

**Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень**

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания с кратким ответом повышенного уровня сложности и 7 заданий с развернутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

ОТВЕТ: -0,8

10 - 0,8

Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

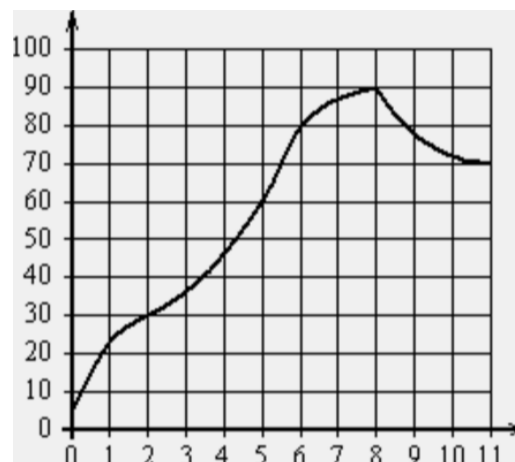
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- 1** Тетрадь стоит 30 рублей. Какое наибольшее количество таких тетрадей можно будет купить на 450 рублей после понижения цены на 10%?

Ответ: _____.

- 2 На графике показан процесс разогрева двигателя легкового автомобиля. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее с момента запуска двигателя, на оси ординат – температура двигателя в градусах Цельсия. Определите по графику, до скольких градусов Цельсия нагрелся двигатель за первые 2 минуты.



Ответ: _____.



- 3 Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты $(1; 12)$, $(7; 14)$, $(7; 20)$.

Ответ: _____.

- 4 Вероятность того, что на тестировании по математике учащийся А. верно решит больше 9 задач, равна 0,63. Вероятность того, что А. верно решит больше 8 задач, равна 0,75. Найдите вероятность того, что А. верно решит ровно 9 задач.

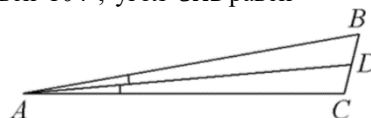
Ответ: _____.

- 5 Найдите корень уравнения $3^{\log_{27}(2x-9)} = 3$.

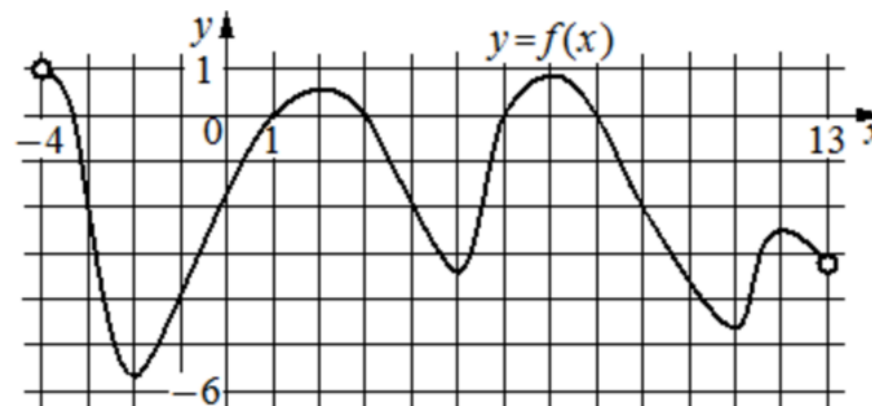
Ответ: _____.

- 6 В треугольнике $ABCD$ — биссектриса, угол C равен 104° , угол CAD равен 5° . Найдите угол B . Ответ дайте в градусах.

Ответ: _____.

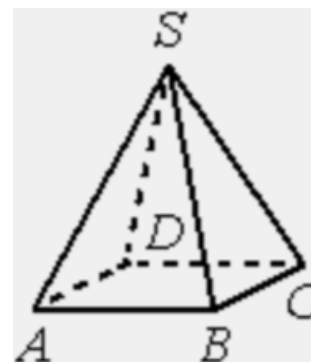


- 7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-4; 13)$. Определите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 14$.



Ответ: _____.

- 8 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ боковое ребро SC равно 37, сторона основания равна $35\sqrt{2}$. Найдите объём пирамиды.



Ответ: _____.



9

Найдите значение выражения

$$\frac{\sqrt{1,2} \cdot \sqrt{1,4}}{\sqrt{0,42}}.$$

Ответ: _____.

10

Мяч бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полёта мяча (в секундах) определяется по формуле $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время полёта будет не меньше 2,1 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 21$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

Ответ: _____.

11

Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 384 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость теплохода в неподвижной воде, если скорость течения равна 4 км/ч, стоянка длится 8 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 48 часов. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

12

Найдите точку минимума функции $y = (x - 1)^2(x + 4) + 10$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

а) Решите уравнение

$$\sin 2x + 2 \sin x = \sqrt{3} \cos x + \sqrt{3}.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$$\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right].$$

14

В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный ($AB = BC$) треугольник ABC . Точка K — середина ребра A_1B_1 , а точка M делит ребро AC в отношении $AM:MC = 1:3$.

а) Докажите, что $KM \perp AC$.б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1 , если $AB = 6$, $AC = 8$ и $AA_1 = 3$.

