

**Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень**

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания с кратким ответом повышенного уровня сложности и 7 заданий с развернутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

К И М
Ответ: -0,8

10	-	0	,	8																
----	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

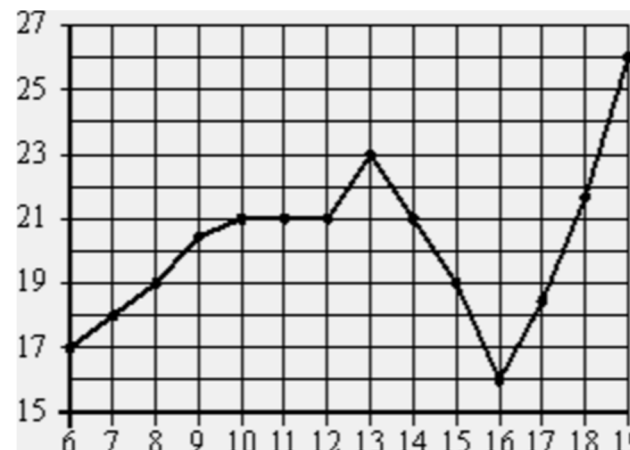
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- 1** Блокнот в магазине стоит 22 рубля. Сколько рублей заплатит покупатель за 70 блокнотов, если при покупке больше 50 блокнотов магазин делает скидку 5% от стоимости всей покупки?

Ответ: _____.

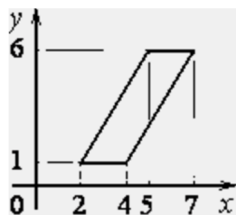
- 2** На рисунке жирными точками показана среднесуточная температура воздуха в Бресте каждый день с 6 по 19 июля 1981 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите по рисунку, какой была наибольшая среднесуточная температура за указанный период. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: _____.



- 3 Найдите площадь параллелограмма, изображённого на рисунке.



Ответ: _____.

- 4 В среднем из 900 садовых насосов, поступивших в продажу, 27 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

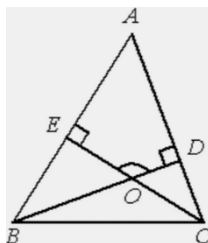
Ответ: _____.

- 5 Найдите корень уравнения $(x - 10)^7 = 1$.

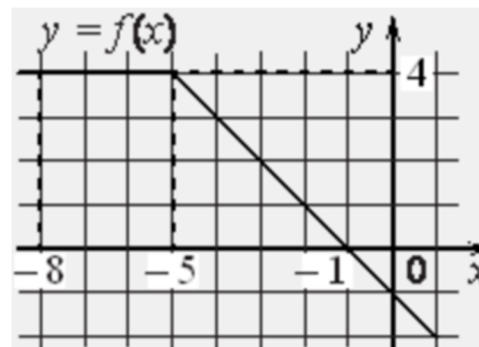
Ответ: _____.

- 6 В треугольнике ABC угол A равен 56° , углы B и C — острые, высоты BD и CE пересекаются в точке O . Найдите угол DOE . Ответ дайте в градусах.

Ответ: _____.

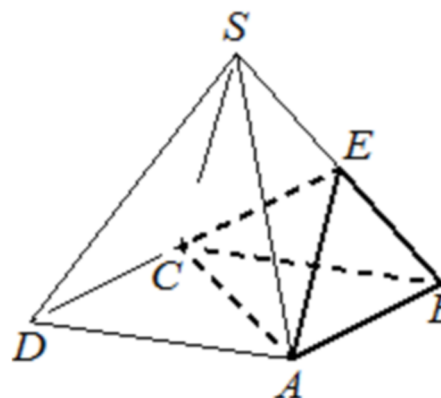


- 7 На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(-1) - F(-8)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.



Ответ: _____.

- 8 Объём правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равен 116. Точка E — середина ребра SB . Найдите объём треугольной пирамиды $EABC$.



Ответ: _____.



- 9 Найдите значение выражения
 $12 \sin 150^\circ \cdot \cos 120^\circ$.

Ответ: _____.

- 10 Независимое агентство намерено ввести рейтинг R новостных изданий на основе показателей информативности In , оперативности Op и объективности Tr публикаций. Каждый показатель оценивается целыми числами от 1 до 6.

