий13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависитот полноты решения и правильности ответа.
Общие требования к выполнению заданий с развёрнутымответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможныеслучаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записиформы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов.
Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0баллов.
Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.
При выполнении задания могут использоватьсябездоказательстваи ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общегообразования.

13 а) Решите уравнение

$\cos 2x+\sin^2 x=0{,}75.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$\left[\pi;\frac{5\pi}{2}\right].$

.

Решение:

а)

Косинус двойного угла

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$
$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$
$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$

$1-2\sin^2 x+\sin^2 x=0{,}75$
$\sin^2 x=\frac{1}{4}$
$\sin x=\pm\frac{1}{2}$
$x_1=\frac{\pi}{6}+\pi n;\ n\in Z$

Разбор всех заданий: http://vk.com/math_100/2019kim20
Разрешается свободное копирование в некоммерческих образовательных целях

$x_2 = -\frac{\pi}{6} + \pi n;\ n \in Z$

б)

Подберём корни для $x = \frac{\pi}{6} + \pi n; n \in Z$

Если $n = 0$, то $x = \frac{\pi}{6} \notin \left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$

Если $n = 1$, то $x = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6} \in \left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$

Если $n = 2$, то $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6} \in \left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$

Если $n = 3$, то $x = \frac{\pi}{6} + 3\pi = \frac{19\pi}{6} \notin \left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$

Подберём корни для $x = -\frac{\pi}{6} + \pi n; n \in Z$

Если $n = 1$, то $x = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6} \notin \left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$

Если $n = 2$, то $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6} \in \left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$

Если $n = 3$, то $x = -\frac{\pi}{6} + 3\pi = \frac{17\pi}{6} \notin \left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n;\ n \in Z$. б) $\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б* ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

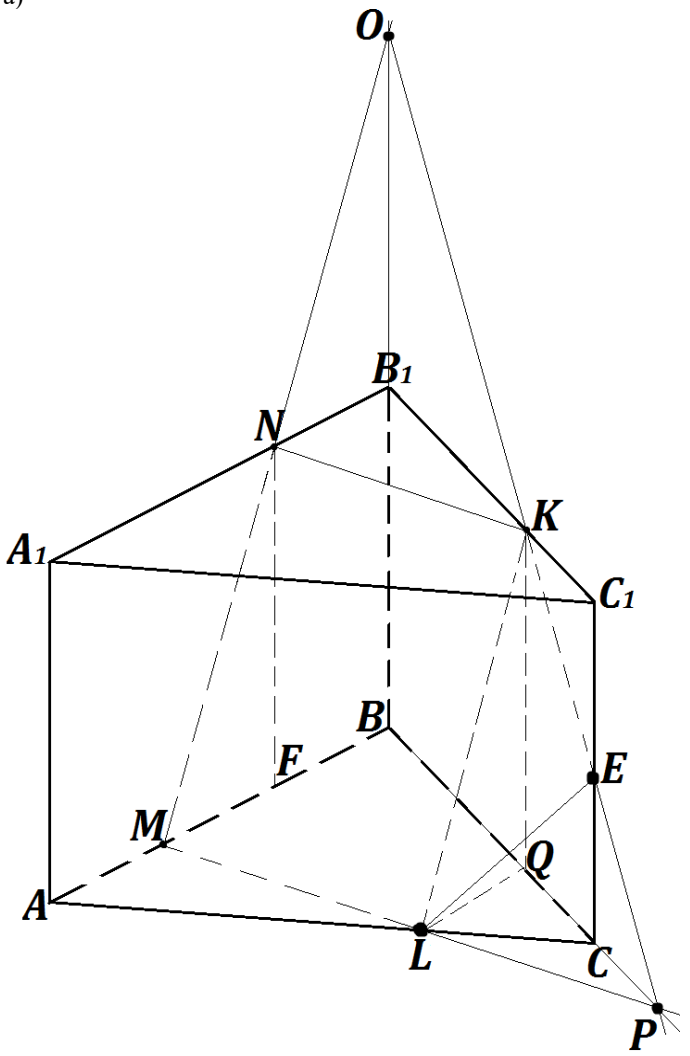
14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 3, а боковое ребро AA_1 равно $\sqrt{2}$. На рёбрах AB, A_1B_1 и B_1C_1 отмечены точки M, N и K соответственно, причём $AM = B_1N = C_1K = 1$.

