

**Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень**

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания с кратким ответом повышенного уровня сложности и 7 заданий с развернутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

ОТВЕТ: $-0,8$

10 - 0,8

Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

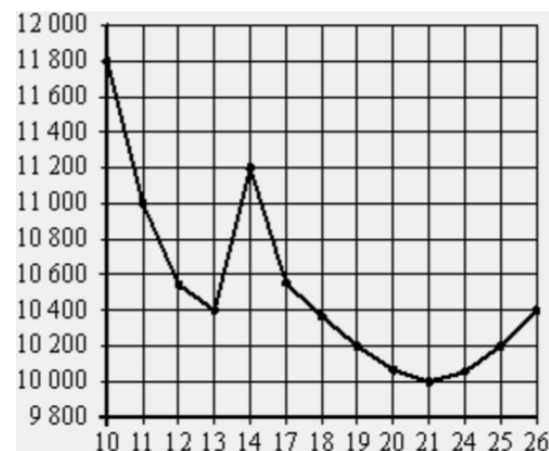
1

В квартире, где проживает Ася, установлен прибор учёта расхода горячей воды (счётчик). 1 мая счётчик показывал расход 84 куб. м воды, а 1 июня – 96,5 куб. м. Какую сумму должна заплатить Ася за горячую воду за май, если цена 1 куб. м горячей воды составляет 72 руб. 60 коп.? Ответ дайте в рублях.

ОТВЕТ:

2

На рисунке жирными точками показана цена никеля на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 10 по 26 ноября 2008 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – цена тонны никеля в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наименьшую цену никеля на момент закрытия торгов в период с 11 по 17 ноября (в долларах США за тонну).



Ответ:



- 3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите её площадь.



Ответ: _____.

- 4 В фирме такси в наличии 60 легковых автомобилей; 27 из них чёрного цвета с жёлтыми надписями на боках, остальные – жёлтого цвета с чёрными надписями. Найдите вероятность того, что на случайный вызов приедет машина жёлтого цвета с чёрными надписями.

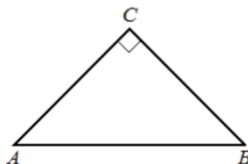
Ответ: _____.

- 5 Найдите корень уравнения $\sqrt{28 - 2x} = 2$.

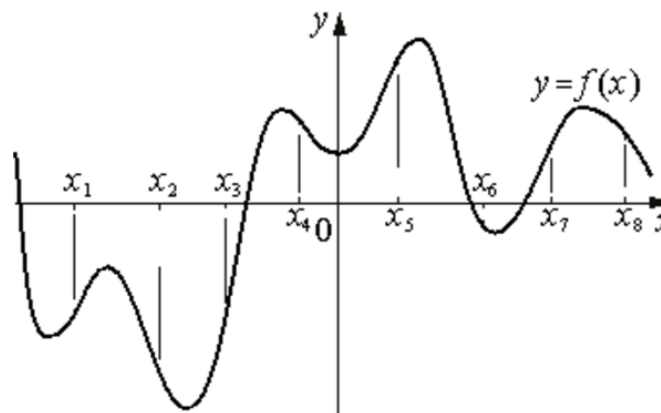
Ответ: _____.

- 6 В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 10$, $AC = \sqrt{51}$. Найдите $\sin A$.

Ответ: _____.



- 7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены восемь точек: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



Ответ: _____.

- 8 Высота конуса равна 21, а длина образующей равна 29. Найдите диаметр основания конуса.



Ответ: _____.



9

Найдите $16 \cos 2\alpha$, если $\cos \alpha = 0,5$.

Ответ: _____.

10

Рейтинг R интернет-магазина вычисляется по формуле

$$R = r_{\text{пок}} - \frac{r_{\text{пок}} - r_{\text{экс}}}{(K + 1) \cdot \frac{0,02K}{r_{\text{пок}} + 0,1}},$$

где $r_{\text{пок}}$ — средняя оценка магазина покупателями (от 0 до 1), $r_{\text{экс}}$ — оценка магазина экспертами (от 0 до 0,7) и K — число покупателей, оценивших магазин.

Найдите рейтинг интернет-магазина «Бета», если число покупателей, оставивших отзыв о магазине, равно 20, их средняя оценка равна 0,25, а оценка экспертов равна 0,61.

Ответ: _____.

11

Заказ на изготовление 154 деталей первый рабочий выполняет на 3 часа быстрее, чем второй. Сколько деталей в час изготавливает второй рабочий, если известно, что первый за час изготавливает на 3 детали больше?

Ответ: _____.

12

Найдите наибольшее значение функции $y = 13 \lg x - 13x + 4$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

а) Решите уравнение

$$(16^{\sin x})^{\cos x} = 4\sqrt{3} \sin x.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$$\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right].$$

14

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На ребре AB отмечена точка K так, что $AK = 1$. Точки M и L — середины рёбер A_1C_1 и B_1C_1 соответственно. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L .

