

**Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень**

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания с кратким ответом повышенного уровня сложности и 7 заданий с развернутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

ОТВЕТ: -0,8

10 - 0,8

Blank

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

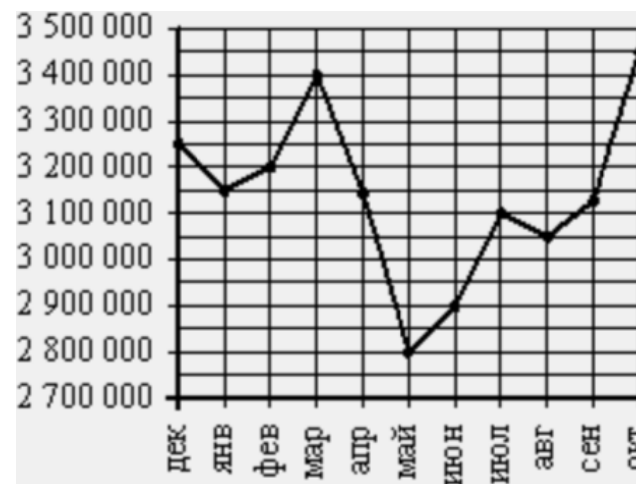
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- 1** Диагональ экрана телевизора равна 55 дюймам. Выразите диагональ экрана в сантиметрах. Считайте, что 1 дюйм равен 2, 54 см. Результат округлите до целого числа.

ОТВЕТ:

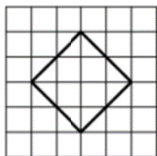
- 2** На рисунке жирными точками показана месячная аудитория поискового сайта во все месяцы с декабря 2008 по октябрь 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали – количество человек, посетивших сайт хотя бы раз за данный месяц. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наибольшую месячную аудиторию сайта в указанный период.



Ответ:



- 3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён квадрат. Найдите радиус описанной около него окружности.



Ответ: _____.

- 4 В сборнике билетов по истории всего 50 билетов, в 13 из них встречается вопрос про Александра Второго. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику **не достанется** вопрос про Александра Второго.

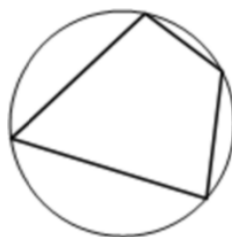
Ответ: _____.

- 5 Найдите корень уравнения $3^{\log_9(4x+1)} = 9$.

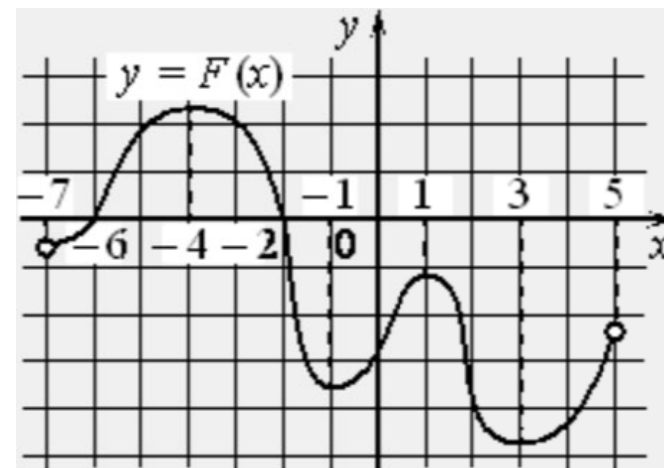
Ответ: _____.

- 6 Два угла вписанного в окружность четырёхугольника равны 78° и 113° . Найдите больший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.

Ответ: _____.

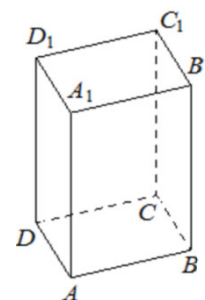


- 7 На рисунке изображён график $y = F(x)$ одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определённой на интервале $(-7; 5)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-5; 2]$.