15

Решите неравенство

$$\frac{2 \log_5(x^2 - 5x)}{\log_5 x^2} \leq 1.$$

16

Прямая, проходящая через середину M гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC , перпендикулярна CM и пересекает катет AC в точке K . При этом $AK:KC = 1:2$.

а) Докажите, что $\angle BAC = 30^\circ$.б) Пусть прямые MK и BC пересекаются в точке P , а прямые AP и BK — в точке Q . Найдите KQ , если $BC = \sqrt{21}$.

17 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 16 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 38 млн рублей?

18 Найдите все значения a , при которых уравнение $|\sin^2 x + 2 \cos x + a| = \sin^2 x + \cos x - a$ имеет на промежутке $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ единственный корень.

19 Максим должен был умножить двузначное число на трёхзначное число (числа с нуля начинаться не могут). Вместо этого он просто приписал трёхзначное число справа к двузначному, получив пятизначное число, которое оказалось в N раз (N – натуральное число) больше правильного результата.

- а) Могло ли N равняться 2?
- б) Могло ли N равняться 10?
- в) Каково наибольшее возможное значение N ?

О проекте «Пробный ЕГЭ каждую неделю»

Данный ким составлен командой всероссийского волонтерского проекта «ЕГЭ 100 баллов» <https://vk.com/ege100ballov> и безвозмездно распространяется для любых некоммерческих образовательных целей.

Нашли ошибку в варианте?

Напишите нам, пожалуйста, и мы обязательно её исправим!

Для замечаний и пожеланий: https://vk.com/topic-10175642_39008096
(также доступны другие варианты для скачивания)

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:

ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	7 лет репетиторской деятельности
Регалии:	Основатель проекта Школа Пифагора
Аккаунт ВК:	https://vk.com/eugene10
Сайт и доп. информация:	https://vk.com/shkolapifagora https://youtube.com/ШколаПифагора



Система оценивания Ответы к заданиям 1-19

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Верно выполненные задания 13–15 максимум оцениваются в 2 балла, задания 16–17 – в 3 балла, а задания 18–19 – в 4 балла.

№ задания	Ответ
1	16
2	30
3	18
4	0,12
5	18
6	66
7	6
8	9800
9	2
10	30
11	20
12	1
13	а) $\pi + 2\pi n, \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \frac{2\pi}{3} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$. б) $-3\pi; -\frac{5\pi}{3}$
14	$\arccos \frac{\sqrt{371}}{21}$
15	$(-1; 0) \cup (5; 6]$
16	14
17	10
18	$(-\infty; 0] \cup \left\{\frac{1}{4}\right\}$
19	а) да, б) нет, в) 9

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13

а) Решите уравнение

$$\sin 2x + 2 \sin x = \sqrt{3} \cos x + \sqrt{3}.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$$\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right].$$

Решение:

а)

Синус двойного угла

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$2 \sin x \cdot \cos x + 2 \sin x = \sqrt{3} \cos x + \sqrt{3}$$

$$2 \sin x \cdot (\cos x + 1) = \sqrt{3} \cdot (\cos x + 1)$$

$$2 \sin x \cdot (\cos x + 1) - \sqrt{3} \cdot (\cos x + 1) = 0$$

$$(\cos x + 1)(2 \sin x - \sqrt{3}) = 0$$

$$\cos x + 1 = 0$$

$$\cos x = -1$$

$$2 \sin x - \sqrt{3} = 0$$

$$2 \sin x = \sqrt{3}$$



$$x = \pi + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$$

б)

Подберём корни для $x = \pi + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$

$$\text{Если } n = -3, \text{ то } x = \pi - 6\pi = -5\pi \notin \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$$

$$\text{Если } n = -2, \text{ то } x = \pi - 4\pi = -3\pi \in \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$$

$$\text{Если } n = -1, \text{ то } x = \pi - 2\pi = -\pi \notin \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$$

Подберём корни для $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$

$$\text{Если } n = -2, \text{ то } x = \frac{\pi}{3} - 4\pi = -\frac{11\pi}{3} \notin \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$$

$$\text{Если } n = -1, \text{ то } x = \frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5\pi}{3} \in \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$$

$$\text{Если } n = 0, \text{ то } x = \frac{\pi}{3} \notin \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$$

Подберём корни для $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$

$$\text{Если } n = -2, \text{ то } x = \frac{2\pi}{3} - 4\pi = -\frac{10\pi}{3} \notin \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$$

$$\text{Если } n = -1, \text{ то } x = \frac{2\pi}{3} - 2\pi = -\frac{4\pi}{3} \notin \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$$