а) Пусть L – точка пересечения плоскости MNK с ребром AC. Докажите, что $MNKL$ – квадрат.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK.

Решение:

а)



Построим сечение:

Построим прямую KN, т.к. точки K и N лежат в одной плоскости

Построим прямую MN, т.к. точки M и N лежат в одной плоскости

Пусть $MN \cap BB_1 = O$

© 2019 Всероссийский проект «ЕГЭ 100 БАЛЛОВ» vk.com/ege100ballov
Составитель: vk.com/shkolapifagora
Разбор всех заданий: http://vk.com/math_100/2019kim20
Разрешается свободное копирование в некоммерческих образовательных целях

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 190114

Построим прямую KO, т.к. точки K и O лежат в одной плоскости
Пусть $KO \cap CC_1 = E$
Пусть $KO \cap BC = P$
Построим прямую MP, т.к. точки M и P лежат в одной плоскости
$MP \cap AC = L$
$MNKL$ –четырёхугольник, являющийся сечением призмы плоскостью MNK

Найдём все стороны $MNKL$:
По теореме косинусов:
$ML^2 = AM^2 + AL^2 - 2 \cdot AM \cdot AL \cdot \cos A$
$ML^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos 60$
$ML^2 = 1 + 4 - 2 = 3$
$ML = \sqrt{3}$

$KN^2 = B_1N^2 + B_1K^2 - 2 \cdot B_1N \cdot B_1K \cdot \cos B_1$
$KN^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos 60$
$KN^2 = 1 + 4 - 2 = 3$
$KN = \sqrt{3}$

Пусть F – основание перпендикуляра из точки N на прямую AB
Пусть Q – основание перпендикуляра из точки K на прямую BC

$MN = \sqrt{NF^2 + MF^2} = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ (по теореме Пифагора)

$KL = \sqrt{QK^2 + QL^2} = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ (по теореме Пифагора)

Итак, все стороны четырёхугольника $MNKL$ равны, докажем равенство диагоналей:

$LN = \sqrt{NF^2 + FL^2} = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 2^2} = \sqrt{6}$ (по теореме Пифагора)

$KM = \sqrt{QK^2 + QM^2} = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 2^2} = \sqrt{6}$ (по теореме Пифагора)

=>
$MNKL$ –квадрат
■

б)

$S_{\text{сечения}} = S_{MNKL} + S_{EKL}$
$S_{MNKL} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$

Найдём площадь треугольника EKL:

Заметим, что в $\triangle B_1NK$ выполняется теорема Пифагора:
$B_1K^2 = B_1N^2 + NK^2$
$2^2 = 1^2 + \sqrt{3}^2$
$4 = 1 + 3$
$4 = 4$
=>$\triangle B_1NK$ – прямоугольный и $\angle B_1NK = 90°$ по теореме, обратной теореме Пифагора
$\angle BMP = 90°$ (т.к. это соответственные углы)
$\angle QLP = 90°$ (т.к. это соответственные углы)
$\angle CLP = 90 - 60 = 30°$
$\angle LCP = 180 - 60 = 120°$ (т.к. это смежные углы)
$\angle LPC = 180 - 120 - 30 = 30°$
=>$\triangle LCP$ – равнобедренный и $LC = CP = 1$

Распишем отношение сходственных сторон в подобных треугольниках KPQ и ECP
$\frac{QK}{EC} = \frac{QP}{CP}$
$\frac{\sqrt{2}}{EC} = \frac{1+1}{1}$
$EC = \frac{\sqrt{2}}{2}$
=>
E – середина CC_1

$EK = \sqrt{C_1K^2 + C_1E^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ (по теореме Пифагора)

$EL = \sqrt{CL^2 + CE^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ (по теореме Пифагора)

$\triangle ELK$ – равнобедренный
Пусть EG – высота$\triangle ELK$
$GK = \frac{1}{2} \cdot KL = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

© 2019 Всероссийский проект «ЕГЭ 100 БАЛЛОВ» vk.com/ege100ballov
Составитель: vk.com/shkolapifagora