а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ .

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости γ .

15

Решите неравенство

$$\frac{10^x - 25 \cdot 2^x - 2 \cdot 5^x + 50}{5x - x^2 - 4} \geq 0.$$

16

В треугольнике ABC точки A_1 , B_1 и C_1 — середины сторон BC , AC и AB соответственно, AH — высота, $\angle BAC = 30^\circ$, $\angle BCA = 45^\circ$.

а) Докажите, что точки A_1 , B_1 , C_1 и H лежат на одной окружности.

б) Найдите A_1H , если $BC = 4\sqrt{3}$.



17 15-го января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму следует взять в кредит, чтобы общая сумма выплат после полного его погашения равнялась 1 млн рублей?

18 Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство $|x^2 - 8x + a + 5| > 10$ не имеет решений на отрезке $[a - 6; a]$.

19 а) Существует ли конечная арифметическая прогрессия, состоящая из пяти натуральных чисел, такая, что сумма наибольшего и наименьшего членов этой прогрессии равна 99?
 б) Конечная арифметическая прогрессия состоит из шести натуральных чисел. Сумма наибольшего и наименьшего членов этой прогрессии равна 9. Найдите все числа, из которых состоит эта прогрессия.
 в) Среднее арифметическое членов конечной арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, равно 6,5. Какое наибольшее количество членов может быть в этой прогрессии?

О проекте «Пробный ЕГЭ каждую неделю»

Данный ким составлен командой всероссийского волонтерского проекта «ЕГЭ 100 баллов» <https://vk.com/ege100ballov> и безвозмездно распространяется для любых некоммерческих образовательных целей.

Нашли ошибку в варианте?

Напишите нам, пожалуйста, и мы обязательно её исправим!

Для замечаний и пожеланий: https://vk.com/topic-10175642_39008096
 (также доступны другие варианты для скачивания)

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:

ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	7 лет репетиторской деятельности
Регалии:	Основатель проекта Школа Пифагора
Аккаунт ВК:	https://vk.com/eugene10
Сайт и доп. информация:	https://vk.com/shkolapifagora https://youtube.com/ШколаПифагора



Система оценивания Ответы к заданиям 1-19

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Верно выполненные задания 13–15 максимум оцениваются в 2 балла, задания 16–17 – в 3 балла, а задания 18–19 – в 4 балла.

№ задания	Ответ
1	907,5
2	10400
3	26
4	0,55
5	12
6	0,7
7	4
8	40
9	-2
10	0,265
11	11
12	4
13	а) $\pi n, \frac{\pi}{6} + 2\pi n, -\frac{\pi}{6} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$. б) $3\pi; 4\pi; \frac{23\pi}{6}; \frac{25\pi}{6}$
14	0,75
15	[2; 4)
16	6
17	800 тыс.
18	$\left[\frac{19 - \sqrt{45}}{2}; \frac{7 + \sqrt{69}}{2} \right]$
19	а) нет, б) (2; 3; 4; 5; 6; 7), в) 12

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться бездоказательства и ссылки на любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13

а) Решите уравнение

$$(16^{\sin x})^{\cos x} = 4^{\sqrt{3} \sin x}.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$$\left[3\pi; \frac{9\pi}{2} \right].$$

Решение:

а)

Возведение степени в степень

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$16^{\sin x \cdot \cos x} = 4^{\sqrt{3} \sin x}$$

$$(4^2)^{\sin x \cdot \cos x} = 4^{\sqrt{3} \sin x}$$

$$4^{2 \sin x \cdot \cos x} = 4^{\sqrt{3} \sin x}$$

$$2 \sin x \cdot \cos x = \sqrt{3} \sin x$$

$$2 \sin x \cdot \cos x - \sqrt{3} \sin x = 0$$

$$\sin x \cdot (2 \cos x - \sqrt{3}) = 0$$

$$\sin x = 0$$

$$2 \cos x - \sqrt{3} = 0$$



$x = \pi n; n \in \mathbb{Z}$	$2 \cos x = \sqrt{3}$ $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$ $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$
-------------------------------	---

б)

Подберём корни для $x = \pi n; n \in \mathbb{Z}$ Если $n = 2$, то $x = 2\pi \notin \left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$ Если $n = 3$, то $x = 3\pi \in \left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$ Если $n = 4$, то $x = 4\pi \in \left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$ Если $n = 5$, то $x = 5\pi \notin \left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$ Подберём корни для $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$ Если $n = 1$, то $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6} \notin \left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$ Если $n = 2$, то $x = \frac{\pi}{6} + 4\pi = \frac{25\pi}{6} \in \left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$ Если $n = 3$, то $x = \frac{\pi}{6} + 6\pi = \frac{37\pi}{6} \notin \left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$ Подберём корни для $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$ Если $n = 1$, то $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6} \notin \left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$ Если $n = 2$, то $x = -\frac{\pi}{6} + 4\pi = \frac{23\pi}{6} \in \left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$ Если $n = 3$, то $x = -\frac{\pi}{6} + 6\pi = \frac{35\pi}{6} \notin \left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$ Ответ: а) $\pi n, \frac{\pi}{6} + 2\pi n, -\frac{\pi}{6} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$. б) $3\pi; 4\pi; \frac{23\pi}{6}; \frac{25\pi}{6}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта а и пункта б	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