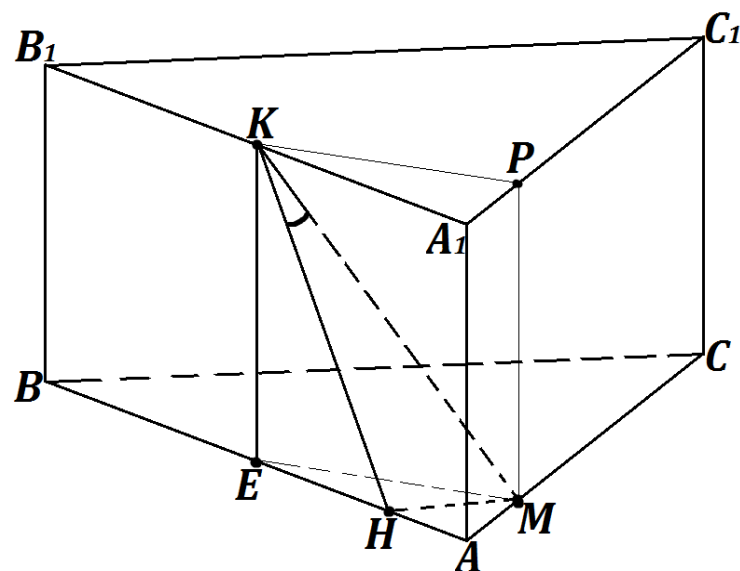
Ответ: а) $\pi + 2\pi n, \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \frac{2\pi}{3} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$. б) $-3\pi; -\frac{5\pi}{3}$

14

В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный ($AB = BC$) треугольник ABC . Точка K — середина ребра A_1B_1 , а точка M делит ребро AC в отношении $AM:MC = 1:3$.

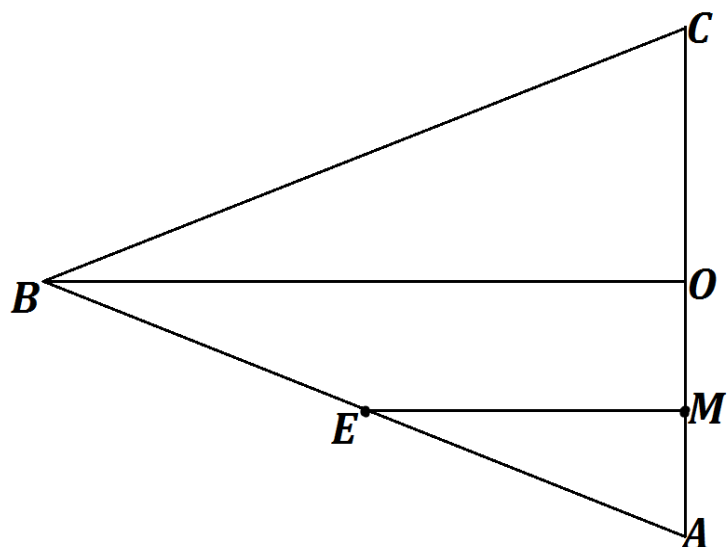
а) Докажите, что $KM \perp AC$.б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1 , если $AB = 6$, $AC = 8$ и $AA_1 = 3$.**Решение:**

а)

Опустим перпендикуляр KE на плоскость «пола», т.е. на плоскость ABC Опустим перпендикуляр MP на плоскость «потолка», т.е. на плоскость $A_1B_1C_1$ Рассмотрим $\triangle ABC$ — равнобедренный

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов — пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2





Пусть BO — высота в $\triangle ABC$

E — середина AB

$AM:MC = 1:3$

$\Rightarrow$

M — середина AO

$\Rightarrow$

EM — средняя линия $\triangle ABO$

$\Rightarrow$

$EM \parallel BO$

$\Rightarrow$

$EM \perp AC$

$\Rightarrow$

$(KPM) \perp AC$

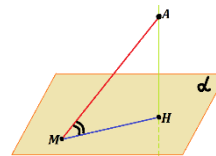
$\Rightarrow$

$KM \perp AC$

■

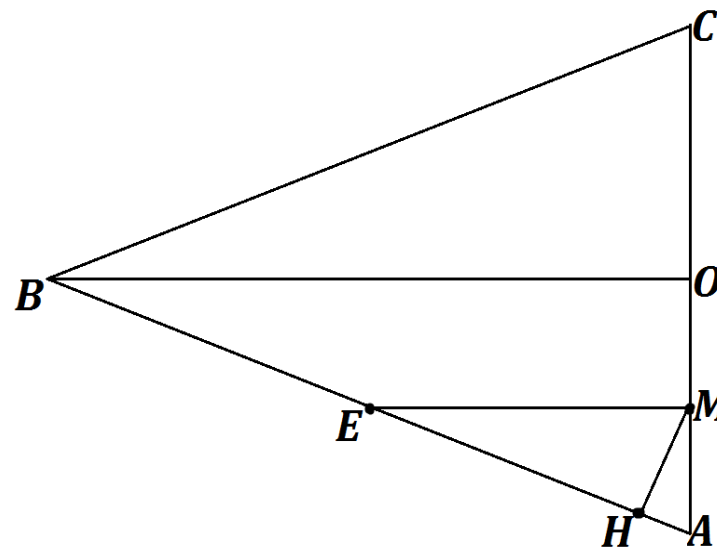
б)

Угол между прямой и плоскостью



Угол между прямой и плоскостью — это угол между прямой и её проекцией на плоскость

Пусть MH — высота в $\triangle AEM$



Тогда KH — проекция KM на «ближнюю стену», т.е. на плоскость ABB_1

$\Rightarrow$

$\angle MKN$ — искомый

Найдём все стороны треугольника MKN :