Ответ: _____.

- 8 Дана правильная четырёхугольная призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, площадь основания которой равна 6, а боковое ребро равно 7. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, A_1, B_1 .



Ответ: _____.



9

Найдите

 $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{29}}{29}$ и $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ответ: _____.

10

Рейтинг R интернет-магазина вычисляется по формуле

$$R = r_{\text{пок}} - \frac{r_{\text{пок}} - r_{\text{экс}}}{(K + 1)^m}, \text{ где } m = \frac{0,02K}{r_{\text{пок}} + 0,1},$$

 $r_{\text{пок}}$ — средняя оценка магазина покупателями, $r_{\text{экс}}$ — оценка магазина, данная экспертами, K — число покупателей, оценивших магазин. Найдите рейтинг интернет-магазина, если число покупателей, оценивших магазин, равно 24, их средняя оценка равна 0,86, а оценка экспертов равна 0,51.

Ответ: _____.

11

Заказ на 140 деталей первый рабочий выполняет на 4 часа быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий, если известно, что первый за час делает на 4 детали больше?

Ответ: _____.

12

 Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 4e^x + 4$ на отрезке $[-1; 2]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

а) Решите уравнение

$$\sin 2x + \sqrt{3} \sin x = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$$\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right].$$

14

 В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $2\sqrt{3}$. На рёбрах BC и $C_1 D_1$ отмечены точки K и L соответственно, причём $BK = C_1 L = 2$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L .

 а) Докажите, что прямая $A_1 C$ перпендикулярна плоскости γ .

 б) Найдите объём пирамиды, вершина которой — точка A_1 , а основание — сечение данной призмы плоскостью γ .

15

Решите неравенство

$$\frac{\log_3(81x)}{\log_3 x - 4} + \frac{\log_3 x - 4}{\log_3(81x)} \geq \frac{24 - \log_3 x^8}{\log_3^2 x - 16}.$$

16

 Точки P , Q , W делят стороны выпуклого четырёхугольника $ABCD$ в отношении $AP:PB = CQ:QB = CW:WD = 3:4$, радиус окружности, описанной около треугольника PQW , равен 10, $PQ = 16$, $QW = 12$, угол PWQ — острый.

 а) Докажите, что треугольник PQW — прямоугольный.

 б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$.


17 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 9 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наименьший годовой платёж составит 1,25 млн рублей?

18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{1-2x} = a - 3|x|$ имеет более двух корней.

19 Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{4}{13}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

- а) Могло ли быть в группе 10 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?
- б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?
- в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов а и б?

О проекте «Пробный ЕГЭ каждую неделю»

Данный ким составлен командой всероссийского волонтерского проекта «ЕГЭ 100 баллов» <https://vk.com/ege100ballov> и безвозмездно распространяется для любых некоммерческих образовательных целей.

Нашли ошибку в варианте?

Напишите нам, пожалуйста, и мы обязательно её исправим!

Для замечаний и пожеланий: https://vk.com/topic-10175642_39008096
(также доступны другие варианты для скачивания)

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:

ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	7 лет репетиторской деятельности
Регалии:	Основатель проекта Школа Пифагора
Аккаунт ВК:	https://vk.com/eugene10
Сайт и доп. информация:	https://vk.com/shkolapifagora https://youtube.com/ШколаПифагора



Система оценивания Ответы к заданиям 1-19

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Верно выполненные задания 13-15 максимум оцениваются в 2 балла, задания 16-17 – в 3 балла, а задания 18-19 – в 4 балла.