Разбор всех заданий: http://vk.com/math_100/2019kim20
Разрешается свободное копирование в некоммерческих образовательных целях

$$EG = \sqrt{EK^2 - GK^2} = \sqrt{\sqrt{\frac{3}{2}}^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2} - \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{EKL} = \frac{1}{2} \cdot KL \cdot EG = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

$$S_{\text{сечения}} = S_{MNKL} + S_{EKL} = 3 + 0{,}75 = 3{,}75$$

Ответ: 3,75

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство

$$\frac{2^x}{2^x - 3} + \frac{2^x + 1}{2^x - 2} + \frac{5}{4^x - 5 \cdot 2^x + 6} \le 0.$$

.

Решение:

Пусть $2^x = t$

$$\frac{t}{t-3} + \frac{t+1}{t-2} + \frac{5}{t^2 - 5t + 6} \le 0$$

Разложение квадратного трёхчлена на множители

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

$t^2 - 5t + 6 = 0$

$D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$

$t_1 = \frac{5+1}{2} = 3$

$t_2 = \frac{5-1}{2} = 2$

$t^2 - 5t + 6 = (t-2)(t-3)$

$$\frac{t}{t-3} + \frac{t+1}{t-2} + \frac{5}{(t-2)(t-3)} \le 0$$

$$\frac{t^2 - 2t + t^2 + t - 3t - 3 + 5}{(t-2)(t-3)} \le 0$$

$$\frac{2t^2 - 4t + 2}{(t-2)(t-3)} \le 0$$

$$\frac{2(t-1)^2}{(t-2)(t-3)} \le 0$$

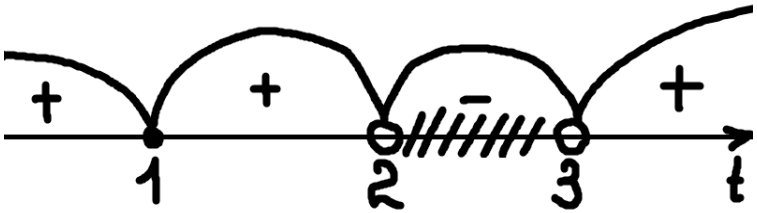
$2(t-1)^2 = 0$

$t = 1$

$(t-2)(t-3) \ne 0$

$t \ne 2$

$t \ne 3$



$t = 1$

$2^x = 1$

$2^x = 2^0$

$x = 0$

$2 < t < 3$

$2 < 2^x < 3$

$2^1 < 2^x < 2^{\log_2 3}$

$1 < x < \log_2 3$

Ответ: $\{0\} \cup (1; \log_2 3)$

© 2019 Всероссийский проект «ЕГЭ 100 БАЛЛОВ» vk.com/ege100ballov
Составитель: vk.com/shkolapifagora

Разбор всех заданий: http://vk.com/math_100/2019kim20
Разрешается свободное копирование в некоммерческих образовательных целях

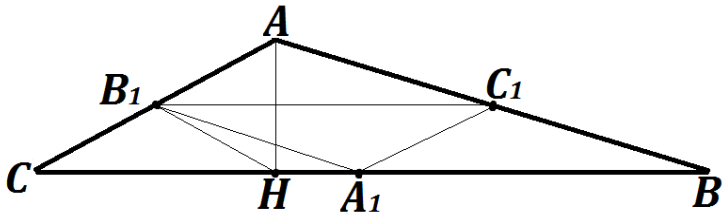
ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 190114

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 В треугольнике ABC точки A_1, B_1 и C_1 – середины сторон BC, AC и AB соответственно, AH – высота, $\angle BAC = 120°$, $\angle BCA = 45°$.

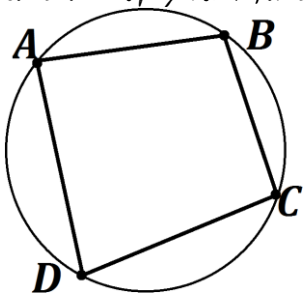
а) Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности.
б) Найдите A_1H, если $BC = 6\sqrt{3}$.

