

**Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень**

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания с кратким ответом повышенного уровня сложности и 7 заданий с развернутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

К И М
Ответ: -0,8

10	-	0	,	8																
----	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

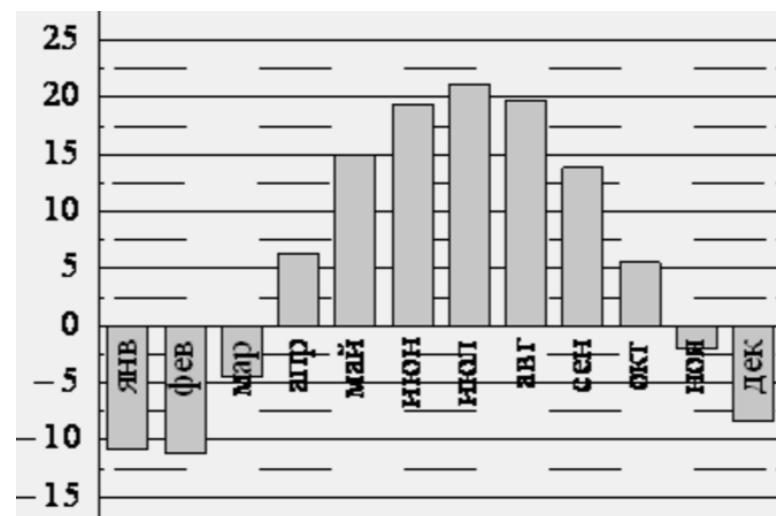
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- 1** На автозаправке клиент отдал кассиру 1000 рублей и попросил залить бензин до полного бака. Цена бензина 37 руб. за литр. Клиент получил 75 рублей сдачи. Сколько литров бензина было залито в бак?

Ответ: _____.

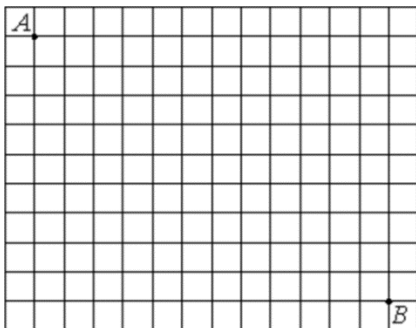
- 2** На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха (в градусах Цельсия) в Саратове по результатам многолетних наблюдений. Найдите по диаграмме количество месяцев с начала апреля по конец ноября, когда среднемесячная температура в Саратове выше 5°C.



Ответ: _____.



- 3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 отмечены точки A и B . Найдите длину отрезка AB .



Ответ: _____.

- 4 В классе 16 учащихся, среди них два друга – Вадим и Сергей. Учащихся случайным образом разбивают на 4 равные группы. Найдите вероятность того, что Вадим и Сергей окажутся в одной группе.

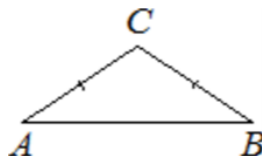
Ответ: _____.

- 5 Найдите корень уравнения

$$\frac{1}{3x-1} = 5.$$

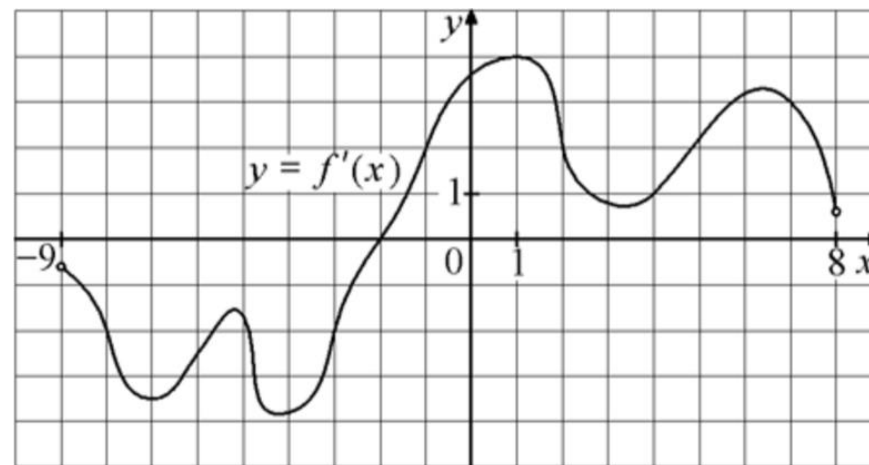
Ответ: _____.

- 6 В треугольнике ABC угол A равен 37° , стороны AC и BC равны. Найдите угол C . Ответ дайте в градусах.



Ответ: _____.

- 7 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-9; 8)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-3; 3]$.



Ответ: _____.

- 8 В цилиндрический сосуд, в котором находится 6 дм^3 воды, опустили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся в 1,5 раза. Чему равен объём детали? Ответ выразите в дм^3 .

Ответ: _____.

- 9 Найдите значение выражения $\log_7 12,25 + \log_7 4$.

Ответ: _____.



- 10** Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 2 + 13t - 5t^2$, где h – высота в метрах, t – время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 8 метров?