Аналитик, составляющий формулу, считает, что объективность публикаций ценится вдвое, а информативность – вчетверо дороже, чем оперативность. В результате, формула примет вид

$$R = \frac{4In + Op + 2Tr}{A}.$$

Каким должно быть число A , чтобы издание, у которого все показатели наибольшие, получило рейтинг 1?

Ответ: _____.

- 11 В понедельник акции компании подорожали на некоторое число процентов, а во вторник подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 4% дешевле, чем при открытии торгов в понедельник. На сколько процентов подорожали акции компании в понедельник?

Ответ: _____.

- 12 Найдите наибольшее значение функции
 $y = 10 \sin x - \frac{36x}{\pi} + 7$ на отрезке $\left[-\frac{5\pi}{6}; 0\right]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение
 $2\cos^3 x - 2\cos x + \sin^2 x = 0$.
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку
 $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.
- 14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 8. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.
 а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C .
 б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка C , а основанием – сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α .
- 15 Решите неравенство

$$\frac{3}{(2^{2-x^2} - 1)^2} - \frac{4}{2^{2-x^2} - 1} + 1 \geq 0.$$



- 16 В прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямым углом при вершине A расположены две окружности. Одна из них касается боковых сторон и большего основания AD , вторая – боковых сторон, меньшего основания BC и первой окружности.

а) Прямая, проходящая через центры окружностей, пересекает основание AD в точке P . Докажите, что $\frac{AP}{PD} = \sin D$.

б) Найдите площадь трапеции, если радиусы окружностей равны $\frac{4}{3}$ и $\frac{1}{3}$.

- 17 Григорий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $3t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $5t$ единиц товара.

За каждый час работы (на каждом из заводов) Григорий платит рабочему 500 рублей.

Григорий готов выделять 6 800 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

- 18 Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство

$$\left| \frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + x + 1} \right| < 3$$

выполняется при всех x .

- 19 На доске написано несколько различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых больше 60 и меньше 140.

- а) Может ли на доске быть 5 чисел?
 б) Может ли на доске быть 6 чисел?
 в) Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел на доске, если их четыре?

О проекте «Пробный ЕГЭ каждую неделю»

Данный ким составлен командой всероссийского волонтерского проекта «ЕГЭ 100 баллов» <https://vk.com/ege100ballov> и безвозмездно распространяется для любых некоммерческих образовательных целей.

Нашли ошибку в варианте?

Напишите нам, пожалуйста, и мы обязательно её исправим!

Для замечаний и пожеланий: https://vk.com/topic-10175642_39008096
 (также доступны другие варианты для скачивания)

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:

ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	7 лет репетиторской деятельности
Регалии:	Основатель проекта Школа Пифагора
Аккаунт ВК:	https://vk.com/eugene10
Сайт и доп. информация:	https://vk.com/shkolapifagora https://youtube.com/ШколаПифагора



Система оценивания Ответы к заданиям 1-19

Каждое из заданий 1–12 считается выполненным верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Верно выполненные задания 13–15 максимум оцениваются в 2 балла, задания 16–17 – в 3 балла, а задания 18–19 – в 4 балла.

№ задания	Ответ
1	1463
2	26
3	10
4	0,97
5	11
6	124
7	20
8	29
9	-3
10	42
11	20
12	32
13	а) $\pi n, \frac{\pi}{3} + 2\pi n, -\frac{\pi}{3} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$. б) $2\pi; 3\pi; \frac{5\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}$
14	$\frac{80\sqrt{3}}{3}$
15	$(-\infty; -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}; -1] \cup \{0\} \cup [1; \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$
16	$\frac{116}{7}$
17	680
18	(-1; 5)
19	а) да (например, 8, 9, 10, 11, 12), б) нет, в) 37

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться бездоказательства и ссылки на любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13

а) Решите уравнение

$$2\cos^3 x - 2\cos x + \sin^2 x = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$$\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right].$$

Решение:

а)