Решение:
а)



Соединим точками четырёхугольник $A_1C_1B_1H$

Свойство четырёхугольника, вписанного в окружность



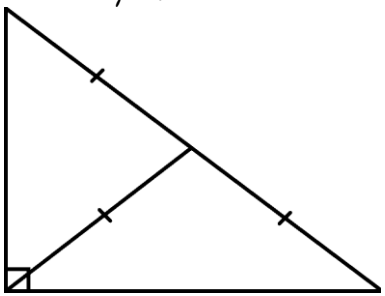
$\angle A + \angle C = 180°$

$\angle B + \angle D = 180°$

Наша задача – доказать, что сумма противоположных углов в данном четырёхугольнике равна 180°

Найдём углы внутри треугольника и подпишем их на рисунке:
$\angle BCA = 45°$
$\angle ABC = 180 - \angle BCA - \angle BAC = 180 - 45 - 120 = 15°$
$\angle BAH = 180 - \angle AHB - \angle ABH = 180 - 90 - 15 = 75°$
$\angle CAH = \angle BAC - \angle BAH = 120 - 75 = 45°$

Свойство медианы



В прямоугольном треугольнике медиана, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы

Рассмотрим $\triangle ACH$ – прямоугольный
B_1H – медиана
=>
$B_1H = AB_1$ (по свойству медианы в прямоугольном треугольнике)
=>
$\triangle AB_1H$ – равнобедренный
=>
$\angle AHB_1 = \angle CAH = 45°$

Признаки параллелограмма

Четырёхугольник является параллелограммом:
1) Если две стороны равны и параллельны
2) Если противоположные углы попарно равны
3) Если противоположные стороны попарно равны
4) Если все противоположные стороны попарно параллельны
5) Если диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам
6) Если сумма соседних углов равна 180 градусов

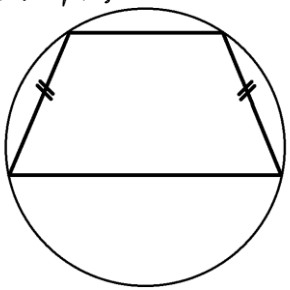
7) Если сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех сторон
8) Если сумма расстояний между серединами противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равна его полупериметру

Рассмотрим $B_1C_1A_1C$
$A_1C_1 \parallel CB_1$
$A_1C_1 = CB_1$ (т.к. A_1C_1 – средняя линия)
=>
$B_1C_1A_1C$ – параллелограмм
=>
$\angle B_1C_1A_1 = \angle ACB = 45°$
$\angle A_1HB_1 = \angle AHA_1 + \angle AHB_1 = 90 + 45 = 135°$

$\angle B_1C_1A_1 + \angle A_1HB_1 = 45 + 135 = 180°$
=>
Четырёхугольник $A_1C_1B_1H$ можно вписать в окружность
=>
Точки A_1, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности
■

б)

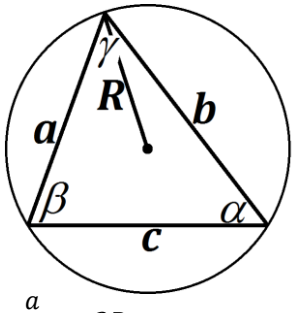
Свойство трапеции



Если трапеция вписана в окружность, то она - равнобедренная

$A_1C_1B_1H$ –равнобедренная трапеция (трапеция из-за параллельности двух сторон, а равнобедренная из-за того, что вписана в окружность)

Теорема синусов



$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$$
или
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$$