Ответ: _____.

- 11** Моторная лодка прошла против течения реки 252 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 4 часа меньше. Найдите скорость течения, если скорость лодки в неподвижной воде равна 16 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

- 12** Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - x^2 - 8x + 4$ на отрезке $[1; 7]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13** а) Решите уравнение $\sin 2x = \sqrt{3} \sin \left(\frac{3\pi}{2} - x \right)$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[3\pi; 4\pi]$.

- 14** В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона AB основания равна 12, а высота пирамиды равна 1. На рёбрах AB , AC и AS отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM = AN = 3$ и $AK = \frac{7}{4}$.

- а) Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.
б) Найдите расстояние от точки M до плоскости SBC .

- 15** Решите неравенство $\frac{15^x - 3^{x+1} - 5^{x+1} + 15}{-x^2 + 2x} \geq 0$.

- 16** В треугольнике ABC точки A_1 , B_1 и C_1 – середины сторон BC , AC и AB соответственно, AH – высота, $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle BCA = 45^\circ$.

- а) Докажите, что точки A_1 , B_1 , C_1 и H лежат на одной окружности.
б) Найдите A_1H , если $BC = 2\sqrt{3}$.



- 17 Строительство нового завода стоит 75 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0,5x^2 + x + 7$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px - (0,5x^2 + x + 7)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 3 года?

- 18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $\frac{x-2a}{x+2} + \frac{x-1}{x-a} = 1$ имеет ровно один корень.

- 19 а) Приведите пример четырёхзначного числа, произведение цифр которого в 10 раз больше суммы цифр этого числа.
б) Существует ли такое четырёхзначное число, произведение цифр которого в 175 раз больше суммы цифр этого числа?
в) Найдите все четырёхзначные числа, произведение цифр которых в 50 раз больше суммы цифр этого числа.

О проекте «Пробный ЕГЭ каждую неделю»

Данный ким составлен командой всероссийского волонтерского проекта «ЕГЭ 100 баллов» <https://vk.com/ege100ballov> и безвозмездно распространяется для любых некоммерческих образовательных целей.

Нашли ошибку в варианте?

Напишите нам, пожалуйста, и мы обязательно её исправим!

Для замечаний и пожеланий: https://vk.com/topic-10175642_39008096
(также доступны другие варианты для скачивания)

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:

ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	7 лет репетиторской деятельности
Регалии:	Основатель проекта Школа Пифагора
Аккаунт ВК:	https://vk.com/eugene10
Сайт и доп. информация:	https://vk.com/shkolapifagora https://youtube.com/ШколаПифагора



Система оценивания Ответы к заданиям 1-19

Каждое из заданий 1–12 считается выполненным верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Верно выполненные задания 13–15 максимум оцениваются в 2 балла, задания 16–17 – в 3 балла, а задания 18–19 – в 4 балла.

№ задания	Ответ
1	25
2	7
3	15
4	0,2
5	0,4
6	106
7	-2
8	3
9	2
10	1,4
11	2
12	-8
13	а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$. б) $3,5\pi; \frac{11\pi}{3}; \frac{10\pi}{3}$
14	$\frac{9\sqrt{39}}{26}$
15	$(0; \log_5 3] \cup [\log_3 5; 2)$
16	1
17	9
18	$\left\{ \frac{-1 - \sqrt{10}}{2}; -2; -1; 1; \frac{-1 + \sqrt{10}}{2} \right\}$
19	а) 2592, б) нет, в) 5568, 5586, 5865, 5856, 5658, 5685, 6558, 6585, 6855, 8655, 8565, 8556

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13

а) Решите уравнение

$$\sin 2x = \sqrt{3} \sin \left(\frac{3\pi}{2} - x \right).$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[3\pi; 4\pi]$.

Решение:

а)

$$\sin 2x = \sqrt{3} \sin \left(\frac{3\pi}{2} - x \right)$$

$$\sin 2x = -\sqrt{3} \cos x$$

Синус двойного угла

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$2 \sin x \cos x = -\sqrt{3} \cos x$$

$$2 \sin x \cos x + \sqrt{3} \cos x = 0$$

$$\cos x (2 \sin x + \sqrt{3}) = 0$$



$\cos x = 0$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n; n \in \mathbb{Z}$	$2 \sin x + \sqrt{3} = 0$ $2 \sin x = -\sqrt{3}$ $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$ $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$
---	--

б)