Основные Тригонометрические формулы

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$2\cos^3 x - 2\cos x + 1 - \cos^2 x = 0$$

$$2\cos x \cdot (\cos^2 x - 1) - (\cos^2 x - 1) = 0$$



$$(\cos^2 x - 1) \cdot (2 \cos x - 1) = 0$$

$\cos^2 x - 1 = 0$	$2 \cos x - 1 = 0$
$\cos^2 x = 1$	$2 \cos x = 1$
$\cos x = \pm 1$	$\cos x = \frac{1}{2}$
$x = \pi n; n \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$
	$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$

б)

Подберём корни для $x = \pi n; n \in \mathbb{Z}$ Если $n = 1$, то $x = \pi \notin \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$ Если $n = 2$, то $x = 2\pi \in \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$ Если $n = 3$, то $x = 3\pi \in \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$ Если $n = 4$, то $x = 4\pi \notin \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$ Подберём корни для $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$ Если $n = 0$, то $x = \frac{\pi}{3} \notin \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$ Если $n = 1$, то $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3} \in \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$ Если $n = 2$, то $x = \frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{13\pi}{3} \notin \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$ Подберём корни для $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$ Если $n = 0$, то $x = -\frac{\pi}{3} \notin \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$ Если $n = 1$, то $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3} \in \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$ Если $n = 2$, то $x = -\frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{11\pi}{3} \notin \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$ Ответ: а) $\pi n, \frac{\pi}{3} + 2\pi n, -\frac{\pi}{3} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$. б) $2\pi; 3\pi; \frac{5\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б ИЛИ	1

Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта а и пункта б	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14

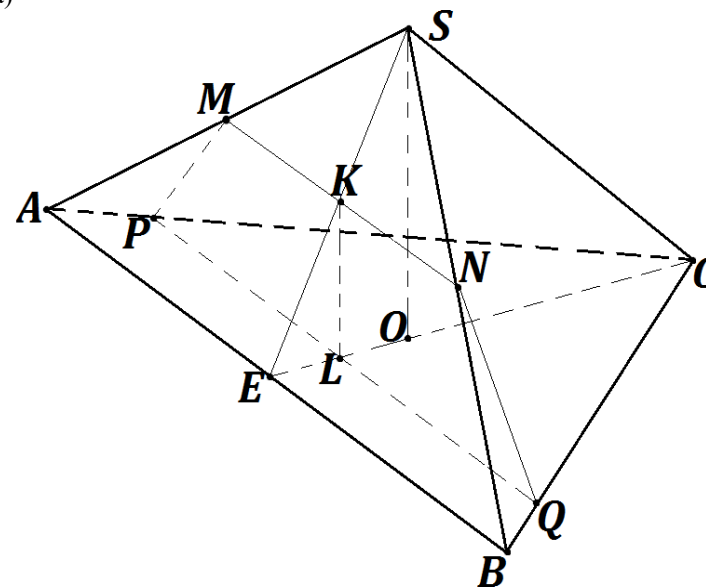
В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 8. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C .

б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка C , а основанием – сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α .

Решение:

а)

Пусть O – центр основания пирамиды

Рассмотрим $\triangle ABS$ – равнобедренный:

Проведём медиану SE , являющуюся ещё и биссектрисой и высотой

Пусть $(SEC) \cap MN = K$

Построим прямую KL такую, что $KL \parallel SO$

Построим прямую PQ через точку L такую, что $PQ \parallel AB$

Построим прямую NQ , т.к. точки N и Q лежат в одной плоскости

Построим прямую PM , т.к. точки P и M лежат в одной плоскости

$MNQP$ – сечение пирамиды плоскостью α

Рассмотрим $\triangle SOE$ – прямоугольный:

Т.к. K – середина SE и $KL \parallel SO$, то KL – средняя линия $\triangle SOE$

$\Rightarrow L$ – середина OE

Пусть $EL = OL = x$

Т.к. CE – медиана в $\triangle ABC$, то:

$$\frac{OC}{OE} = 2:1$$

$$\Rightarrow OC = 2 \cdot OE = 2 \cdot (EL + OL) = 2 \cdot (x + x) = 4x$$

$$\Rightarrow \frac{CL}{LE} = \frac{OC + OL}{LE} = \frac{4x + x}{x} = 5:1$$

■

б)

$$V_{CMNQP} = \frac{1}{3} \cdot S_{MNQP} \cdot CL$$

Найдём основания и высоту трапеции $MNQP$:

$$MN = \frac{1}{2} \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6 \text{ (т.к. } MN \text{ – средняя линия } \triangle ABS)$$

$$PQ = \frac{5}{6} \cdot AB = \frac{5}{6} \cdot 12 = 10 \text{ (т.к. } \frac{CL}{LE} = 5:1)$$

$$OC = \frac{2}{3} \cdot CE = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AB = \frac{12}{\sqrt{3}}$$

$$SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{8^2 - \left(\frac{12}{\sqrt{3}}\right)^2} = 4 \text{ (по теореме Пифагора)}$$

$$KL = \frac{1}{2} \cdot SO = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2 \text{ (т.к. } KL \text{ – средняя линия } \triangle SOE)$$

$$S_{MNQP} = \frac{MN + PQ}{2} \cdot KL = \frac{6 + 10}{2} \cdot 2 = 16$$

$$CL = \frac{5}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AB = 5\sqrt{3}$$

$$V_{CMNQP} = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 5\sqrt{3} = \frac{80\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Ответ: б) } \frac{80\sqrt{3}}{3}.$$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт <i>а</i> . ИЛИ Верно решён пункт <i>б</i> при отсутствии обоснований в пункте <i>а</i>	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15

Решите неравенство

$$\frac{3}{(2^{2-x^2} - 1)^2} - \frac{4}{2^{2-x^2} - 1} + 1 \geq 0.$$

Решение:

$$\text{Пусть } 2^{2-x^2} - 1 = t$$

$$\frac{3}{t^2} - \frac{4}{t} + 1 \geq 0$$

$$\frac{3 - 4t + t^2}{t^2} \geq 0$$

$$3 - 4t + t^2 \geq 0$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

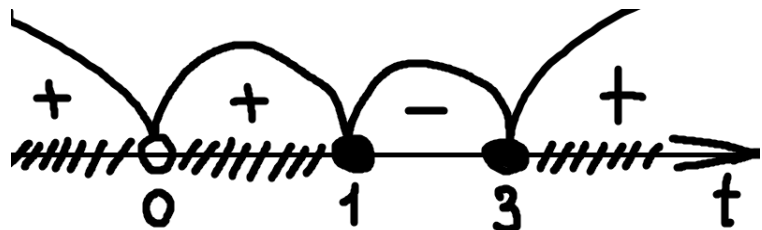
$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4$$

$$t_1 = \frac{4+2}{2} = 3$$

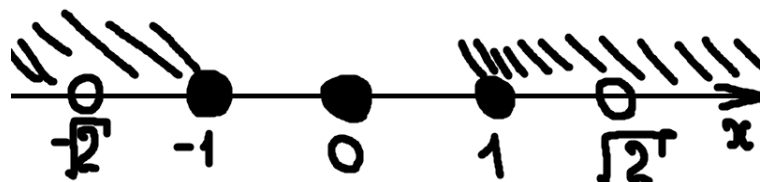
$$t_2 = \frac{4-2}{2} = 1$$

$$t \neq 0$$





$t \leq 1$ $2^2 - x^2 - 1 \leq 1$ $2^2 - x^2 \leq 2^1$ $2 - x^2 \leq 1$ $x^2 \geq 1$ $x \leq -1 \quad \quad x \geq 1$	$t \geq 3$ $2^2 - x^2 - 1 \geq 3$ $2^2 - x^2 \geq 4$ $2^2 - x^2 \geq 2^2$ $2 - x^2 \geq 2$ $x^2 \leq 0$ $x = 0$	$t \neq 0$ $2^2 - x^2 - 1 \neq 0$ $2^2 - x^2 \neq 1$ $2^2 - x^2 \neq 2^0$ $2 - x^2 \neq 0$ $x \neq \pm\sqrt{2}$
--	---	--



Ответ: $(-\infty; -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}; -1] \cup \{0\} \cup [1; \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