$$\frac{6\sqrt{3}}{\sin 120°} = \frac{AC}{\sin 15°}$$

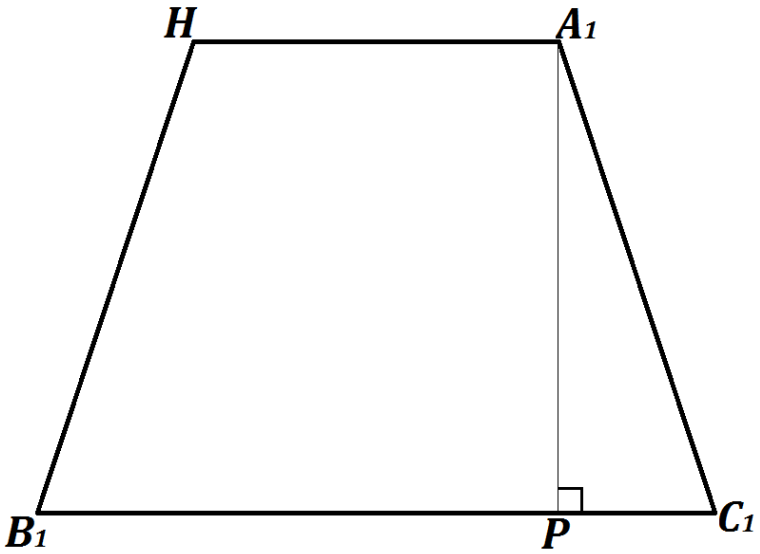
$$AC = \frac{6\sqrt{3}\cdot\sin 15°}{\sin 120°} = \frac{6\sqrt{3}\cdot\sin 15°}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 12\sin 15°$$
=>
$$A_1C_1 = \frac{AC}{2} = \frac{12\sin 15°}{2} = 6\sin 15°$$
$$B_1C_1 = \frac{BC}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

Рассмотрим $A_1C_1B_1H$:

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 190114

© 2019 Всероссийский проект «ЕГЭ 100 БАЛЛОВ» vk.com/ege100ballov
Составитель: vk.com/shkolapifagora

Разбор всех заданий: http://vk.com/math_100/2019kim20
Разрешается свободное копирование в некоммерческих образовательных целях



Пусть
A_1P – высота трапеции

$\angle A_1C_1P = \angle ACB = 45°$
$\angle PA_1C_1 = 180 - \angle A_1PC_1 - \angle A_1C_1P = 180 - 90 - 45 = 45°$
=>
$\triangle A_1C_1P$ –равнобедренный
По теореме Пифагора:
$A_1{C_1}^2 = C_1P^2 + A_1P^2$
$A_1{C_1}^2 = 2C_1P^2$
$(6\sin 15°)^2 = 2C_1P^2$
$36\sin^2 15° = 2C_1P^2$
$C_1P^2 = 18\sin^2 15°$
$C_1P = 3\sqrt{2}\sin 15°$

$A_1H = B_1C_1 - 2C_1P = 3\sqrt{3} - 6\sqrt{2}\sin 15°$

Формулы сложения и вычитания аргументов
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$
$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$\sin 15° = \sin(45-30)°$
$\sin 15° = \sin 45°\cos 30° - \cos 45°\sin 30°$
$$\sin 15° = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$A_1H = 3\sqrt{3} - 6\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$$
$$A_1H = 3\sqrt{3} - 3\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)$$
$A_1H = 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 3 = 3$

Ответ: б) 3

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 190114

© 2019 Всероссийский проект «ЕГЭ 100 БАЛЛОВ» vk.com/ege100ballov
Составитель: vk.com/shkolapifagora
Разбор всех заданий: http://vk.com/math_100/2019kim20
Разрешается свободное копирование в некоммерческих образовательных целях

17 В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S млн рублей, где S –**целое** число. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019	Июль 2020
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}7S$	$0{,}4S$	$0{,}2S$	0

Найдите наименьшее значение S, при котором общая сумма выплат будет больше 10 млн рублей.

Решение:
Пусть
1 января – день начисления процентов
1 апреля – день выплаты части долга

Составим таблицу как изменялась сумма долга:

Число	Сумма долга
01.07.2016	S

2017 год

01.01.2017	$\left(1+\frac{20}{100}\right)\cdot S = 1{,}2\cdot S$
01.04.2017	
01.07.2017	$0{,}7\cdot S$

=>

01.04.2017	$1{,}2\cdot S - 0{,}7\cdot S = 0{,}5\cdot S$

2018 год

01.01.2018	$1{,}2\cdot 0{,}7\cdot S = 0{,}84\cdot S$
01.04.2018	
01.07.2018	$0{,}4\cdot S$

=>

01.04.2018	$0{,}84\cdot S - 0{,}4\cdot S = 0{,}44\cdot S$

2019 год

01.01.2019	$1{,}2\cdot 0{,}4\cdot S = 0{,}48\cdot S$
01.04.2019	
01.07.2019	$0{,}2\cdot S$