№ задания	Ответ
1	140
2	3450000
3	2
4	0,74
5	20
6	102
7	3
8	14
9	0,4
10	0,79
11	10
12	0
13	а) $\pi n, \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$. б) $3\pi; \frac{17\pi}{6}; \frac{19\pi}{6}$
14	$20\sqrt{3}$
15	$\left(0; \frac{1}{81}\right) \cup \left\{\frac{1}{9}\right\} \cup (81; +\infty)$
16	392
17	20,25 млн
18	$\left[1,5; \frac{5}{3}\right)$
19	а) Могло, б) 10, в) $\frac{9}{19}$

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13

а) Решите уравнение

$$\sin 2x + \sqrt{3} \sin x = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$$\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right].$$

Решение:

а)

Синус двойного угла

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$2 \sin x \cdot \cos x + \sqrt{3} \sin x = 0$$

$$\sin x \cdot (2 \cos x + \sqrt{3}) = 0$$

$$\begin{aligned} \sin x &= 0 \\ x &= \pi n; n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \cos x + \sqrt{3} &= 0 \\ 2 \cos x &= -\sqrt{3} \end{aligned}$$



	$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$
--	--

б)

Подберём корни для $x = \pi n; n \in \mathbb{Z}$ Если $n = 2$, то $x = 2\pi \notin \left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$ Если $n = 3$, то $x = 3\pi \in \left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$ Если $n = 4$, то $x = 4\pi \notin \left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$ Подберём корни для $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$ Если $n = 0$, то $x = \frac{5\pi}{6} \notin \left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$ Если $n = 1$, то $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi = \frac{17\pi}{6} \in \left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$ Если $n = 2$, то $x = \frac{5\pi}{6} + 4\pi = \frac{29\pi}{6} \notin \left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$ Подберём корни для $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$ Если $n = 1$, то $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi = \frac{7\pi}{6} \notin \left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$ Если $n = 2$, то $x = -\frac{5\pi}{6} + 4\pi = \frac{19\pi}{6} \in \left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$ Если $n = 3$, то $x = -\frac{5\pi}{6} + 6\pi = \frac{31\pi}{6} \notin \left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$ Ответ: а) $\pi n, \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$. б) $3\pi, \frac{17\pi}{6}, \frac{19\pi}{6}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

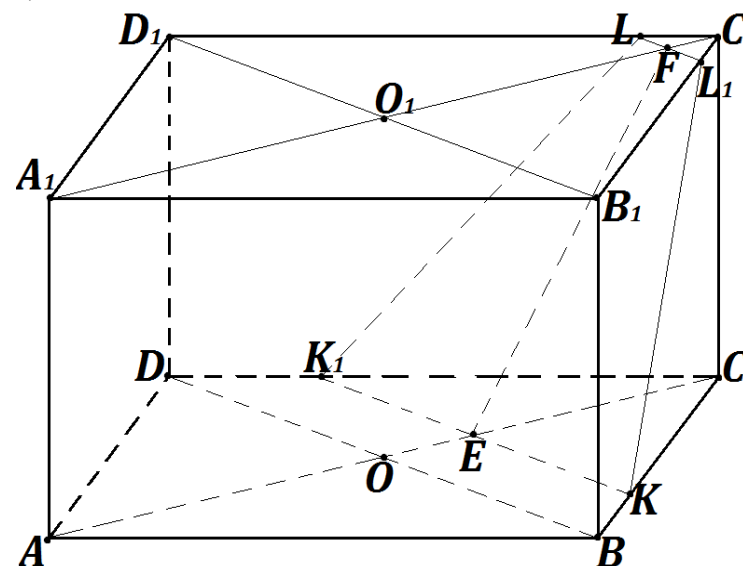
14

В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $2\sqrt{3}$. На рёбрах BC и $C_1 D_1$ отмечены точки K и L соответственно, причём $BK = C_1 L = 2$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L .

а) Докажите, что прямая $A_1 C$ перпендикулярна плоскости γ .б) Найдите объём пирамиды, вершина которой – точка A_1 , а основание – сечение данной призмы плоскостью γ .