Найдём HM :

$$CO = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$$

$$AM = \frac{1}{4} AC = \frac{1}{4} \cdot 8 = 2$$

$$\cos \angle BCO = \frac{CO}{BC} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$



$$\cos \angle BAO = \frac{2}{3}$$

(т.к. $\triangle ABC$ – равнобедренный)

$$\cos \angle HAM = \frac{2}{3} = \frac{AH}{AM}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{AH}{2}$$

$$AH = \frac{4}{3}$$

$$HM = \sqrt{AM^2 - AH^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{20}{9}} \text{ (по теореме Пифагора)}$$

Найдём KH :

$$EH = AE - AH = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$$

$$KE = AA_1 = 3$$

$$KH = \sqrt{KE^2 + EH^2} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{106}{9}} \text{ (по теореме Пифагора)}$$

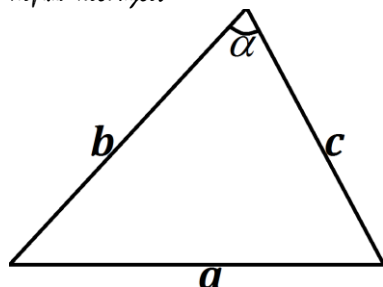
Найдём KM :

$$BO = \sqrt{BC^2 - CO^2} = \sqrt{6^2 - 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \text{ (по теореме Пифагора)}$$

$$EM = \frac{1}{2}BO = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} = \sqrt{5}$$

$$KM = \sqrt{KE^2 + EM^2} = \sqrt{3^2 + \sqrt{5}^2} = \sqrt{14} \text{ (по теореме Пифагора)}$$

Теорема Косинусов



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

или

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos \angle MKH = \frac{MK^2 + KH^2 - HM^2}{2 \cdot MK \cdot KH}$$

$$\cos \angle MKH = \frac{14 + \frac{106}{9} - \frac{20}{9}}{2 \cdot \sqrt{14} \cdot \sqrt{\frac{106}{9}}} = \frac{212 \cdot 3}{9 \cdot 2 \cdot \sqrt{14} \cdot \sqrt{106}} =$$

$$= \frac{\sqrt{106}}{3\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{53}}{3\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{371}}{21}$$

$$\angle MKH = \arccos \frac{\sqrt{371}}{21}$$

Ответ: б) $\arccos \frac{\sqrt{371}}{21}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт а. ИЛИ Верно решён пункт б при отсутствии обоснований в пункте а	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15

Решите неравенство

$$\frac{2 \log_5(x^2 - 5x)}{\log_5 x^2} \leq 1.$$

Решение:

ОДЗ:

1.

$$x^2 - 5x > 0$$

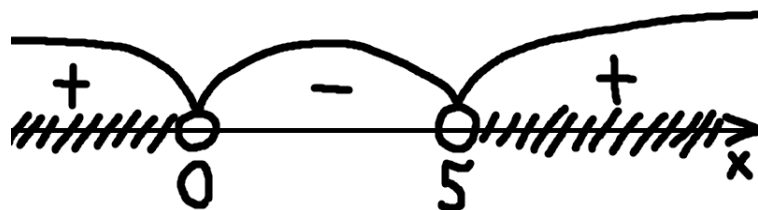
$$x(x - 5) > 0$$

$$x(x - 5) = 0$$

$$x = 0$$

$$x = 5$$





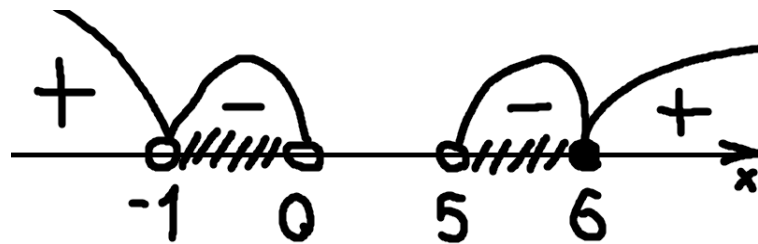
2.
 $x^2 > 0$
 $x \neq 0$

$$\frac{2 \log_5(x^2 - 5x)}{\log_5 x^2} - 1 \leq 0$$

$$\frac{2 \log_5(x^2 - 5x) - \log_5 x^2}{\log_5 x^2} \leq 0$$

$$\begin{aligned} 2 \log_5(x^2 - 5x) - \log_5 x^2 &= 0 \\ \log_5(x^2 - 5x)^2 &= \log_5 x^2 \\ (x^2 - 5x)^2 &= x^2 \\ (x^2 - 5x)^2 - x^2 &= 0 \\ (x^2 - 5x - x)(x^2 - 5x + x) &= 0 \\ (x^2 - 6x)(x^2 - 4x) &= 0 \\ x^2(x - 6)(x - 4) &= 0 \\ x &= 0 \\ x &= 4 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_5 x^2 &\neq 0 \\ \log_5 x^2 &\neq \log_5 1 \\ x^2 &\neq 1 \\ x &\neq \pm 1 \end{aligned}$$



Ответ: $(-1; 0) \cup (5; 6]$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16

Прямая, проходящая через середину M гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC , перпендикулярна CM и пересекает катет AC в точке K . При этом $AK:KC = 1:2$.