=>

01.04.2019	$0{,}48\cdot S - 0{,}2\cdot S = 0{,}28\cdot S$

20209 год

01.01.2020	$1{,}2\cdot 0{,}2\cdot S = 0{,}24\cdot S$
01.04.2020	
01.07.2020	0

=>

01.04.2020	$0{,}24\cdot S - 0 = 0{,}24\cdot S$

Общая сумма выплат должна быть больше 10 млн рублей
(по условию)
=>
$0{,}5\cdot S + 0{,}44\cdot S + 0{,}28\cdot S + 0{,}24\cdot S > 10$млн
$1{,}46\cdot S > 10$
$S > \frac{1000}{146}$
$S > \frac{500}{73}$

© 2019 Всероссийский проект «ЕГЭ 100 БАЛЛОВ» vk.com/ege100ballov
Составитель: vk.com/shkolapifagora

Разбор всех заданий: http://vk.com/math_100/2019kim20
Разрешается свободное копирование в некоммерческих образовательных целях

$S > 6\frac{62}{73}$

Требуется найти наименьшее подходящее целое S
=>
$S = 7$

Ответ: 7

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

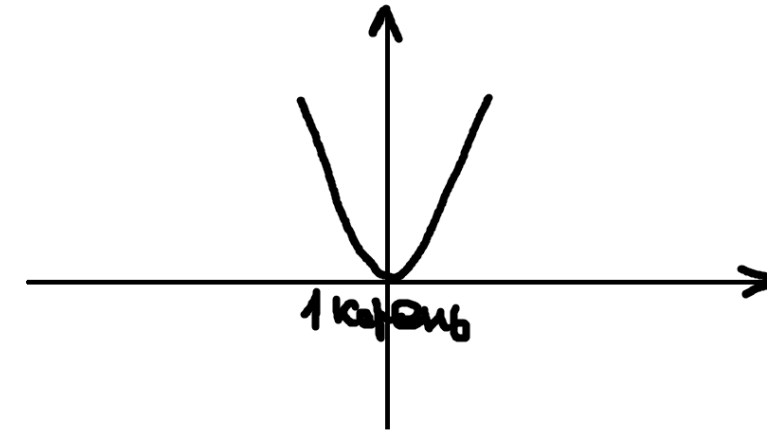
18 Найдите все значения a, при которых уравнение
$\frac{5a}{a-3} \cdot 7^{|x|} = 49^{|x|} + \frac{6a+7}{a-3}$
имеет ровно два различных корня.

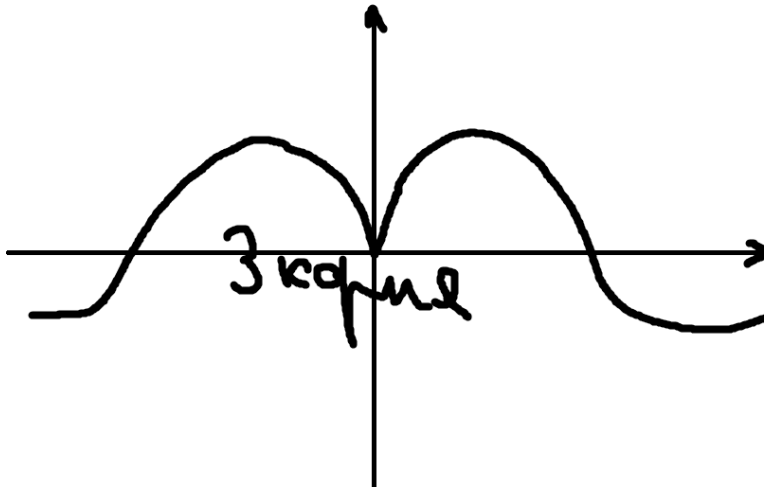
Решение:
$\frac{5a}{a-3} \cdot 7^{|x|} - 49^{|x|} - \frac{6a+7}{a-3} = 0$

Рассмотрим функцию:
$f(x) = \frac{5a}{a-3} \cdot 7^{|x|} - 49^{|x|} - \frac{6a+7}{a-3}$