Подберём корни для $x = \frac{\pi}{2} + \pi n; n \in \mathbb{Z}$ Если $n = 2$, то $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi = 2,5\pi \notin [3\pi; 4\pi]$ Если $n = 3$, то $x = \frac{\pi}{2} + 3\pi = 3,5\pi \in [3\pi; 4\pi]$ Если $n = 4$, то $x = \frac{\pi}{2} + 4\pi = 4,5\pi \notin [3\pi; 4\pi]$ Подберём корни для $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$ Если $n = 1$, то $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3} \notin [3\pi; 4\pi]$ Если $n = 2$, то $x = -\frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{11\pi}{3} \in [3\pi; 4\pi]$ Если $n = 3$, то $x = -\frac{\pi}{3} + 6\pi = \frac{17\pi}{3} \notin [3\pi; 4\pi]$ Подберём корни для $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$ Если $n = 1$, то $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{4\pi}{3} \notin [3\pi; 4\pi]$ Если $n = 2$, то $x = -\frac{2\pi}{3} + 4\pi = \frac{10\pi}{3} \in [3\pi; 4\pi]$ Если $n = 3$, то $x = -\frac{2\pi}{3} + 6\pi = \frac{16\pi}{3} \notin [3\pi; 4\pi]$ Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$. б) $3,5\pi; \frac{11\pi}{3}; \frac{10\pi}{3}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта а и пункта б	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14

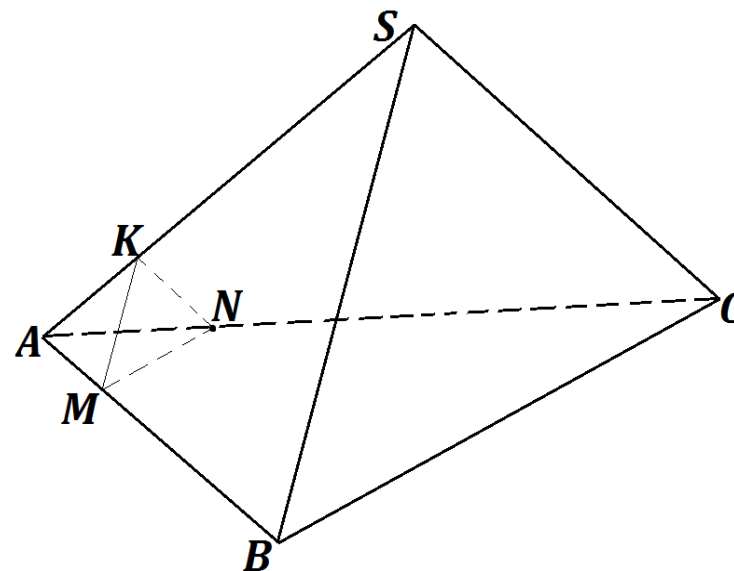
В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона AB основания равна 12, а высота пирамиды равна 1. На рёбрах AB , AC и AS отмечены точки M , N и K соответственно, причём

$$AM = AN = 3 \text{ и } AK = \frac{7}{4}.$$

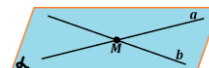
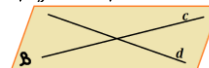
а) Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.б) Найдите расстояние от точки M до плоскости SBC .

Решение:

а)



Признак параллельности двух плоскостей

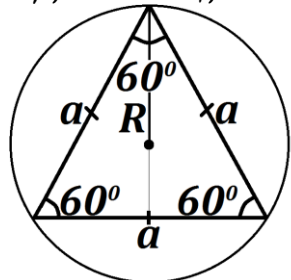


Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны

$\triangle AMN \sim \triangle ABC$ по двум пропорциональным сторонам и углу между ними
 $\left(\begin{array}{l} \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \\ \angle MAN = \angle BAC \end{array} \right)$
 $\Rightarrow MN \parallel BC$

Осталось доказать, что $MK \parallel SB$

Радиус описанной окружности равностороннего треугольника



$$R = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot a$$

или

$$R = \frac{2}{3} \cdot h$$

Пусть

SO — высота пирамиды

Тогда

$$AO = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot AB = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 12 = 4\sqrt{3}$$

$$SA = \sqrt{AO^2 + SO^2} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{49} = 7 \text{ (по теореме Пифагора)}$$

$\triangle AKM \sim \triangle ABS$ по двум пропорциональным сторонам и углу между ними

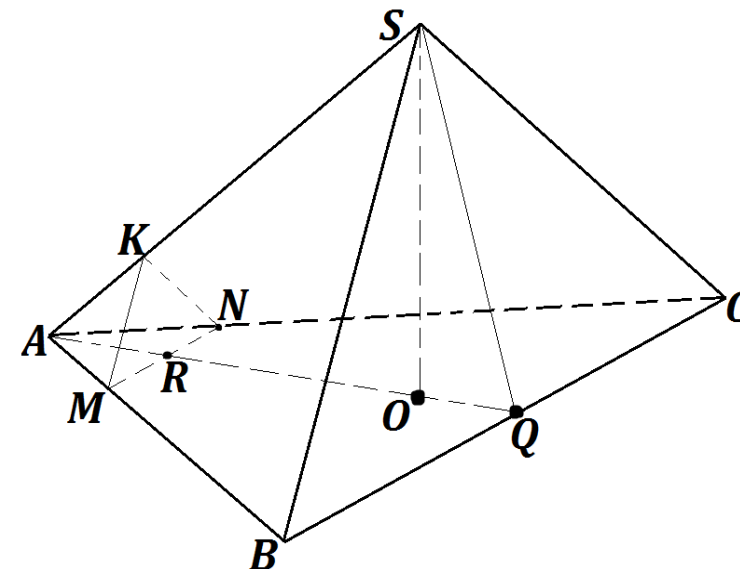
$$\left(\begin{array}{l} \frac{AM}{AB} = \frac{AK}{SA} \\ \angle MAK = \angle BAS \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow MK \parallel SB$$

$$\Rightarrow (MKN) \parallel (SBC)$$

■

б)