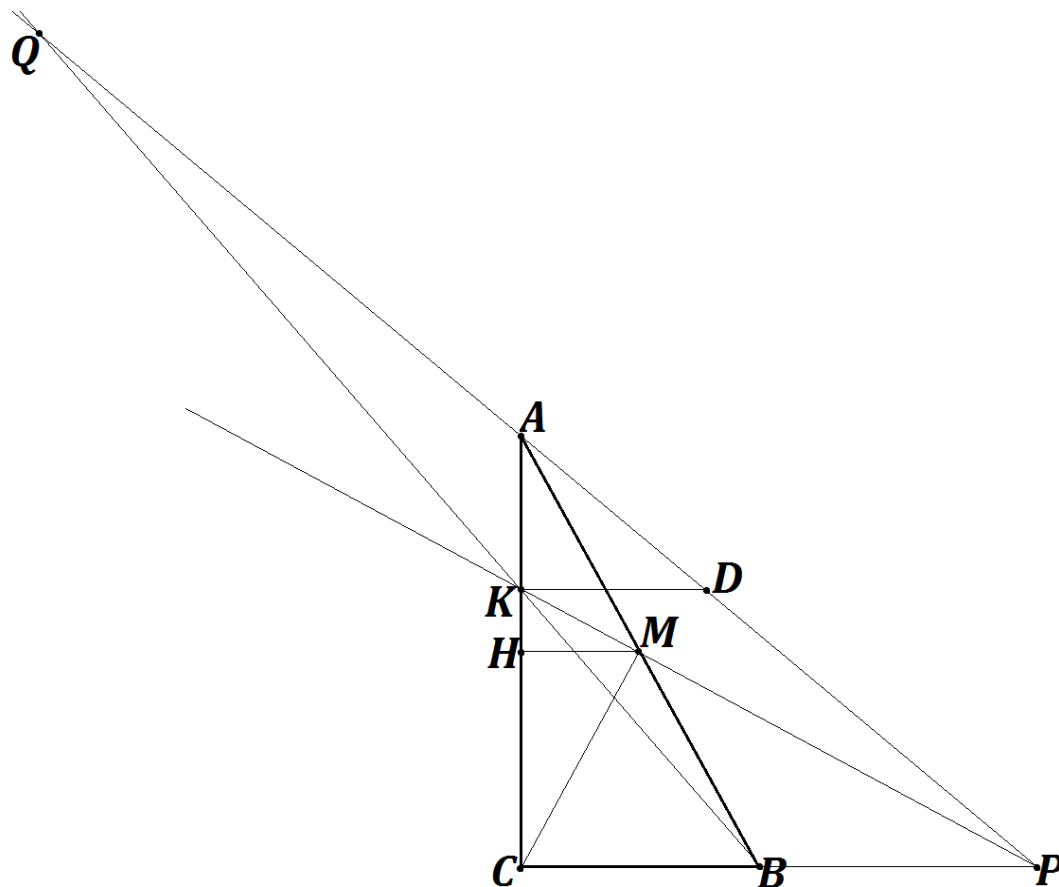
а) Докажите, что $\angle BAC = 30^\circ$.

б) Пусть прямые MK и BC пересекаются в точке P , а прямые AP и BK — в точке Q . Найдите KQ , если $BC = \sqrt{21}$.

Решение:

а)





$$AK:KC = 1:2$$

=>

Пусть

$$AK = 2x$$

$$KC = 4x$$

Тогда

$$AC = 6x$$

$$CM = AM = BM$$

(по свойству медианы в прямоугольном треугольнике)

Рассмотрим $\triangle ACM$ – равнобедренный

Пусть

MH – высота в $\triangle ACM$

=>

MH – медиана в $\triangle ACM$

(по свойству равнобедренного треугольника)

=>

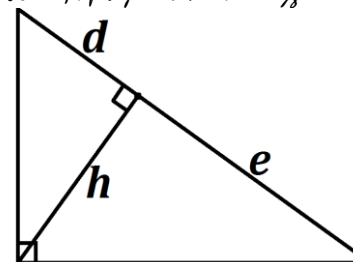
$$AH = 3x$$

$$CH = 3x$$

$$KH = x$$

Рассмотрим $\triangle CMK$ – прямоугольный

Высота, проведенная к гипотенузе



$$h^2 = d \cdot e$$

$$HM^2 = KH \cdot CH$$

$$HM^2 = x \cdot 3x$$

$$HM^2 = 3x^2$$

$$HM = \sqrt{3}x$$

$$\operatorname{tg} \angle HAM = \frac{HM}{AH} = \frac{\sqrt{3}x}{3x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\angle BAC = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = 30^\circ$$

■

б)