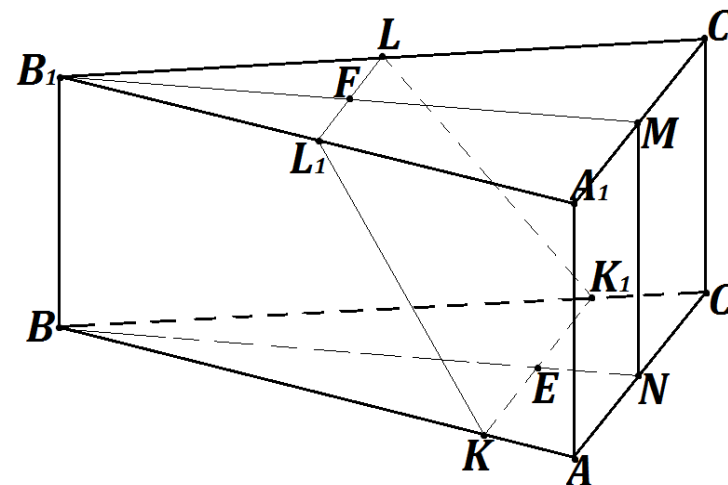
14

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На ребре AB отмечена точка K так, что $AK = 1$. Точки M и L – середины рёбер A_1C_1 и B_1C_1 соответственно. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L .

- а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ .
 б) Найдите расстояние от точки C до плоскости γ .

Решение:

а)

Построим плоскость γ :Построим прямую KK_1 такую, что $KK_1 \parallel AC$ Построим прямую K_1L , т.к. точки K_1 и L лежат в одной плоскостиПостроим прямую LL_1 такую, что $LL_1 \parallel A_1C_1$ Построим прямую KL_1 , т.к. точки K и L_1 лежат в одной плоскостиТрапеция KK_1LL_1 – искомое сечение плоскостью γ 

Рассмотрим плоскость BB_1M :

Опустим перпендикуляр MN на прямую AC

Пусть $B_1M \cap LL_1 = F$

Пусть $BN \cap KK_1 = E$

BB_1MN — прямоугольник

$BB_1 = 3$

$$B_1M = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 6 = 3\sqrt{3}$$

$NE:BE = AK:BK$

$AK:BK = 1:5$

$\Rightarrow NE:BE = 1:5$

$$NE = \frac{1}{6} \cdot B_1M = \frac{1}{6} \cdot 3\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$BE = \frac{5}{6} \cdot B_1M = \frac{5}{6} \cdot 3\sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$B_1F:FM = B_1L:LC_1$

$B_1L:LC_1 = 1:1$

$\Rightarrow B_1F = FM$

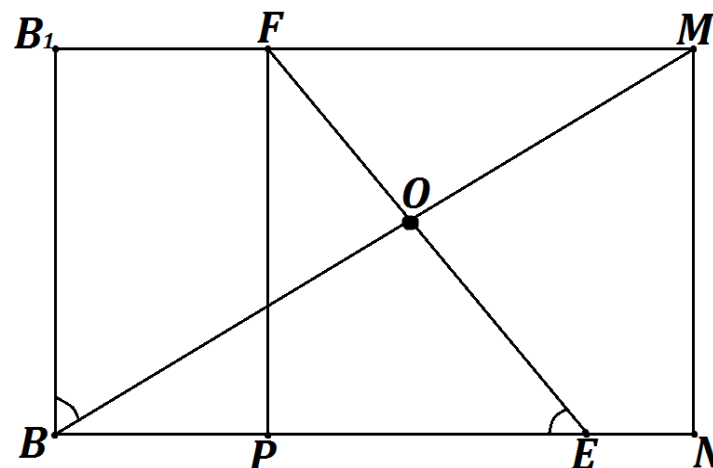
$$B_1F = FM = \frac{1}{2} \cdot B_1M = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Построим прямую EF

Докажем, что прямые EF и BM перпендикулярны:

$\angle BOE$ — искомый

Рассмотрим BB_1MN — прямоугольник:



Опустим перпендикуляр FP на прямую BN

$$PE = FM - NE = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg} \angle BEF = \frac{FP}{PE} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