Пусть

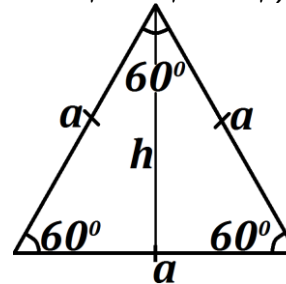
R — середина MN

Q — середина BC

Расстояние от точки M до плоскости SBC равно расстоянию от точки R до плоскости SBC , потому что M и R лежат на одной прямой

Итак, расстояние от точки R до прямой SQ — искомое

Высота равностороннего треугольника



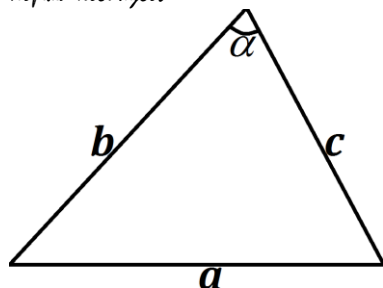
$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$$

Рассмотрим $\triangle ASQ$

$$AQ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 12 = 6\sqrt{3}$$

$$SQ = \sqrt{SB^2 - BQ^2} = \sqrt{7^2 - 6^2} = \sqrt{13} \text{ (по теореме Пифагора)}$$

Теорема Косинусов



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

или

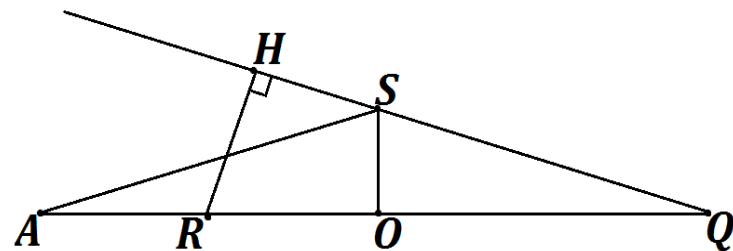
$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Воспользуемся теоремой косинусов, чтобы узнать тупоугольным или остроугольным является $\triangle ASQ$:

$$\cos \angle ASQ = \frac{SA^2 + SQ^2 - AQ^2}{2 \cdot SA \cdot SQ} = \frac{7^2 + \sqrt{13}^2 - (6\sqrt{3})^2}{2 \cdot 7 \cdot \sqrt{13}} < 0$$

=>

$\triangle ASQ$ – тупоугольный:



RH – искомое расстояние

$$QR = \frac{3}{4} \cdot AQ = \frac{3}{4} \cdot 6\sqrt{3} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

(это следует из подобия $\triangle AMN$ и $\triangle ABC$, доказанного в пункте а)

$$\sin \angle SQO = \frac{SO}{SQ} = \frac{1}{\sqrt{13}}$$

$$\sin \angle HQR = \frac{HR}{QR} = \frac{HR}{\frac{9\sqrt{3}}{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{HR}{\frac{9\sqrt{3}}{2}}$$

$$HR = \frac{9\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} = \frac{9\sqrt{39}}{26}$$

Ответ: б) $\frac{9\sqrt{39}}{26}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт а. ИЛИ Верно решён пункт б при отсутствии обоснований в пункте а	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15

Решите неравенство

$$\frac{15^x - 3^{x+1} - 5^{x+1} + 15}{-x^2 + 2x} \geq 0.$$

Решение:

$$15^x - 3^{x+1} - 5^{x+1} + 15 = 0$$

$$15^x - 3 \cdot 3^x - 5 \cdot 5^x + 15 = 0$$

$$-x^2 + 2x \neq 0$$

$$x(2 - x) \neq 0$$



$$(15^x - 3 \cdot 3^x) + (-5 \cdot 5^x + 15) = 0$$

$$3^x \cdot (5^x - 3) - 5 \cdot (5^x - 3) = 0$$

$$(5^x - 3)(3^x - 5) = 0$$

$$x \neq 0$$

$$x \neq 2$$

$$5^x - 3 = 0$$

$$5^x = 3$$

$$5^x = 5^{\log_5 3}$$

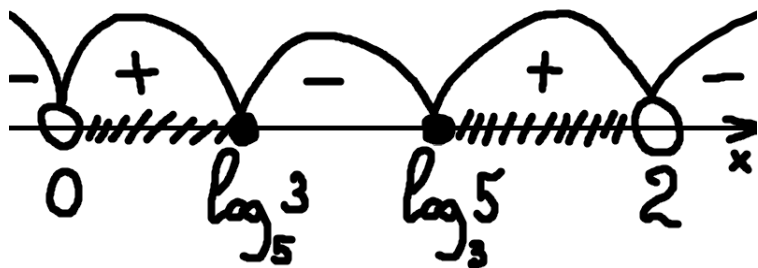
$$x = \log_5 3$$

$$3^x - 5 = 0$$

$$3^x = 5$$

$$3^x = 3^{\log_3 5}$$

$$x = \log_3 5$$



Ответ: $(0; \log_5 3] \cup [\log_3 5; 2)$

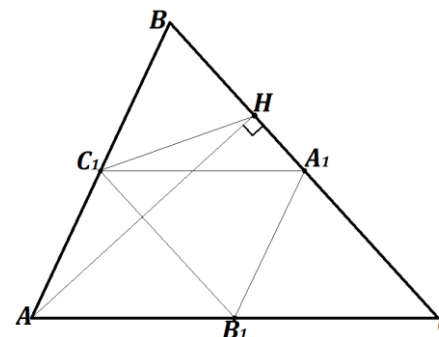
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

- 16 В треугольнике ABC точки A_1 , B_1 и C_1 — середины сторон BC , AC и AB соответственно, AH — высота, $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle BCA = 45^\circ$.

- а) Докажите, что точки A_1 , B_1 , C_1 и H лежат на одной окружности.
 б) Найдите A_1H , если $BC = 2\sqrt{3}$.

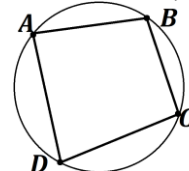
Решение:

а)



Соединим точками четырёхугольник $A_1B_1C_1H$

Свойство четырёхугольника, вписанного в окружность



$$\angle A + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle B + \angle D = 180^\circ$$

Наша задача — доказать, что сумма противоположных углов в данном четырёхугольнике равна 180°

Найдём углы внутри треугольника и подпишем их на рисунке:

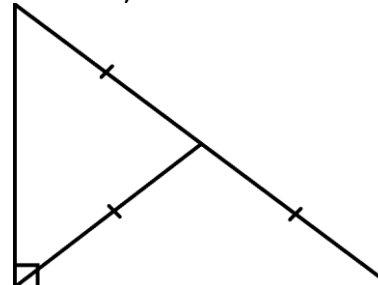
$$\angle BCA = 45^\circ$$

$$\angle ABC = 180 - \angle BCA - \angle BAC = 180 - 45 - 60 = 75^\circ$$

$$\angle BAH = 180 - \angle AHB - \angle ABH = 180 - 90 - 75 = 15^\circ$$

$$\angle CAH = \angle BAC - \angle BAH = 60 - 15 = 45^\circ$$

Свойство медианы



В прямоугольном треугольнике медиана, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы

Рассмотрим $\triangle ABH$ – прямоугольный

C_1H – медиана

$\Rightarrow$

$C_1H = AC_1$ (по свойству медианы в прямоугольном треугольнике)

$\Rightarrow$

$\triangle AC_1H$ – равнобедренный

$\Rightarrow$

$\angle AHC_1 = \angle BAN = 15^\circ$

Признаки параллелограмма

Четырёхугольник является параллелограммом:

- 1) Если две стороны равны и параллельны
- 2) Если противоположные углы попарно равны
- 3) Если противоположные стороны попарно равны
- 4) Если все противоположные стороны попарно параллельны
- 5) Если диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам
- 6) Если сумма соседних углов равна 180°
- 7) Если сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех сторон
- 8) Если сумма расстояний между серединами противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равна его полупериметру

Рассмотрим $A_1BC_1B_1$

$A_1B_1 \parallel BC_1$

$A_1B_1 = BC_1$ (т.к. A_1B_1 – средняя линия)

$\Rightarrow$

$A_1BC_1B_1$ – параллелограмм

$\Rightarrow$

$\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC = 75^\circ$

$\angle A_1HC_1 = \angle AHA_1 + \angle AHC_1 = 90 + 15 = 105^\circ$

$\angle A_1B_1C_1 + \angle A_1HC_1 = 75 + 105 = 180^\circ$

$\Rightarrow$

Четырёхугольник $A_1B_1C_1H$ можно вписать в окружность

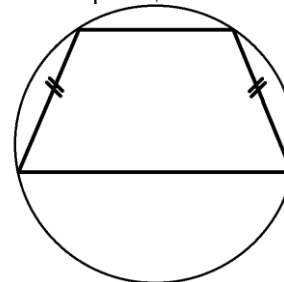
$\Rightarrow$

Точки A_1, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности

■

б)

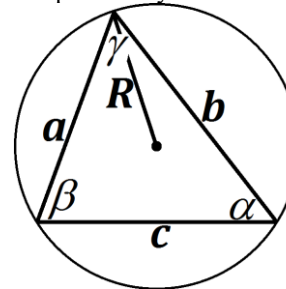
Свойство трапеции



Если трапеция вписана в окружность, то она - равнобедренная

$A_1B_1C_1H$ – равнобедренная трапеция (трапеция из-за параллельности двух сторон, а равнобедренная из-за того, что вписана в окружность)

Теорема синусов



$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$$

или

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = \frac{AB}{\sin 45^\circ}$$

$$AB = \frac{2\sqrt{3} \cdot \sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{2}$$