Построим прямую DK такую, что $DK \parallel BC$

Будем искать KQ из подобия треугольников KQD и BQP

$$\frac{DK}{BP} = \frac{KQ}{BQ}$$

$$\frac{DK}{BP} = \frac{KQ}{KQ + BK}$$

Найдём все элементы равенства:

$$\operatorname{tg} \angle A = \frac{BC}{AC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{21}}{AC}$$

$$AC = 3\sqrt{7}$$

=>

$$6x = 3\sqrt{7}$$

$$x = 0,5\sqrt{7}$$

$$KH = x = 0,5\sqrt{7}$$

$$AK = 2x = \sqrt{7}$$

$$HM = \sqrt{3}x = 0,5\sqrt{21}$$

$$CK = 4x = 2\sqrt{7}$$

$\triangle HKM \sim \triangle CKP$ по двум углам

$$\frac{HM}{CP} = \frac{KH}{CK}$$

$$\frac{0,5\sqrt{21}}{CP} = \frac{0,5\sqrt{7}}{2\sqrt{7}}$$

$$CP = 2\sqrt{21}$$

=>

$$BP = CP - BC = 2\sqrt{21} - \sqrt{21} = \sqrt{21}$$

$$BK = \sqrt{BC^2 + CK^2} = \sqrt{\sqrt{21}^2 + (2\sqrt{7})^2} = 7 \text{ (по теореме Пифагора)}$$

$\triangle AKD \sim \triangle ACP$ по двум углам

$$\frac{DK}{CP} = \frac{AK}{AC}$$

$$\frac{DK}{2\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{7}}$$

$$DK = \frac{2\sqrt{21}}{3}$$

=>

$\triangle KQD \sim \triangle BQP$ по двум углам

$$\frac{\frac{2\sqrt{21}}{3}}{\sqrt{21}} = \frac{KQ}{KQ + 7}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{KQ}{KQ + 7}$$

$$2KQ + 14 = 3KQ$$

$$KQ = 14$$

Ответ: б) 14

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i>	3
Получен обоснованный ответ в пункте <i>b</i> ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> и при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , ИЛИ При обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> с использованием утверждения пункта <i>a</i> , при этом пункт <i>a</i> не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3



17 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 16 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 38 млн рублей?

Решение:

Пусть n – срок кредита

Составим таблицу:

Год	Долг на начало года	Основной платёж	Дополнительный платёж
1	16	$\frac{16}{n}$	$\frac{25}{100} \cdot 16 = 4$
...			
n	$\frac{16}{n}$	$\frac{16}{n}$	$\frac{25}{100} \cdot \frac{16}{n} = \frac{4}{n}$

Общая сумма выплат (ОСВ) – это все основные платежи и все дополнительные платежи (сумму всех дополнительных платежей найдём с помощью формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии)

Сумма первых n членов арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$\text{ОСВ} = n \cdot \frac{16}{n} + \frac{4 + \frac{4}{n}}{2} \cdot n = 38$$

$$16 + \left(2 + \frac{2}{n}\right) \cdot n = 38$$

$$16 + 2n + 2 = 38$$

$$2n = 20$$

$$n = 10$$

Ответ: 10

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18

Найдите все значения a , при которых уравнение $|\sin^2 x + 2 \cos x + a| = \sin^2 x + \cos x - a$ имеет на промежутке $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ единственный корень.

Решение:

Раскроем модуль двумя способами:

$$\begin{cases} \sin^2 x + 2 \cos x + a \geq 0 \\ \sin^2 x + 2 \cos x + a = \sin^2 x + \cos x - a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 x + 2 \cos x + a \geq 0 \\ \cos x = -2a \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 - \cos^2 x + 2 \cos x + a \geq 0 \\ \cos x = -2a \end{cases}$$



$$\begin{cases} 1 - 4a^2 - 4a + a \geq 0 \\ \cos x = -2a \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4a^2 - 3a + 1 \geq 0 \\ \cos x = -2a \end{cases}$$