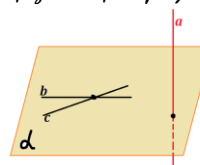
$$\operatorname{tg} \angle MBB_1 = \frac{MB_1}{BB_1} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \angle BEF = \angle MBB_1 = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \angle MBN = 90 - 60 = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \angle BOE = 180 - \angle BEF - \angle MBN = 180 - 60 - 30 = 90^\circ$$

Признак перпендикулярности прямой и плоскости



Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости

$$BM \perp EF$$



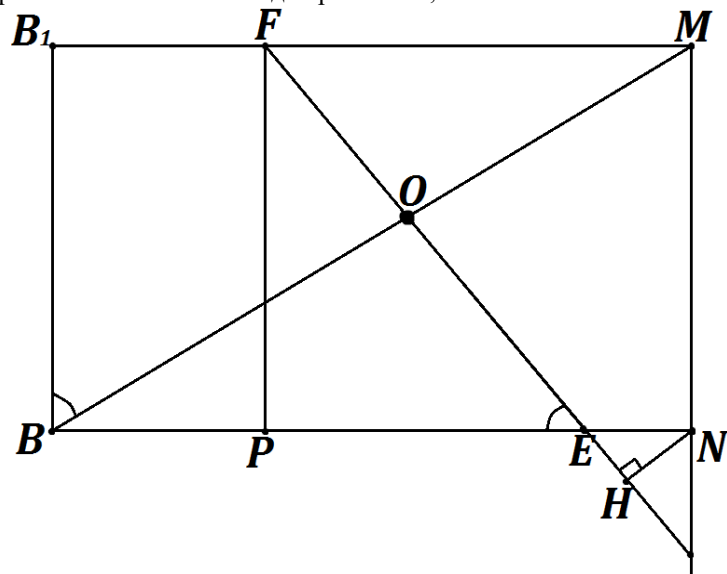
$BM \perp KK_1$ (т.к. $KK_1 \perp BN$, являющейся проекцией BM на плоскость ABC по теореме о трёх перпендикулярах)

$\Rightarrow BM \perp \gamma$

■

б)

Т.к. прямая $AC \parallel \gamma$, то расстояние от точки C до плоскости γ будет равно расстоянию от точки N до прямой EF , т.е. NH —?



$$\operatorname{tg} \angle BEF = \operatorname{tg} \angle NEH = \sqrt{3}$$

Основные Тригонометрические формулы

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\sqrt{3}^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \angle NEH}$$

$$\cos \angle NEH = \frac{1}{2}$$

$$\sin^2 \angle NEH + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

$$\sin \angle NEH = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{NH}{EN}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{NH}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow NH = \frac{3}{4} = 0,75$$

Ответ: б) 0,75

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт а. ИЛИ Верно решён пункт б при отсутствии обоснований в пункте а	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15

Решите неравенство

$$\frac{10^x - 25 \cdot 2^x - 2 \cdot 5^x + 50}{5x - x^2 - 4} \geq 0.$$

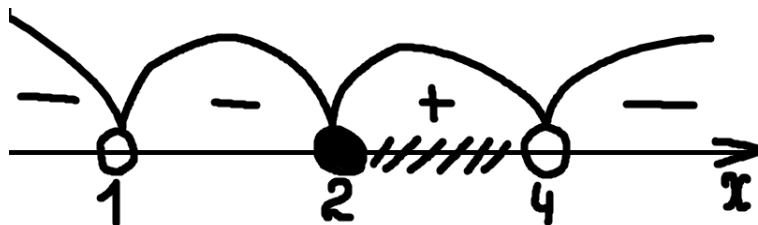
Решение:

$$\begin{aligned} 10^x - 25 \cdot 2^x - 2 \cdot 5^x + 50 &= 0 \\ (10^x - 25 \cdot 2^x) + (-2 \cdot 5^x + 50) &= 0 \\ 2^x \cdot (5^x - 25) - 2 \cdot (5^x - 25) &= 0 \\ (5^x - 25)(2^x - 2) &= 0 \end{aligned}$$

$5^x - 25 = 0$	$2^x - 2 = 0$
$5^x = 25$	$2^x = 2$
$5^x = 5^2$	$2^x = 2^1$
$x = 2$	$x = 1$

$$\begin{aligned} 5x - x^2 - 4 &\neq 0 \\ -x^2 + 5x - 4 &\neq 0 \\ D &= 25 - 16 = 9 \\ x_1 &= \frac{-5 + 3}{-2} = 1 \\ x_2 &= \frac{-5 - 3}{-2} = 4 \end{aligned}$$





Ответ: $[2; 4)$

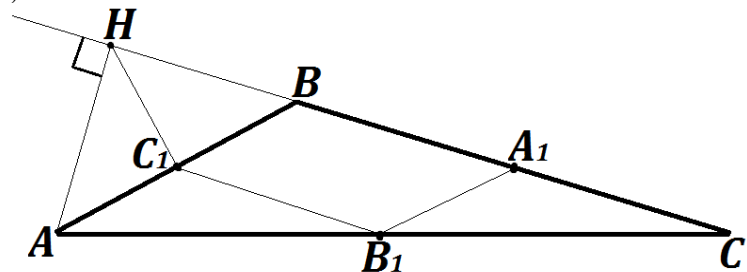
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

- 16 В треугольнике ABC точки A_1 , B_1 и C_1 — середины сторон BC , AC и AB соответственно, AH — высота, $\angle BAC = 30^\circ$, $\angle BCA = 45^\circ$.