Заметим, что функция $f(x)$ – чётная, т.к. $f(-x) = f(x)$

=>
Если $x = 0$, то имеем нечётное количество корней





=>
$x \neq 0$
(т.к. корней должно быть 2)

Пусть
$7^{|x|} = t$
=>
$t \geq 1$

© 2019 Всероссийский проект «ЕГЭ 100 БАЛЛОВ» vk.com/ege100ballov
Составитель: vk.com/shkolapifagora

Разбор всех заданий: http://vk.com/math_100/2019kim20
Разрешается свободное копирование в некоммерческих образовательных целях

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 190114

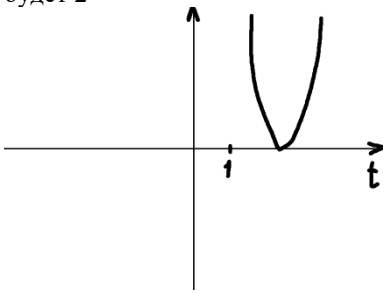
Но т.к. $x \neq 0$, получаем:
$t > 1$

$7^{|x|} = t$
$7^{|x|} = 7^{\log_7 t}$
$|x| = \log_7 t$
$x = \pm \log_7 t$

Перейдём к уравнению после замены переменной:
$-t^2 + \frac{5a}{a-3} \cdot t - \frac{6a+7}{a-3} = 0$
$t^2 - \frac{5a}{a-3} \cdot t + \frac{6a+7}{a-3} = 0$

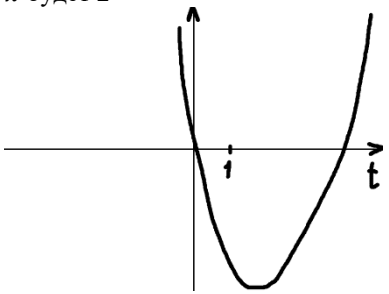
Рассмотрим функцию:
$f(t) = t^2 - \frac{5a}{a-3} \cdot t + \frac{6a+7}{a-3}$
$f(t)$ −парабола, ветви которой направлены вверх

Рассмотрим все варианты:
1
Если $f(t)$ не имеет корней, то корней x тоже не будет
2
Если $f(t)$ имеет 1 корень (в вершине параболы) при $t \leq 1$, то корней x не будет
3
Если $f(t)$ имеет 1 корень (в вершине параболы) при $t > 1$, то корней x будет 2



$D = 0$
4

Если $f(t)$ имеет 2 корня, но один из корней $t < 1$, а другой $t > 1$, то корней x будет 2



$f(1) < 0$
5
Если $f(t)$ имеет 2 корня, но один из корней $t < 1$, и другой $t < 1$, то корней x не будет
6
Если $f(t)$ имеет 2 корня, но один из корней $t > 1$, и другой $t > 1$, то корней x будет 4

Итак, нам подходят 2 ситуации:
1
$D = 0$ (при $t > 1$)
$D = \left(-\frac{5a}{a-3}\right)^2 - 4\left(\frac{6a+7}{a-3}\right) = 0$
$\left(\frac{5a}{a-3}\right)^2 - \left(\frac{24a+28}{a-3}\right) = 0$
$\frac{25a^2}{(a-3)^2} - \frac{24a^2+28a-72a-84}{(a-3)^2} = 0$
$\frac{a^2-28a+72a+84}{(a-3)^2} = 0$
$\frac{a^2+44a+84}{(a-3)^2} = 0$
$a \neq 3$

$a^2 + 44a + 84 = 0$
$D = 1600$
$a_1 = \frac{-44+40}{2} = -2$
$a_2 = \frac{-44-40}{2} = -42$

© 2019 Всероссийский проект «ЕГЭ 100 БАЛЛОВ» vk.com/ege100ballov
Составитель: vk.com/shkolapifagora

Разбор всех заданий: http://vk.com/math_100/2019kim20
Разрешается свободное копирование в некоммерческих образовательных целях

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 190114

Проверим выполнение условия $t > 1$
Если $a = -2$
$t^2 - \frac{5a}{a-3} \cdot t + \frac{6a+7}{a-3} = 0$
$t^2 - 2t + 1 = 0$
$(t-1)^2 = 0$
$t = 1$
=>
$a = -2$не подходит