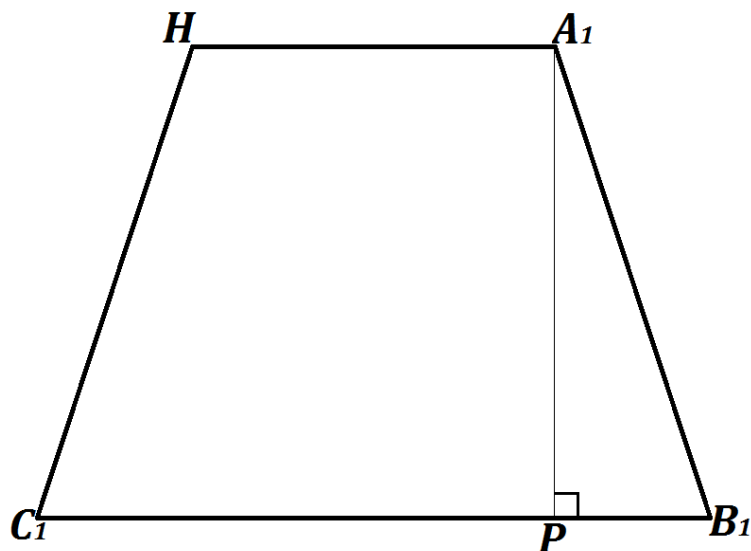
$\Rightarrow$



$$A_1B_1 = \frac{AB}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

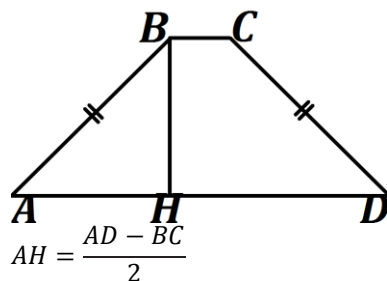
$$B_1C_1 = \frac{BC}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Рассмотрим $A_1B_1C_1H$:



Пусть
 $A_1H = x$
 A_1P – высота трапеции

Свойство равнобедренной трапеции



$$HD = \frac{AD + BC}{2}$$

Тогда

$$B_1P = \frac{B_1C_1 - A_1H}{2} = \frac{\sqrt{3} - x}{2}$$

$$\angle B_1A_1P = 180 - \angle B_1PA_1 - \angle A_1B_1C_1 = 180 - 90 - 75 = 15^\circ$$

Формулы сложения и вычитания аргументов

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\sin \angle B_1A_1P = \frac{B_1P}{A_1B_1}$$

$$\sin 15^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}-x}{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\sin(45 - 30)^\circ = \frac{\sqrt{3} - x}{2\sqrt{2}}$$

$$\sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3} - x}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} - x}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{3} - x}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{3} - x}{2\sqrt{2}} \quad | \cdot 2\sqrt{2}$$



$$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} - x$$

$$\sqrt{6} - \sqrt{2} = \sqrt{6} - \sqrt{2} \cdot x$$

$$-\sqrt{2} = -\sqrt{2} \cdot x$$

$$x = 1$$

$$A_1H = 1$$

Ответ: б) 1

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i>	3
Получен обоснованный ответ в пункте <i>b</i> ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> и при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , ИЛИ При обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> с использованием утверждения пункта <i>a</i> , при этом пункт <i>a</i> не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

- 17 Строительство нового завода стоит 75 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0,5x^2 + x + 7$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px - (0,5x^2 + x + 7)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать

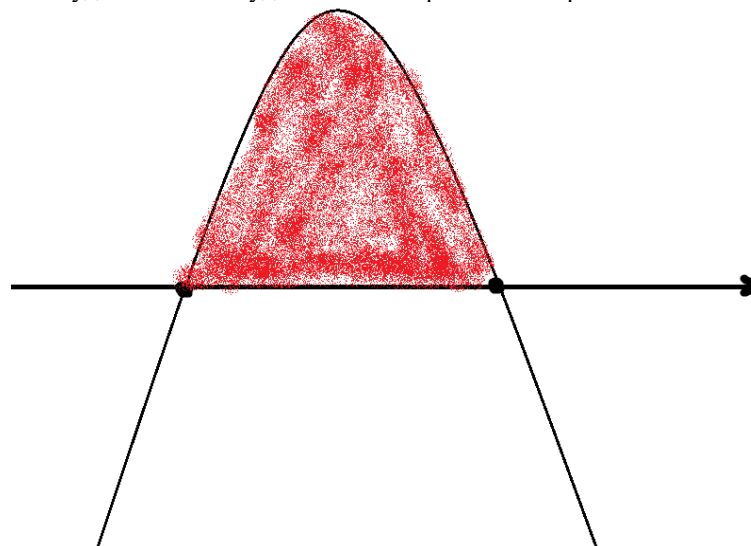
продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 3 года?