- а) Докажите, что точки A_1 , B_1 , C_1 и H лежат на одной окружности.
 б) Найдите A_1H , если $BC = 4\sqrt{3}$.

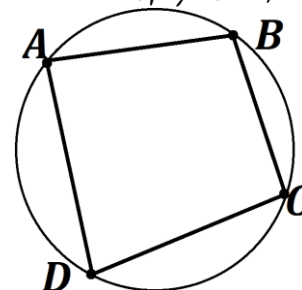
Решение:

а)



Соединим точками четырёхугольник $A_1B_1C_1H$

Свойство четырёхугольника, вписанного в окружность



$$\angle A + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle B + \angle D = 180^\circ$$

Наша задача — доказать, что сумма противоположных углов в данном четырёхугольнике равна 180°

Найдём углы внутри треугольника и подпишем их на рисунке:

$$\angle BCA = 45^\circ$$

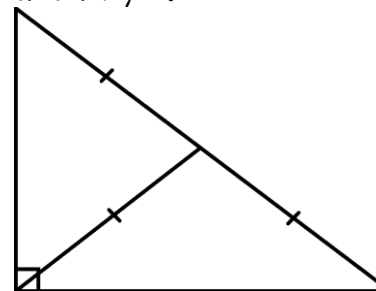
$$\angle ABC = 180 - \angle BCA - \angle BAC = 180 - 45 - 30 = 105^\circ$$

$$\angle ABH = 180 - \angle ABC = 180 - 105 = 75^\circ$$

$$\angle BAH = 180 - \angle AHB - \angle ABH = 180 - 90 - 75 = 15^\circ$$

$$\angle CAH = \angle BAC + \angle BAH = 30 + 15 = 45^\circ$$

Свойство медианы



В прямоугольном треугольнике медиана, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы

Рассмотрим $\triangle ABH$ — прямоугольный

C_1H — медиана

$\Rightarrow$

$C_1H = AC_1$ (по свойству медианы в прямоугольном треугольнике)



=>

 $\triangle AC_1H$ – равнобедренный

=>

$$\angle AHC_1 = \angle BAH = 15^\circ$$

Признаки параллелограмма

Четырёхугольник является параллелограммом:

- 1) Если две стороны равны и параллельны
- 2) Если противоположные углы попарно равны
- 3) Если противоположные стороны попарно равны
- 4) Если все противоположные стороны попарно параллельны
- 5) Если диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам
- 6) Если сумма соседних углов равна 180 градусов
- 7) Если сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех сторон
- 8) Если сумма расстояний между серединами противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равна его полупериметру

Рассмотрим $A_1BC_1B_1$
 $A_1B_1 \parallel BC_1$ (т.к. A_1B_1 – средняя линия)
 $A_1B_1 = BC_1$

=>

 $A_1BC_1B_1$ – параллелограмм

=>

$$\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC = 105^\circ$$

$$\angle A_1HC_1 = \angle AHA_1 - \angle AHC_1 = 90 - 15 = 75^\circ$$

$$\angle A_1B_1C_1 + \angle A_1HC_1 = 105 + 75 = 180^\circ$$

=>

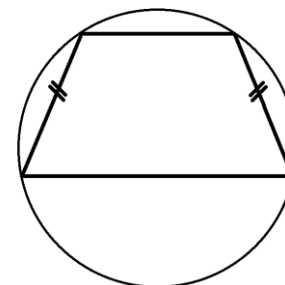
Четырёхугольник $A_1B_1C_1H$ можно вписать в окружность

=>

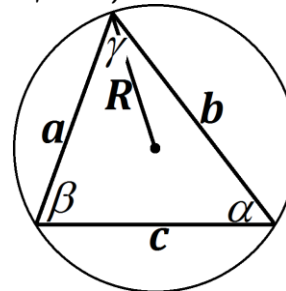
Точки A_1, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности

■

б)

Свойства трапеции

Если трапеция вписана в окружность, то она - равнобедренная

 $A_1B_1C_1H$ – равнобедренная трапеция (трапеция из-за параллельности двух сторон, а равнобедренная из-за того, что вписана в окружность)
Теорема синусов

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$$

или

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C}$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{\sin 30^\circ} = \frac{AB}{\sin 45^\circ}$$

$$AB = \frac{4\sqrt{3} \cdot \sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{6}$$