Если $a = -42$
$t^2 - \frac{5a}{a-3} \cdot t + \frac{6a+7}{a-3} = 0$
$t^2 - \frac{14}{3}t + \frac{49}{9} = 0$
$\left(t - \frac{7}{3}\right)^2 = 0$
$t = \frac{7}{3}$
=>
$a = -42$ подходит
2
$f(1) < 0$
$f(t) = t^2 - \frac{5a}{a-3} \cdot t + \frac{6a+7}{a-3}$
$f(1) = 1 - \frac{5a}{a-3} + \frac{6a+7}{a-3}$

$1 - \frac{5a}{a-3} + \frac{6a+7}{a-3} < 0$

$\frac{a-3-5a+6a+7}{a-3} < 0$

$\frac{2a+4}{a-3} < 0$

$\frac{a+2}{a-3} < 0$



Ответ: $a \in \{-42\} \cup (-2; 3)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений а, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений а	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений а	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Три числа назовём *хорошей* тройкой, если они могут быть длинами сторон треугольника.
Три числа назовём отличной тройкой, если они могут быть длинами сторон прямоугольного треугольника.

а) Даны 5 различных натуральных чисел. Может ли оказаться, что среди них не найдётся ни одной хорошей тройки?
б) Даны 4 различных натуральных числа. Может ли оказаться, что среди них можно найти три отличных тройки?
в) Даны 10 различных чисел (необязательно натуральных). Какое наибольшее количество отличных троек могло оказаться среди них?

Решение:

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 190114

© 2019 Всероссийский проект «ЕГЭ 100 БАЛЛОВ» vk.com/ege100ballov
Составитель: vk.com/shkolapifagora
Разбор всех заданий: http://vk.com/math_100/2019kim20
Разрешается свободное копирование в некоммерческих образовательных целях

Три числа могут быть длинами сторон треугольника, если выполняется правило неравенства треугольника

а)
Может, например, геометрическая прогрессия с $b_1 = 1$ и $q = 2$
$1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16$

$1 + 2 < 4$
$2 + 4 < 8$
$4 + 8 < 16$

3 нарушения неравенства треугольников
=>
Нет ни одной хорошей тройки

б)
Три числа могут быть длинами сторон прямоугольного треугольника, если выполняется теорема Пифагора

Пусть
a, b, c и d – эти различные натуральные числа
$a < b < c < d$
Тогда гипотенузой могут быть только c и d (потому что требуется наличие двух сторон меньше, чем они сами)

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 \quad (1) \\ a^2 + c^2 = d^2 \quad (2) \\ b^2 + c^2 = d^2 \quad (3) \end{cases}$$

Из уравнений (2) и (3) следует, что $a = b$, что противоречит условию различности
=>
Не может

в)
Пусть дан набор чисел

$$abcdefghij$$

Пусть
$a < b < c < d < e < f < g < h < i < j$

jможет быть гипотенузой максимум в 4 треугольниках
(т.к. при большем количестве треугольников какие-то из оставшихся чисел окажутся равны аналогично ситуации в пункте б)

jможет быть гипотенузой максимум в 4 треугольниках
iможет быть гипотенузой максимум в 4 треугольниках
hможет быть гипотенузой максимум в 3 треугольниках
gможет быть гипотенузой максимум в 3 треугольниках
fможет быть гипотенузой максимум в 2 треугольниках
eможет быть гипотенузой максимум в 2 треугольниках
dможет быть гипотенузой максимум в 1 треугольнике
cможет быть гипотенузой максимум в 1 треугольнике
=>
20 – Наибольшее возможное количество отличных троек

Пример такого набора чисел:

$$1\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{4}\sqrt{5}\sqrt{6}\sqrt{7}\sqrt{8}\sqrt{9}\sqrt{10}$$

Ответ: а) да, б) нет, в) 20

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: - обоснованное решение п. а; - обоснованное решение п. б; - искомая оценка в п. в; - пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

© 2019 Всероссийский проект «ЕГЭ 100 БАЛЛОВ» vk.com/ege100ballov
Составитель: vk.com/shkolapifagora

Разбор всех заданий: http://vk.com/math_100/2019kim20
Разрешается свободное копирование в некоммерческих образовательных целях