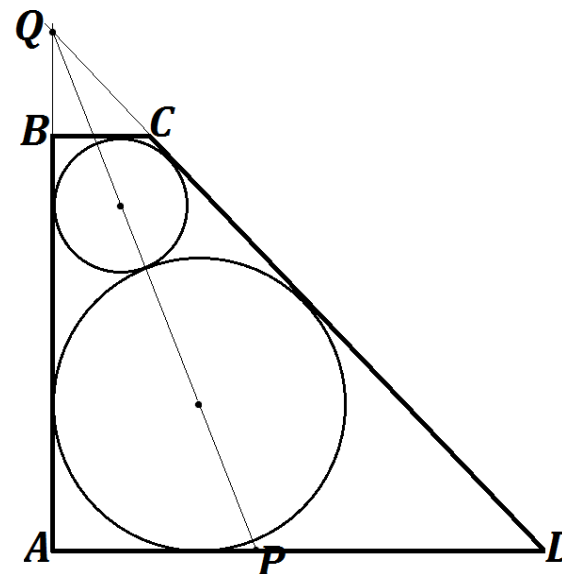
16

В прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямым углом при вершине A расположены две окружности. Одна из них касается боковых сторон и большего основания AD , вторая – боковых сторон, меньшего основания BC и первой окружности.

- а) Прямая, проходящая через центры окружностей, пересекает основание AD в точке P . Докажите, что $\frac{AP}{PD} = \sin D$.
- б) Найдите площадь трапеции, если радиусы окружностей равны $\frac{4}{3}$ и $\frac{1}{3}$.

Решение:

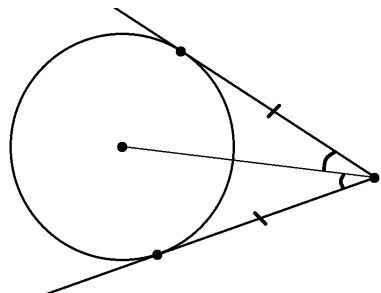
а)



Пусть $AB \cap CD = Q$

Свойство касательных

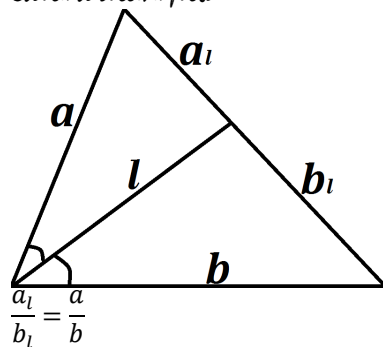




Отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны, и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности

Точка Q , центры окружностей и точка P лежат на одной прямой PQ , которая является биссектрисой угла AQD (по свойству касательных)

Свойства биссектрисы



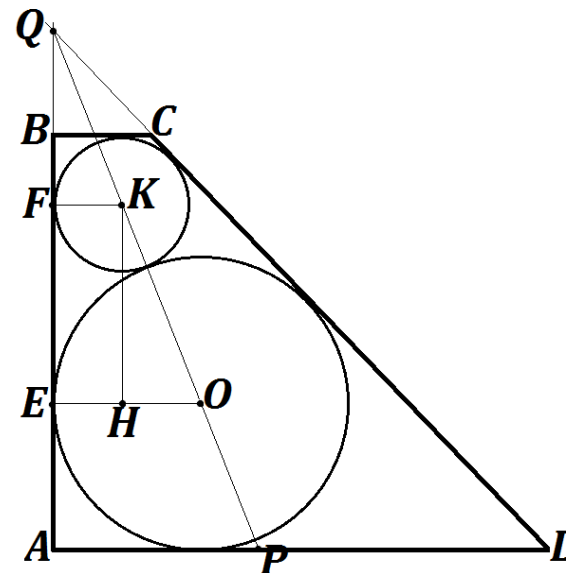
$$\frac{AP}{PD} = \frac{QA}{QD}$$

$$\sin D = \frac{QA}{QD}$$

$$\Rightarrow \frac{AP}{PD} = \sin D$$

■

б)



Пусть O — центр большей окружности

Пусть K — центр меньшей окружности

Пусть F — точка касания меньшей окружности с прямой AB

Пусть E — точка касания большей окружности с прямой AB

Тогда

$$FK = \frac{1}{3} = BF$$

$$EO = \frac{4}{3} = AE$$

Опустим перпендикуляр KH на отрезок EO

Рассмотрим $\triangle OKH$ — прямоугольный:

$$OK = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

$$OH = EO - FK = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$$

$$HK = \sqrt{OK^2 - OH^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2 - 1^2} = \frac{4}{3} \text{ (по теореме Пифагора)}$$