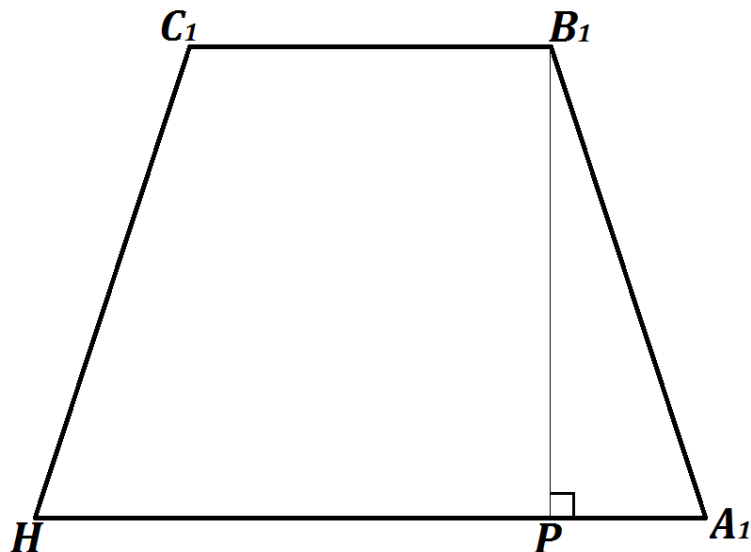
=>



$$A_1B_1 = \frac{AB}{2} = \frac{4\sqrt{6}}{2} = 2\sqrt{6}$$

$$B_1C_1 = \frac{BC}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Рассмотрим $A_1B_1C_1H$:



Пусть
 B_1P — высота трапеции

$$\angle B_1A_1P = \angle BHC_1 = 75^\circ$$

Формулы сложения и вычитания аргументов

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\cos \angle B_1A_1P = \frac{A_1P}{A_1B_1}$$

$$\cos 75^\circ = \frac{A_1P}{2\sqrt{6}}$$

$$\cos(45 + 30)^\circ = \frac{A_1P}{2\sqrt{6}}$$

$$\cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{A_1P}{2\sqrt{6}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{A_1P}{2\sqrt{6}}$$

$$\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{A_1P}{2\sqrt{6}}$$

$$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{A_1P}{2\sqrt{6}} \quad | \cdot 2\sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{A_1P}{\sqrt{3}}$$

$$3\sqrt{2} - \sqrt{6} = \sqrt{2} \cdot A_1P$$

$$A_1P = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{\sqrt{2}} = 3 - \sqrt{3}$$

$$A_1H = 2 \cdot A_1P + B_1C_1 = 2 \cdot (3 - \sqrt{3}) + 2\sqrt{3} = 6$$

Ответ: б) 6

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2



Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , ИЛИ При обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> с использованием утверждения пункта <i>a</i> , при этом пункт <i>a</i> не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 15-го января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму следует взять в кредит, чтобы общая сумма выплат после полного его погашения равнялась 1 млн рублей?

Решение:

Пусть x тыс. — сумма кредита

1000 тыс. — общая сумма выплат

Составим таблицу:

Месяц	Долг на начало месяца	Основной платёж	Дополнительный платёж
1	x	$\frac{x}{24}$	$\frac{2}{100} \cdot x$
2	$\frac{23x}{24}$	$\frac{x}{24}$	$\frac{2}{100} \cdot \frac{23x}{24}$

...			
24	$\frac{x}{24}$	$\frac{x}{24}$	$\frac{2}{100} \cdot \frac{x}{24}$

Общая сумма выплат (ОСВ) — это все основные платежи и все дополнительные платежи (сумму всех дополнительных платежей найдём с помощью формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии)

Сумма первых n членов арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$\text{ОСВ} = 24 \cdot \frac{x}{24} + \frac{\frac{2}{100} \cdot x + \frac{2}{100} \cdot \frac{x}{24}}{2} \cdot 24 = 1000$$

$$x + \frac{2x}{100} \cdot \left(1 + \frac{1}{24}\right) \cdot 12 = 1000$$

$$x + \frac{2x}{100} \cdot \frac{25}{24} \cdot 12 = 1000$$

$$x + \frac{x}{100} \cdot 25 = 1000$$

$$1,25x = 1000$$

$$x = 800 \text{ тыс.}$$

Ответ: 800 тыс.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно	2
Верно построена математическая модель и решение	1



сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18

Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство $|x^2 - 8x + a + 5| > 10$ не имеет решений на отрезке $[a - 6; a]$.

Решение:

Решим обратную задачу:

Найдём все значения a , при каждом из которых неравенство $|x^2 - 8x + a + 5| \leq 10$ выполняется для всех x на отрезке $[a - 6; a]$.