Найдём значения a из неравенства и из уравнения и найдём их пересечение

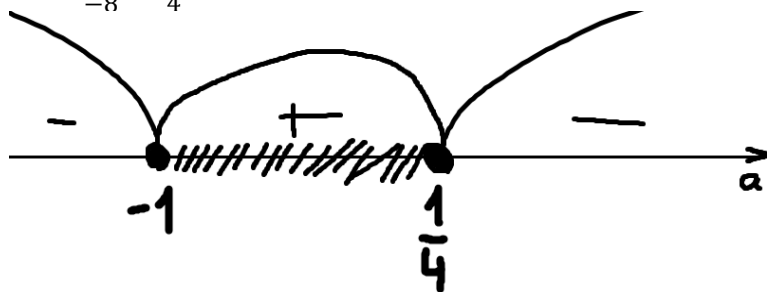
$$-4a^2 - 3a + 1 \geq 0$$

$$-4a^2 - 3a + 1 = 0$$

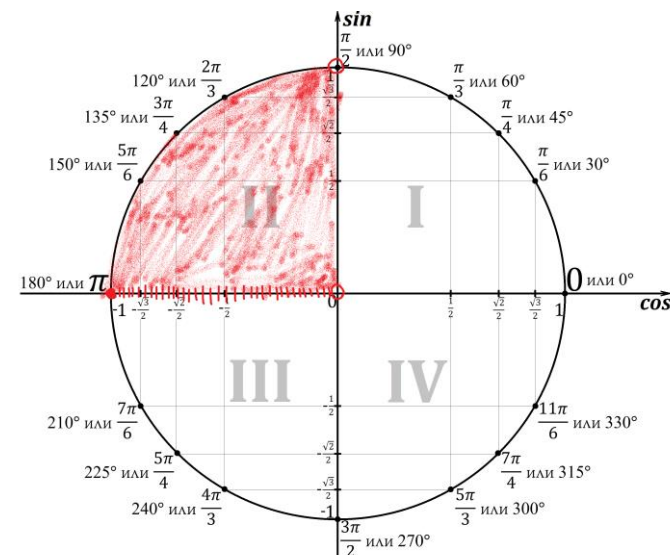
$$D = 25$$

$$a_1 = \frac{3+5}{-8} = -1$$

$$a_2 = \frac{3-5}{-8} = \frac{1}{4}$$



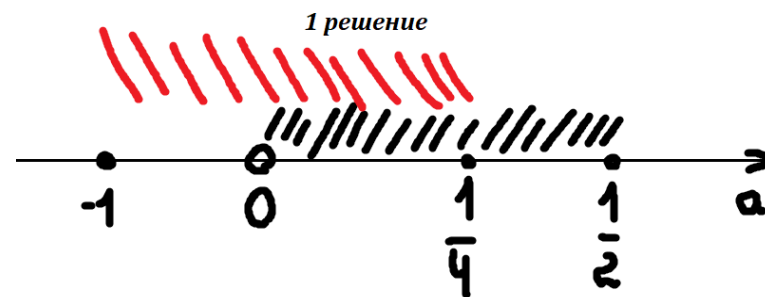
$$\cos x = -2a \text{ на промежутке } \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$$



$$-1 \leq -2a < 0$$

$$0 < a \leq \frac{1}{2}$$

Найдём пересечение получившихся значений a



$$\begin{cases} \sin^2 x + 2 \cos x + a < 0 \\ -\sin^2 x - 2 \cos x - a = \sin^2 x + \cos x - a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 x + 2 \cos x + a < 0 \\ 2 \sin^2 x + 3 \cos x = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \sin^2 x + 2 \cos x + a < 0 \\ 2(1 - \cos^2 x) + 3 \cos x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 x + 2 \cos x + a < 0 \\ -2\cos^2 x + 3 \cos x + 2 = 0 \end{cases}$$

Найдём корни уравнения:

$$-2\cos^2 x + 3 \cos x + 2 = 0$$

Пусть $\cos x = t$

$$-2t^2 + 3t + 2 = 0$$

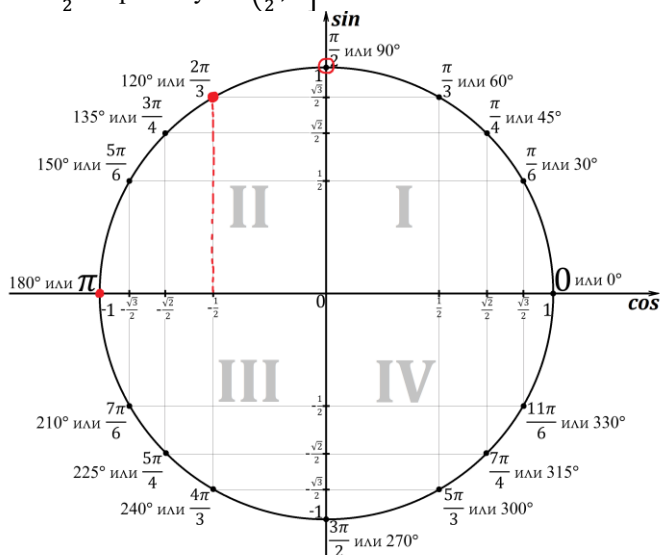
$$D = 25$$

$$t_1 = \frac{-3 + 5}{-4} = -\frac{1}{2}$$

$$t_2 = \frac{-3 - 5}{-4} = 2$$

$\cos x = 2$ (нет решений)

$\cos x = -\frac{1}{2}$ на промежутке $(\frac{\pi}{2}; \pi]$

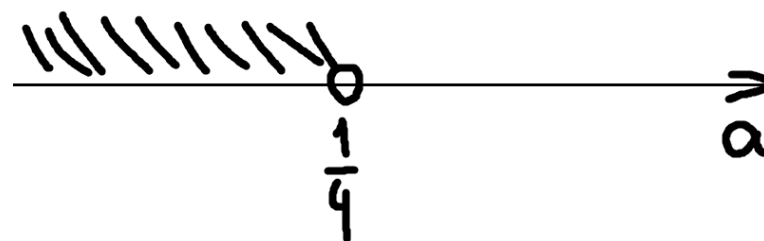


$$\begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} \\ \sin^2 \frac{2\pi}{3} + 2 \cos \frac{2\pi}{3} + a < 0 \\ x = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