Решение:

Прибыль за 3 года должна быть не менее 75 млн рублей, получаем неравенство:

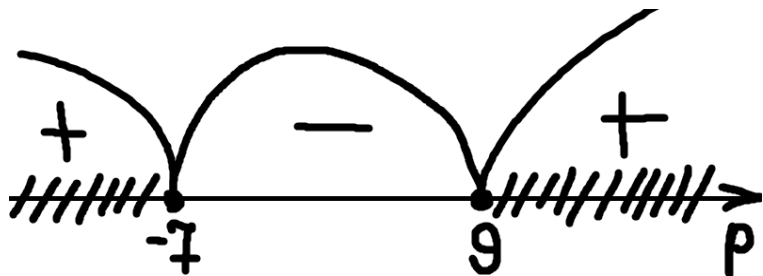
$$\begin{aligned} 3 \cdot (px - (0,5x^2 + x + 7)) &\geq 75 \\ px - (0,5x^2 + x + 7) &\geq 25 \\ -0,5x^2 + px - x - 32 &\geq 0 \\ -0,5x^2 + x(p - 1) - 32 &\geq 0 \end{aligned}$$

Это квадратичная функция, графиком является парабола с ветвями вниз, и она будет ≥ 0 если будет иметь 2 корня или 1 корень



$$\begin{aligned} \Rightarrow \\ D &\geq 0 \\ b^2 - 4ac &\geq 0 \\ (p - 1)^2 - 4 \cdot (-0,5) \cdot (-32) &\geq 0 \\ (p - 1)^2 - 64 &\geq 0 \\ (p - 1 - 8)(p - 1 + 8) &\geq 0 \\ (p - 9)(p + 7) &\geq 0 \end{aligned}$$





p – это цена, поэтому отрицательные значения отбрасываем и выбираем наименьшее подходящее положительное, как и требовалось в условии

Ответ: 9

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{x-2a}{x+2} + \frac{x-1}{x-a} = 1$$

имеет ровно один корень.

Решение:

$$\frac{x-2a}{x+2} + \frac{x-1}{x-a} - 1 = 0$$

$$\frac{(x-2a)(x-a) + (x-1)(x+2) - (x+2)(x-a)}{(x+2)(x-a)} = 0$$

$$\frac{(x-2a)(x-a) + (x-1)(x+2) + (x+2)(a-x)}{(x+2)(x-a)} = 0$$

$$\frac{x^2 - ax - 2ax + 2a^2 + x^2 + 2x - x - 2 + ax - x^2 + 2a - 2x}{(x+2)(x-a)} = 0$$

$$\frac{-2ax + 2a^2 + x^2 - x - 2 + 2a}{(x+2)(x-a)} = 0$$

$$x \neq -2$$

$$x \neq a$$

$$-2ax + 2a^2 + x^2 - x - 2 + 2a = 0$$

$$x^2 - (2a+1)x + 2a^2 + 2a - 2 = 0$$

За количество корней в квадратном уравнении отвечает дискриминант, рассмотрим каким он может быть:

$$D = 4a^2 + 4a + 1 - 8a^2 - 8a + 8 = -4a^2 - 4a + 9$$

Если $D < 0$ $-4a^2 - 4a + 9 < 0$ $-4a^2 - 4a + 9 = 0$ $D_a = 160$ $a_{1,2} = \frac{4 \pm 4\sqrt{10}}{-8}$ $a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{10}}{2}$ $\Rightarrow$ При получившихся a уравнение не имеет корней	Если $D = 0$ $x_0 = \frac{-b}{2a}$ $x_0 = \frac{2a}{2a+1}$ Получился единственный корень при $a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{10}}{2}$ $= \frac{-1 \pm \sqrt{10}}{2}$ Проверим условия $x \neq -2$ $x \neq a$	Если $D > 0$ $-4a^2 - 4a + 9 > 0$ Есть 2 подходящих варианта: 1) $x_1 = -2$ $x_2 \neq a$ 2) $x_1 = a$ $x_2 \neq -2$
---	--	---



	$\frac{2a+1}{2} = -2$ $2a+1 = -4$ $a = -2,5$ $\neq \frac{-1 \pm \sqrt{10}}{2}$	
	$\frac{2a+1}{2} = a$ $2a+1 = 2a$ $1 = 0$	
	Противоречие	

Теорема Виета

$$ax^2 + bx + c$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Рассмотрим вариант №1

По т. Виета получаем систему:

$$\begin{cases} -2 + x_2 = 2a + 1 \\ -2 \cdot x_2 = 2a^2 + 2a - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 2a + 3 \\ x_2 = -a^2 - a + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 2a + 3 \\ 2a + 3 = -a^2 - a + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 2a + 3 \\ a^2 + 3a + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 2a + 3 \\ (a+1)(a+2) = 0 \end{cases}$$

Если

$$a = -1, \text{ то } x_2 = 1, x_1 = -2$$

$$x_2 \neq a$$

$$-1 \in \left(\frac{-1 - \sqrt{10}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{10}}{2} \right)$$

И мы получили два корня, один из которых неподходящий

=>

Уравнение имеет 1 корень, как и требовалось

=>

$$a = -1 \text{ подходит}$$

Если

$$a = -2, \text{ то } x_2 = -1, x_1 = -2$$

$$x_2 \neq a$$

$$-2 \in \left(\frac{-1 - \sqrt{10}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{10}}{2} \right)$$