Рассмотрим функцию

$$f(x) = x^2 - 8x + a + 5$$

$f(x)$ – парабола, ветви которой направлены вверх

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{8}{2} = 4$$

При $x > 4$ парабола возрастает

При $x < 4$ парабола убывает

$$x \in [a - 6; a]$$

$\Rightarrow$

длина рассматриваемого отрезка по оси Ox равна 6

$$-10 \leq x^2 - 8x + a + 5 \leq 10$$

$\Rightarrow$

размах области значений параболы на отрезке $[a - 6; a]$ равен 20

Если x_0 лежит вне отрезка $[a - 6; a]$, то приращение параболы на отрезке длиной 6 будет 36 или больше

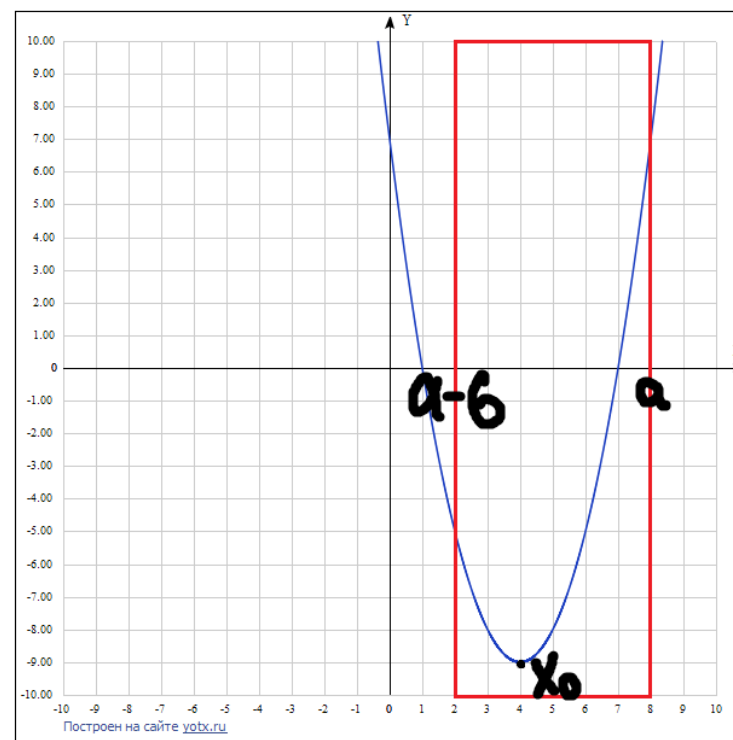
$\Rightarrow$

при таком варианте график не поместится в заданный размах области значений

$\Rightarrow$

$$x_0 \in [a - 6; a]$$

Один из вариантов как выглядит график:



Очевидно, что наибольшее значение функции достигается в одной из границ отрезка, а наименьшее значение функции достигается в вершине параболы

Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} x_0 \in [a - 6; a] \\ f(a - 6) \leq 10 \\ f(a) \leq 10 \\ y_0 \geq -10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - 6 < 4 < a \\ f(a - 6) \leq 10 \\ f(a) \leq 10 \\ f(4) \geq -10 \end{cases}$$



$$\begin{cases} -6 < 4 - a < 0 \\ (a - 6)^2 - 8(a - 6) + a + 5 - 10 \leq 0 \\ a^2 - 8a + a + 5 \leq 10 \\ 4^2 - 8 \cdot 4 + a + 5 \geq -10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 < a < 10 \\ (a - 6)^2 - 8(a - 6) + a - 6 + 1 \leq 0 \\ a^2 - 7a - 5 \leq 0 \\ a \geq 1 \end{cases}$$