Решение:

а)

Построим плоскость γ :Построим прямую BD Построим прямую KK_1 такую, что $KK_1 \parallel BD$ Построим прямую LL_1 такую, что $LL_1 \parallel BD$ Построим прямую LK_1 , т.к. точки L и K_1 лежат в одной плоскостиПостроим прямую KL_1 , т.к. точки K и L_1 лежат в одной плоскостиТрапеция KK_1LL_1 – сечение плоскостью γ

$$BK = 2$$

 $\Rightarrow$

$$CK = BC - BK = 6 - 2 = 4$$



$$C_1L = 2$$

$$\Rightarrow$$

$$D_1L = C_1D_1 - C_1L = 6 - 2 = 4$$

Рассмотрим прямоугольник ACC_1A_1 :

Пусть $AC \cap KK_1 = E$

Пусть $A_1C_1 \cap LL_1 = F$

Пусть $AC \cap BD = O$

Пусть $A_1C_1 \cap B_1D_1 = O_1$

$$AA_1 = 2\sqrt{3}$$

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \text{ (по теореме Пифагора)}$$

Распишем отношение высот и сходственных сторон в подобных треугольниках CKK_1 и CBD

$$\frac{CE}{OC} = \frac{CK}{BC}$$

$$\frac{CE}{CE} = \frac{4}{6}$$

$$\frac{OC}{CE} = \frac{6}{4}$$

$$\frac{OC}{CE} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow$$

$$CE = \frac{1}{3} \cdot AC = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Распишем отношение высот и сходственных сторон в подобных треугольниках C_1LL_1 и $B_1C_1D_1$

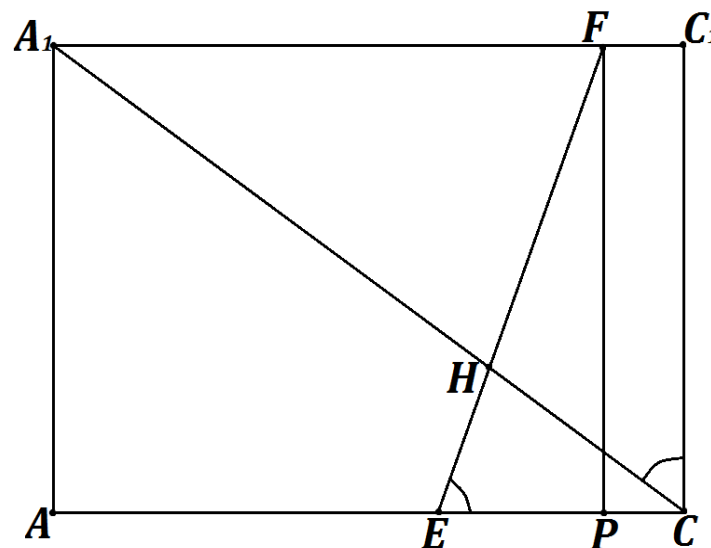
$$\frac{C_1F}{C_1O_1} = \frac{C_1L}{C_1D_1}$$

$$\frac{C_1F}{C_1O_1} = \frac{2}{6}$$

$$\frac{C_1F}{C_1O_1} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow$$

$$C_1F = \frac{1}{6} \cdot AC = \frac{1}{6} \cdot 6\sqrt{2} = \sqrt{2}$$



Пусть $A_1C \cap EF = H$

Требуется доказать, что $\angle EHC = 90^\circ$

Пусть P – основание перпендикуляра из точки F на прямую AC

$$EP = CE - CP = CE - C_1F = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg} \angle FEP = \frac{FP}{EP} = \frac{AA_1}{EP} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{6}$$

$$\operatorname{tg} \angle A_1CC_1 = \frac{A_1C_1}{CC_1} = \frac{AC}{AA_1} = \frac{6\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \angle FEP = \angle A_1CC_1$$