И мы получили два корня, один из которых неподходящий

=>

Уравнение имеет 1 корень, как и требовалось

=>

$$a = -2 \text{ подходит}$$

Рассмотрим вариант №2

По т. Виета получаем систему:

$$\begin{cases} a + x_2 = 2a + 1 \\ a \cdot x_2 = 2a^2 + 2a - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = a + 1 \\ a^2 + a = 2a^2 + 2a - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = a + 1 \\ a^2 + a - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = a + 1 \\ (a-1)(a+2) = 0 \end{cases}$$

Если

$$a = 1, \text{ то } x_2 = 2, x_1 = a = 1$$

$$x_2 \neq a$$

$$1 \in \left(\frac{-1 - \sqrt{10}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{10}}{2} \right)$$

И мы получили два корня, один из которых неподходящий

=>

Уравнение имеет 1 корень, как и требовалось



=>

 $a = 1$ подходит

Если

 $a = -2$ уже рассматривалиОтвет: $a \in \left\{ \frac{-1-\sqrt{10}}{2}; -2; -1; 1; \frac{-1+\sqrt{10}}{2} \right\}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19

- а) Приведите пример четырёхзначного числа, произведение цифр которого в 10 раз больше суммы цифр этого числа.
 б) Существует ли такое четырёхзначное число, произведение цифр которого в 175 раз больше суммы цифр этого числа?
 в) Найдите все четырёхзначные числа, произведение цифр которых в 50 раз больше суммы цифр этого числа.

Решение:

а)

Пусть a, b, c и d – цифры четырёхзначного числа

Произведение цифр в 10 раз больше суммы цифр этого числа

=>

$$a \cdot b \cdot c \cdot d = 10(a + b + c + d)$$

$$abcd = 10a + 10b + 10c + 10d$$

=>

 $abcd$ должно быть кратно 10

=>

среди цифр точно есть 5 и цифра, кратная 2, например 2 (можно было попробовать взять 4, 6, 8)

Пусть

$$a = 2$$

$$b = 5$$

Тогда

$$10cd = 20 + 50 + 10c + 10d$$

$$10cd = 70 + 10c + 10d \quad | : 10$$

$$cd = 7 + c + d$$

$$cd - c = d + 7$$

$$c(d - 1) = d + 7$$

$$c = \frac{d + 7}{d - 1}$$

Если $d = 2$, то

$$a = 2$$

$$b = 5$$

$$c = 9$$

$$d = 2$$

2592 или другое число из этих же цифр (есть ещё много и других вариантов, но нам нужен один пример)

б)

$$a \cdot b \cdot c \cdot d = 175(a + b + c + d)$$

$$abcd = 175a + 175b + 175c + 175d$$

=>

 $abcd$ должно быть кратно 175Разложим 175 на простые множители: $175 = 5 \cdot 5 \cdot 7$

=>

среди цифр точно есть 5, 5 и 7

Пусть

$$a = 5$$

$$b = 5$$

$$c = 7$$

Тогда



$$175d = 175 \cdot 5 + 175 \cdot 5 + 175 \cdot 7 + 175d$$

$$0 = 175 \cdot 5 + 175 \cdot 5 + 175 \cdot 7$$

=>

Противоречие

=>

Не существует

в)

$$a \cdot b \cdot c \cdot d = 50(a + b + c + d)$$

$$abcd = 50a + 50b + 50c + 50d$$

=>

 $abcd$ должно быть кратно 50

=>

среди цифр точно есть 5, 5 и цифра, кратная 2 (2, 4, 6 или 8)

Если

$$a = 5$$

$$b = 5$$

$$c = 2$$

Тогда

$$50d = 50 \cdot 5 + 50 \cdot 5 + 50 \cdot 2 + 50 \cdot d$$

=>

Противоречие

Если

$$a = 5$$

$$b = 5$$

$$c = 4$$

Тогда

$$100d = 50 \cdot 5 + 50 \cdot 5 + 50 \cdot 4 + 50 \cdot d$$

$$50d = 700$$

$$d = 14$$

=>

Не подходит, т.к. d — это цифра

Если

$$a = 5$$

$$b = 5$$

$$c = 6$$

Тогда

$$150d = 50 \cdot 5 + 50 \cdot 5 + 50 \cdot 6 + 50 \cdot d$$

$$100d = 800$$

$$d = 8$$

=>

5568 или другое число из этих же цифр нам подходит, запишем все варианты:

$$5568$$

$$5586$$

$$5865$$

$$5856$$

$$5658$$

$$5685$$

$$6558$$

$$6585$$

$$6855$$

$$8655$$

$$8565$$

$$8556$$

Ответ: а) 2592, б) нет, в) 5568, 5586, 5865, 5856, 5658, 5685, 6558, 6585, 6855, 8655, 8565, 8556

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: - обоснованное решение п. а; - обоснованное решение п. б; - искомая оценка в п. в; - пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