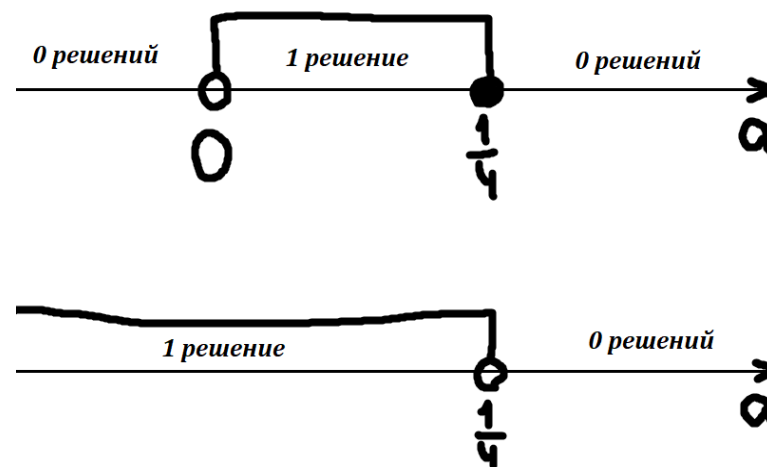
$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + a < 0$$

$$\frac{3}{4} - 1 + a < 0$$

$$a < \frac{1}{4}$$



Найдём совокупность решений:



при $a < 0$ имеем 0 решений в первом случае и 1 во втором
при $a = 0$ имеем 0 решений в первом случае и 1 во втором



при $0 < a < \frac{1}{4}$ имеем 1 решение в первом случае и 1 во втором
 при $a = \frac{1}{4}$ имеем 1 решение в первом случае и 0 во втором
 при $a > \frac{1}{4}$ имеем 0 решений в первом случае и 0 во втором

Нам нужно одно решение

Ответ: $a \in (-\infty; 0] \cup \left\{\frac{1}{4}\right\}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19

Максим должен был умножить двузначное число на трёхзначное число (числа с нуля начинаться не могут). Вместо этого он просто приписал трёхзначное число справа к двузначному, получив пятизначное число, которое оказалось в N раз (N – натуральное число) больше правильного результата.

- а) Могло ли N равняться 2?
 б) Могло ли N равняться 10?
 в) Каково наибольшее возможное значение N ?

Решение:

Пусть
 x – двузначное число
 y – трёхзначное число
 Тогда

$1000x + y$ – число, полученное после приписывания трёхзначного справа к двузначному

(Пример: 12 и 345, получится 12345, т.е. 12 стало количеством тысяч)

$$\frac{1000x + y}{xy} = N$$

а)

$$\frac{1000x + y}{xy} = 2$$

$1000x + y = 2xy$
 Попробуем решить в целых числах

Заметим, что y – чётное число, т.к. правая часть уравнения чётная, значит и оба слагаемых левой части уравнения – чётные

$$1000x - 2xy = -y$$

$$2x(500 - y) = -y$$

$$x = \frac{y}{2(y - 500)}$$

Заметим, что $(y - 500)$ – чётное число, т.к. если из чётного y вычесть чётные 500, то получится чётный результат

=>

y делится как минимум на 4

Возьмём y большее 500, и которое при этом делится на 4

$y = 504$ – самое первое такое число
 Получаем

$$x = \frac{504}{2(504 - 500)} = 63$$

Проверяем:

$$\frac{63504}{63 \cdot 504} = 2$$

 =>

Могло



$$\text{б) } \frac{1000x + y}{xy} = 10$$

$$\begin{aligned} 1000x + y &= 10xy \\ 1000x &= 10xy - y \\ 1000x &= y(10x - 1) \\ x &= \frac{y(10x - 1)}{1000} \end{aligned}$$

Числа 1000 и $(10x - 1)$ не имеют общих делителей, т.к.
 $1000 = 2^3 \cdot 5^3$

$(10x - 1)$ состоит из двух слагаемых
 $10x$ делится на 2 и 5
 -1 не делится на 2 и 5
 $\Rightarrow$
 $(10x - 1)$ не делится на 2 и 5

$\Rightarrow$
 у обязан делиться на 1000 без остатка, но y — трёхзначное число
 $\Rightarrow$
 y не может делиться на 1000 без остатка
 $\Rightarrow$
 Не могло

$$\text{в) } \frac{1000x + y}{xy} = N$$

$$N = \frac{1000x}{xy} + \frac{y}{xy}$$

$$N = \frac{1000}{y} + \frac{1}{x}$$

N будет максимальным, если x и y будут как можно меньшими

Минимально возможный y — это 100

Минимально возможный x — это 10

$\Rightarrow$

N не может быть больше, чем

$$\frac{1000}{100} + \frac{1}{10} = 10,1$$

$$N \leq 10,1$$

$N = 10$ не подходит (доказано в пункте б)

$\Rightarrow$

$$N \leq 9$$

Проверим могло ли N равняться 9?

$$\frac{1000x + y}{xy} = 9$$

$$\begin{aligned} 1000x + y &= 9xy \\ 1000x - 9xy &= -y \\ x(1000 - 9y) &= -y \\ x &= \frac{y}{9y - 1000} \end{aligned}$$

Чтобы x и y получились положительными знаменатель дроби должен быть положительным

$$9y - 1000 > 0$$

$$9y > 1000$$

$$y > 111\frac{1}{9}$$

$\Rightarrow$

$$y \geq 112$$

Если $y = 112$, то

$$x = \frac{112}{9 \cdot 112 - 1000} = \frac{112}{8} = 14$$

Проверяем:

$$\frac{14112}{14 \cdot 112} = 9$$

$\Rightarrow$

$N = 9$ подходит

Ответ: а) да, б) нет, в) 9



Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: - обоснованное решение п. а; - обоснованное решение п. б; - искомая оценка в п. в; - пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