Пусть

$$\angle FEP = \angle A_1CC_1 = \alpha$$

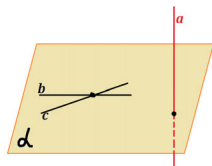
Тогда

$$\angle A_1CA = 90 - \alpha$$

$$\angle EHC = 180 - \alpha - (90 - \alpha) = 90^\circ$$

Признак перпендикулярности прямой и плоскости





Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости

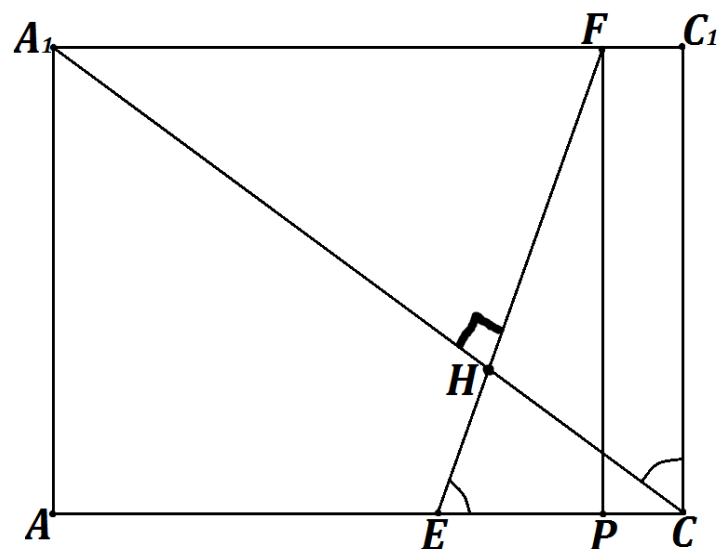
$$A_1C \perp EF$$

$A_1C \perp KK_1$ (по теореме о трёх перпендикулярах, т.к. $KK_1 \perp AC$, являющейся проекцией A_1C на плоскость ABC)

$$\Rightarrow A_1C \perp \gamma$$

■

б)



$$EF = \sqrt{EP^2 + FP^2} = \sqrt{EP^2 + AA_1^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{14} \text{ (по теореме Пифагора)}$$

$$A_1F = AC - C_1F = 6\sqrt{2} - \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

Распишем отношение сходственных сторон в подобных треугольниках

$$A_1HF \text{ и } ECH$$

$$\frac{A_1F}{CE} = \frac{HF}{EH}$$

$$\frac{5\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{HF}{EH}$$

$\Rightarrow$

$$HF = \frac{5}{7} \cdot EF = \frac{5}{7} \cdot \sqrt{14}$$

$$A_1H = \sqrt{A_1F^2 - HF^2} = \sqrt{(5\sqrt{2})^2 - \left(\frac{5}{7} \cdot \sqrt{14}\right)^2} = \sqrt{50 - \frac{50}{7}} = \sqrt{\frac{300}{7}}$$

(по теореме Пифагора)

Найдём площадь трапеции KK_1LL_1 :

$$KK_1 = \frac{2}{3} \cdot AC = \frac{2}{3} \cdot 6\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$$LL_1 = \frac{1}{3} \cdot AC = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$S_{KK_1LL_1} = \frac{KK_1 + LL_1}{2} \cdot EF = \frac{4\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{14} = 6\sqrt{7}$$

$$V_{A_1KK_1LL_1} = \frac{1}{3} \cdot S_{KK_1LL_1} \cdot A_1H = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{7} \cdot \sqrt{\frac{300}{7}} = 20\sqrt{3}$$

Ответ: $20\sqrt{3}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт а. ИЛИ Верно решён пункт б при отсутствии обоснований в пункте а	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2



15

Решите неравенство

$$\frac{\log_3(81x)}{\log_3 x - 4} + \frac{\log_3 x - 4}{\log_3(81x)} \geq \frac{24 - \log_3 x^8}{\log_3^2 x - 16}.$$

Решение:

ОДЗ:

1.

$$81x > 0$$

$$x > 0$$

2.

$$\log_3 x - 4 \neq 0$$

$$\log_3 x \neq 4$$

$$\log_3 x \neq \log_3 81$$

$$x \neq 81$$

3.

$$\log_3(81x) \neq 0$$

$$\log_3(81x) \neq \log_3 1$$

$$81x \neq 1$$

$$x \neq \frac{1}{81}$$

4.

$$\log_3^2 x - 16 \neq 0$$

$$\log_3^2 x \neq 16$$

$$\log_3 x \neq \pm 4$$

$$x \neq \frac{1}{81}$$

$$x \neq 81$$

Сложение логарифмов с одинаковыми основаниями

$$\log_a b + \log_a c = \log_a b \cdot c$$

Свойство логарифмов

$$\log_a b^m = m \cdot \log_a b$$

$$\frac{\log_3 81 + \log_3 x}{\log_3 x - 4} + \frac{\log_3 x - 4}{\log_3 81 + \log_3 x} \geq \frac{24 - 8 \log_3 x}{\log_3^2 x - 16}$$

$$\frac{4 + \log_3 x}{\log_3 x - 4} + \frac{\log_3 x - 4}{4 + \log_3 x} \geq \frac{24 - 8 \log_3 x}{\log_3^2 x - 16}$$

Пусть $\log_3 x = t$

$$\frac{t + 4}{t - 4} + \frac{t - 4}{t + 4} \geq \frac{24 - 8t}{t^2 - 16}$$

$$\frac{t^2 + 8t + 16 + t^2 - 8t + 16}{t^2 - 16} \geq \frac{24 - 8t}{t^2 - 16}$$

$$\frac{2t^2 + 32}{t^2 - 16} \geq \frac{24 - 8t}{t^2 - 16} \quad | :2$$

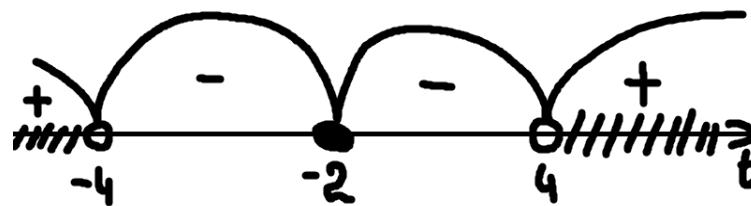
$$\frac{t^2 + 16}{t^2 - 16} \geq \frac{12 - 4t}{t^2 - 16}$$

$$\frac{t^2 + 16}{t^2 - 16} - \frac{12 - 4t}{t^2 - 16} \geq 0$$

$$\frac{t^2 + 16 - 12 + 4t}{t^2 - 16} \geq 0$$

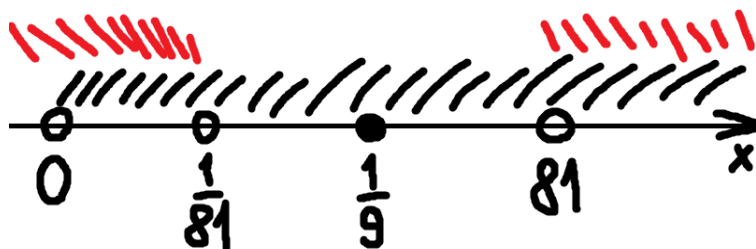
$$\frac{t^2 + 4t + 4}{t^2 - 16} \geq 0$$

$$\frac{(t + 2)^2}{t^2 - 16} \geq 0$$



$t < -4$ $\log_3 x < -4$ $\log_3 x < \log_3 \frac{1}{81}$ $x < \frac{1}{81}$	$t = -2$ $\log_3 x = -2$ $\log_3 x = \log_3 \frac{1}{9}$ $x = \frac{1}{9}$	$t > 4$ $\log_3 x > 4$ $\log_3 x > \log_3 81$ $x > 81$
---	---	---