$\Rightarrow$

$$EF = HK = \frac{4}{3}$$

$\Rightarrow$



$$AB = AE + HK + BF = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = 3$$

$\triangle QFK \sim \triangle QEO$ по двум углам
 $(\angle QFK = \angle QEO = 90^\circ)$
 $(\angle EQO - \text{общий})$

$$\frac{QF}{QE} = \frac{FK}{EO}$$

$$\frac{QB + BF}{QB + BF + EF} = \frac{FK}{EO}$$

$$\frac{QB + \frac{1}{3}}{QB + \frac{1}{3} + \frac{4}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}}$$

$$\frac{QB + \frac{1}{3}}{QB + \frac{5}{3}} = \frac{1}{4}$$

$$QB + \frac{5}{3} = 4QB + \frac{4}{3}$$

$$3QB = \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow$

$$QB = \frac{1}{9}$$

$$\cos \angle HKO = \frac{HK}{OK} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{4}{5}$$

Пусть $\angle HKO = \alpha$

$$\angle BQC = 2\alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5}$$

Косинус двойного угла

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 - 1 = 2 \cdot \frac{16}{25} - 1 = \frac{32}{25} - \frac{25}{25} = \frac{7}{25}$$

Основные Тригонометрические формулы

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\sin 2\alpha = \sqrt{1 - \cos^2 2\alpha} = \frac{24}{25}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{24}{25} : \frac{7}{25} = \frac{24}{7}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{24}{7} = \frac{BC}{QB}$$

$$\frac{24}{7} = \frac{BC}{\frac{1}{9}}$$

$\Rightarrow$

$$BC = \frac{8}{21}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{24}{7} = \frac{AD}{AQ}$$

$$\frac{24}{7} = \frac{AD}{AB + QB}$$

$$\frac{24}{7} = \frac{AD}{3 + \frac{1}{9}}$$

$\Rightarrow$

$$AD = \frac{32}{3}$$

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot AB$$

$$S_{ABCD} = \frac{\frac{32}{3} + \frac{8}{21}}{2} \cdot 3 = \frac{116}{7}$$

$$\text{Ответ: б) } \frac{116}{7}$$



Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a и обоснованно получен верный ответ в пункте b	3
Получен обоснованный ответ в пункте b ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта a и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , ИЛИ При обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

- 17 Григорий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $3t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $5t$ единиц товара.

За каждый час работы (на каждом из заводов) Григорий платит рабочему 500 рублей.

Григорий готов выделять 6 800 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Решение:

Величины t^2 в первом городе и во втором городе не одинаковые, нам просто показана зависимость количества единиц товара от количества часов

Пусть

a^2 часов трудятся в первом городе и производят $3a$ единиц товара

b^2 часов трудятся во втором городе и производят $5b$ единиц товара

Тогда

$a^2 + b^2$ — суммарное количество часов в двух городах

$3a + 5b$ — суммарное количество единиц товара в двух городах

За каждый час работы (на каждом из заводов) Григорий платит рабочему 500 рублей.

Григорий готов выделять 6 800 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих.

$\Rightarrow$

$$500 \cdot (a^2 + b^2) = 6800000$$

Выразим b

$$a^2 + b^2 = \frac{6800000}{500}$$

$$b^2 = 13600 - a^2$$

$$b = \sqrt{13600 - a^2}$$

Нужно найти какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах

$\Rightarrow$

Нужно найти наибольшее значение выражения $3a + 5b$, введём функцию:

$$f(a, b) = 3a + 5b$$

$$f(a) = 3a + 5\sqrt{13600 - a^2}$$

$$f'(a) = 3 + \frac{5 \cdot (-2a)}{2\sqrt{13600 - a^2}} = 0$$

$$3 = \frac{5a}{\sqrt{13600 - a^2}}$$

$$3\sqrt{13600 - a^2} = 5a \quad |^{\wedge 2}$$

$$9 \cdot (13600 - a^2) = 25a^2$$

$$9 \cdot 13600 - 9a^2 = 25a^2$$

$$34a^2 = 9 \cdot 13600$$

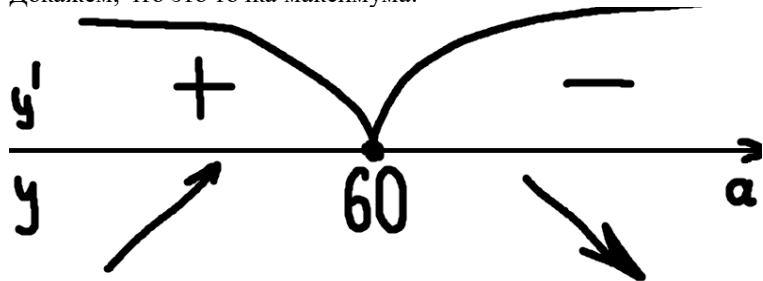
$$a^2 = \frac{9 \cdot 13600}{34}$$



$$a^2 = 9 \cdot 400$$

$$a = 3 \cdot 20 = 60$$

Докажем, что это точка максимума:



=>

Наибольшее значение функция будет принимать в этой точке

$$f(60) = 3 \cdot 60 + 5\sqrt{13600 - 60^2}$$

$$f(60) = 180 + 500 = 680$$

Ответ: 680

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18

Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство

$$\left| \frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + x + 1} \right| < 3$$

выполняется при всех x .

Решение:

Деление модулей

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$\left| \frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + x + 1} \right| < 3$$

$$\frac{|x^2 + ax + 1|}{|x^2 + 2 \cdot x \cdot 0,5 + 0,25 + 0,75|} < 3$$

$$\frac{|x^2 + ax + 1|}{|(x + 0,5)^2 + 0,75|} < 3$$

Раскрытие модуля

Если внутримодульное выражение – положительное, то просто опускаем модуль

Пример:

$$y = |2 - 1| = 2 - 1 = 1$$

Если внутримодульное выражение – отрицательное, то раскрываем модуль, меняя все знаки внутри модуля на противоположные

Пример:

$$y = |1 - 2| = -1 + 2 = 1$$

Внутримодульное выражение в знаменателе положительно при любом x , поэтому можно опустить модуль

$$\frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + x + 1} < 3$$

Знаменатель дроби – положительное выражение

=>

Можно домножить на него обе части неравенства и знак неравенства не изменится:

$$|x^2 + ax + 1| < 3 \cdot (x^2 + x + 1)$$



$$|x^2 + ax + 1| < 3x^2 + 3x + 3$$

Итак, правая часть неравенства положительна. Модуль меньше положительного выражения, как поступать в такой ситуации? Легко понять по примеру:

$$|x| < 5$$

$$-5 < x < 5$$

=>

$$-3x^2 - 3x - 3 < x^2 + ax + 1 < 3x^2 + 3x + 3$$

$$\begin{cases} -3x^2 - 3x - 3 < x^2 + ax + 1 \\ x^2 + ax + 1 < 3x^2 + 3x + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2 + ax + 3x + 4 > 0 \\ 2x^2 - ax + 3x + 2 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2 + (a+3)x + 4 > 0 \\ 2x^2 + (3-a)x + 2 > 0 \end{cases}$$

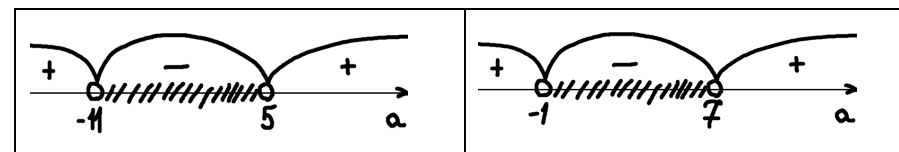
Эти неравенства должны одновременно выполняться при любых значениях переменной x :

У нас есть 2 параболы с ветвями вверх, которые должны быть строго больше нуля (это происходит, когда парабола выше оси абсцисс)