$$(a - 6)^2 - 7(a - 6) + 1 \leq 0$$

Пусть $(a - 6) = t$

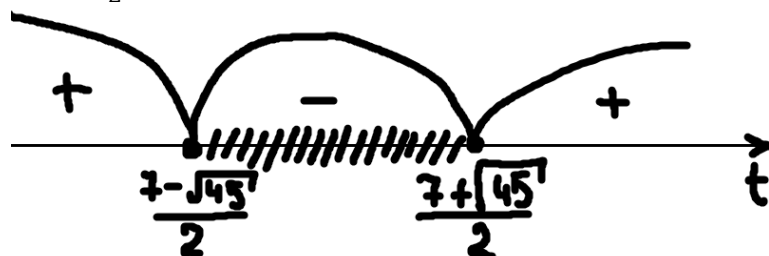
$$t^2 - 7t + 1 \leq 0$$

$$t^2 - 7t + 1 = 0$$

$$D = 45$$

$$t_1 = \frac{7 + \sqrt{45}}{2}$$

$$t_2 = \frac{7 - \sqrt{45}}{2}$$



$$\frac{7 - \sqrt{45}}{2} \leq t \leq \frac{7 + \sqrt{45}}{2}$$

$$\frac{7 - \sqrt{45}}{2} \leq a - 6 \leq \frac{7 + \sqrt{45}}{2}$$

$$\frac{7 - \sqrt{45}}{2} + 6 \leq a \leq \frac{7 + \sqrt{45}}{2} + 6$$

$$\frac{19 - \sqrt{45}}{2} \leq a \leq \frac{19 + \sqrt{45}}{2}$$

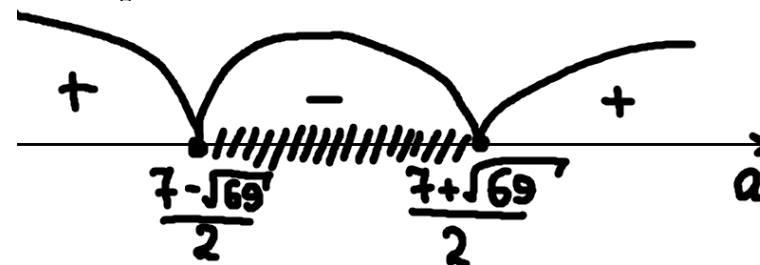
$$a^2 - 7a - 5 \leq 0$$

$$a^2 - 7a - 5 = 0$$

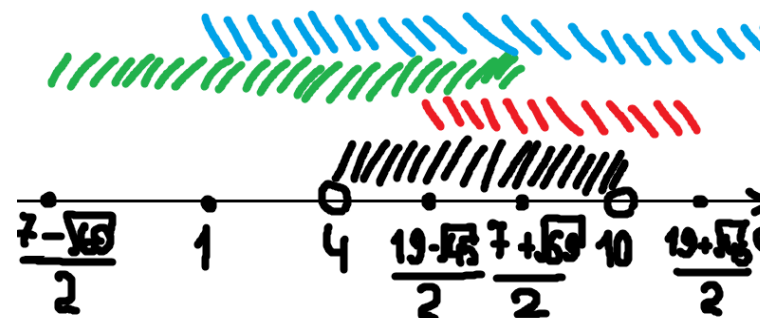
$$D = 69$$

$$a_1 = \frac{7 + \sqrt{69}}{2}$$

$$a_2 = \frac{7 - \sqrt{69}}{2}$$



$$\begin{cases} 4 < a < 10 \\ \frac{19 - \sqrt{45}}{2} \leq a \leq \frac{19 + \sqrt{45}}{2} \\ \frac{7 - \sqrt{69}}{2} \leq a \leq \frac{7 + \sqrt{69}}{2} \\ a \geq 1 \end{cases}$$



$$\text{Ответ: } a \in \left[\frac{19 - \sqrt{45}}{2}; \frac{7 + \sqrt{69}}{2} \right]$$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные	2



точки искомого множества значений a	
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19

- а) Существует ли конечная арифметическая прогрессия, состоящая из пяти натуральных чисел, такая, что сумма наибольшего и наименьшего членов этой прогрессии равна 99?
- б) Конечная арифметическая прогрессия состоит из шести натуральных чисел. Сумма наибольшего и наименьшего членов этой прогрессии равна 9. Найдите все числа, из которых состоит эта прогрессия.
- в) Среднее арифметическое членов конечной арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, равно 6,5. Какое наибольшее количество членов может быть в этой прогрессии?

Решение:

а)
 $n = 5$
 $a_1 + a_5 = 99$

Сумма первых n членов арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_5 = \frac{a_1 + a_5}{2} \cdot 5$$

$$S_5 = \frac{99}{2} \cdot 5 = 247,5$$

=>

Не может, т.к. сумма, состоящая из натуральных чисел не может равняться ненатуральному числу

б)
 $n = 6$
 $a_1 + a_6 = 9$

 n -й член арифметической прогрессии

$$a_n = a_1 + d(n - 1)$$

$$a_1 + a_1 + d(6 - 1) = 9$$

$$2a_1 + 5d = 9$$

$$d = 1$$

(т.к. при других d решений не будет)

Тогда

$$2a_1 = 4$$

$$a_1 = 2$$

Получаем прогрессию:

$$2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7$$

в)

$$\text{Среднее арифметическое} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = 6,5$$

=>

$$S_n = 6,5n$$

$$\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = 6,5n$$

$$\frac{a_1 + a_n}{2} = 6,5$$

$$a_1 + a_n = 13$$

$$a_1 + a_1 + d(n - 1) = 13$$

$$2a_1 + d(n - 1) = 13$$

Значение n будет тем больше – чем меньше будут a_1 и d

=>

Пусть

$$a_1 = 1$$

$$d = 1$$

$$2 + n - 1 = 13$$

$$n = 12$$

Получаем прогрессию:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12$$



Ответ: а) нет, б) (2; 3; 4; 5; 6; 7), в) 12

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: - обоснованное решение п. а; - обоснованное решение п. б; - искомая оценка в п. в; - пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