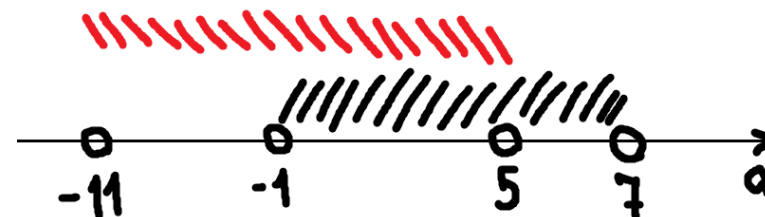
=>

Дискриминант у обоих квадратичных функций должен быть отрицательным

$4x^2 + (a+3)x + 4$ $D = (a+3)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4 < 0$ $a^2 + 6a + 9 - 64 < 0$ $a^2 + 6a - 55 < 0$ $a^2 + 6a - 55 = 0$ $D = 36 + 220 = 256$ $a_1 = \frac{-6 + 16}{2} = 5$ $a_2 = \frac{-6 - 16}{2} = -11$	$2x^2 + (3-a)x + 2$ $D = (3-a)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 < 0$ $9 - 6a + a^2 - 16 < 0$ $a^2 - 6a - 7 < 0$ $a^2 - 6a - 7 = 0$ $D = 36 + 28 = 64$ $a_1 = \frac{6 + 8}{2} = 7$ $a_2 = \frac{6 - 8}{2} = -1$
---	--



Осталось найти пересечение полученных промежутков



Ответ: $a \in (-1; 5)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19

На доске написано несколько различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых больше 60 и меньше 140.

- Может ли на доске быть 5 чисел?
- Может ли на доске быть 6 чисел?
- Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел на доске, если их четыре?



Решение:

а)

Да, например
8, 9, 10, 11, 12

Наименьшее произведение 72, наибольшее произведение 132

=>

Произведение любых двух из этих чисел больше 60 и меньше 140

=>

Может

б)

Пусть

a, b, c, d, e и f — числа на доске, записанные в порядке возрастания

$$ab > 60$$

$$a < b$$

=>

$b = 9$ — наименьшее возможное значение второго по величине числа

$$ef < 140$$

$$e < f$$

=>

$e = 11$ — наибольшее возможное значение пред последнего по величине числа

=>

Получаем противоречие, т.к. между b и e есть два числа — c и d , но между 9 и 11 есть только 10

=>

Не может

в)

Пусть

a, b, c и d — числа на доске, записанные в порядке возрастания

Если

$$a = 6, \text{ то:}$$

$$b = 11 \text{ (чтобы меньшее произведение получилось больше 60)}$$

$$c = 12 \text{ или больше}$$

$$d = 13 \text{ или больше}$$

(но тогда большее произведение будет больше 140)

=>

Такой вариант не подходит

Если

$$a = 5, \text{ то:}$$

$$b = 13 \text{ (чтобы меньшее произведение получилось больше 60)}$$

$$c = 14 \text{ или больше}$$

$$d = 15 \text{ или больше}$$

(но тогда большее произведение будет больше 140)

=>

Такой вариант не подходит и

=>

$$a \geq 7$$

Если

$$a = 10, \text{ то:}$$

$$b = 11 \text{ или больше}$$

$$c = 12 \text{ или больше}$$

$$d = 13 \text{ или больше}$$

(но тогда большее произведение будет больше 140)

=>

Такой вариант не подходит и

$$a \leq 9$$

=>

Для наименьшего из четырёх чисел есть 3 варианта:

$a = 7$	$a = 8$	$a = 9$
Какое число может быть последним? 14 не может быть, т.к. даже в примере с наименьшими средними числами 7, 9, 10, 14 нарушается второе условие	Какое число может быть последним? 14 не может быть, т.к. даже в примере с наименьшими средними числами 8, 9, 10, 14 нарушается второе условие	Какое число может быть последним? 13 не может быть, т.к. даже в примере с наименьшими средними числами 9, 10, 11, 13 нарушается второе условие
Последнее из четырёх чисел равно 11, 12 или 13	Последнее из четырёх чисел равно 11, 12 или 13	Последнее из четырёх чисел равно 12
		9 10 11 12 (42)



7 9 10 11 (37)	8 9 10 11 (38)	
7 9 10 12 (38)	8 9 10 12 (39)	
7 9 11 12 (39)	8 9 11 12 (40)	
7 10 11 12 (40)	8 10 11 12 (41)	
7 9 10 13 (39)	8 9 10 13 (40)	

Ответ: а) да (например, 8, 9, 10, 11, 12), б) нет, в) 37

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: - обоснованное решение п. а; - обоснованное решение п. б; - искомая оценка в п. в; - пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