Объединим все корни и промежутки с ОДЗ:



Ответ: $(0; \frac{1}{81}) \cup \{\frac{1}{9}\} \cup (81; +\infty)$

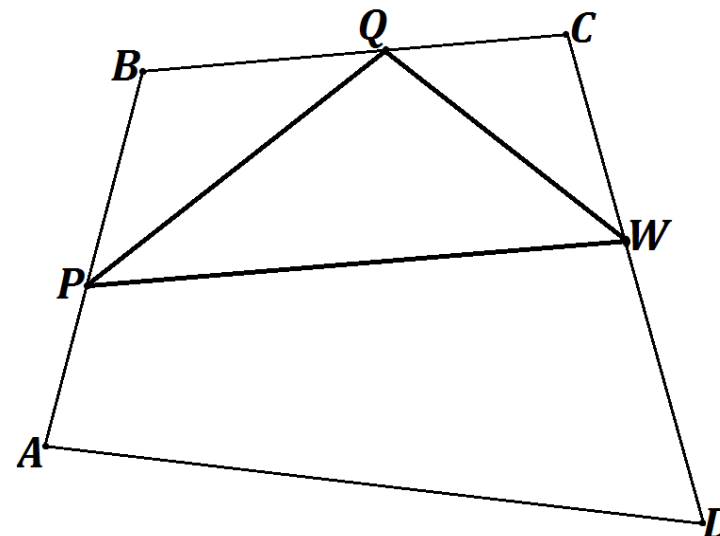
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

- 16 Точки P , Q , W делят стороны выпуклого четырёхугольника $ABCD$ в отношении $AP:PB = CQ:QB = CW:WD = 3:4$, радиус окружности, описанной около треугольника PQW , равен 10, $PQ = 16$, $QW = 12$, угол PWQ – острый.

- а) Докажите, что треугольник PQW – прямоугольный.
 б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$.

Решение:

а)



По теореме синусов из $\triangle PQW$:

$$\frac{PQ}{\sin \angle W} = 2R$$

$$\frac{16}{\sin \angle W} = 20$$

$$\sin \angle W = \frac{4}{5}$$

$$\cos \angle W = \sqrt{1 - \sin^2 \angle W} = \frac{3}{5}$$

По теореме косинусов из $\triangle PQW$:

$$PQ^2 = QW^2 + PW^2 - 2 \cdot QW \cdot PW \cdot \cos \angle W$$

$$16^2 = 12^2 + PW^2 - 2 \cdot 12 \cdot PW \cdot \frac{3}{5}$$

$$PW^2 - \frac{72}{5} \cdot PW - 112 = 0 \quad | \cdot 5$$

$$5PW^2 - 72PW - 560 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 5184 + 11200 = 16384 = 128^2$$

$$PW = \frac{72 + 128}{10} = 20$$



$$PW = \frac{72 - 128}{10} = -5,6$$

(посторонний корень)

Заметим, что в $\triangle PQW$ выполняется теорема Пифагора:

$$PW^2 = PQ^2 + QW^2$$

$$20^2 = 16^2 + 12^2$$

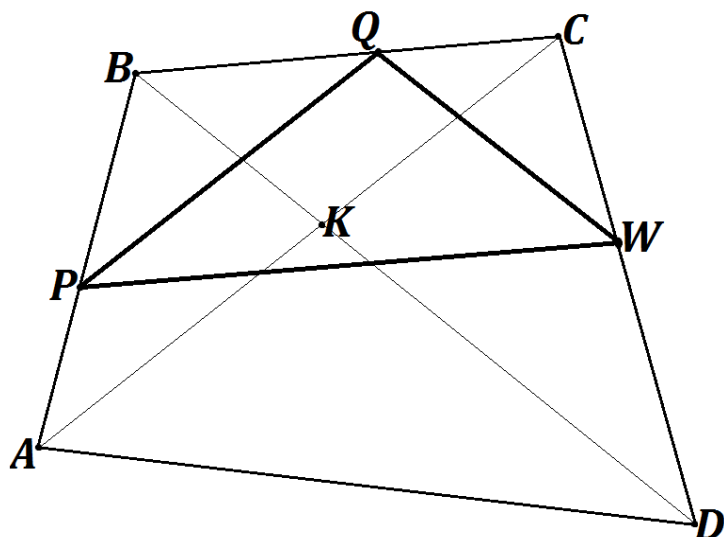
$$400 = 256 + 144$$

$$400 = 400$$

$\Rightarrow \triangle PQW$ — прямоугольный

■

б)



Построим диагонали четырёхугольника

Пусть

$$AC \cap BD = K$$

$$AP = 3a$$

$$BP = 4a$$

$$CQ = 3b$$

$$BQ = 4b$$

$$CW = 3c$$

$$DW = 4c$$

$\triangle CQW \sim \triangle BCD$ по двум пропорциональным сторонам и углу между ними

$$\frac{CQ}{BC} = \frac{QW}{BD}$$

$$\frac{3b}{7b} = \frac{12}{BD}$$

$$\frac{3}{7} = \frac{12}{BD}$$

$$BD = 28$$

$\triangle BPQ \sim \triangle ABC$ по двум пропорциональным сторонам и углу между ними

$$\frac{BP}{AB} = \frac{PQ}{AC}$$

$$\frac{4a}{7a} = \frac{16}{AC}$$

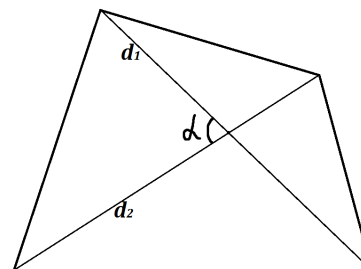
$$\frac{4}{7} = \frac{16}{AC}$$

$$AC = 28$$

$$\angle AKD = \angle PQW = 90^\circ$$

(т.к. это соответственные углы при параллельных прямых)

Площадь произвольного четырёхугольника



$$S = \frac{d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \alpha}{2}$$

$$S = \frac{AC \cdot BD \cdot \sin 90^\circ}{2} = \frac{28 \cdot 28}{2} = 392$$



Ответ: 392

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i>	3
Получен обоснованный ответ в пункте <i>b</i> ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> и при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , ИЛИ При обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> с использованием утверждения пункта <i>a</i> , при этом пункт <i>a</i> не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 9 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наименьший годовой платёж составит 1,25 млн рублей?

Решение:

Пусть n – срок кредита

Составим таблицу:

Год	Долг на начало года	Основной платёж	Дополнительный платёж
1	9	$\frac{9}{n}$	$\frac{25}{100} \cdot 9 = 2,25$
...			
n	$\frac{9}{n}$	$\frac{9}{n}$	$\frac{25}{100} \cdot \frac{9}{n} = \frac{2,25}{n}$

Очевидно, что наименьший годовой платёж будет в последнем году (потому что платежи равномерно уменьшаются в течение n лет)

$\Rightarrow$

Наименьший годовой платёж = 1,25 млн

$$\frac{9}{n} + \frac{2,25}{n} = 1,25$$

$$\frac{11,25}{n} = 1,25$$

$$n = 9$$

$\Rightarrow$

В таблице все значения становятся известными:

Год	Долг на начало года	Основной платёж	Дополнительный платёж
1	9	$\frac{9}{9} = 1$	2,25
...			
9	1	1	$\frac{2,25}{9} = 0,25$

Общая сумма выплат (ОСВ) – это все основные платежи и все дополнительные платежи (сумму всех дополнительных платежей найдём с помощью формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии)



Сумма первых n членов арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$OCB = 9 \cdot 1 + \frac{2,25 + 0,25}{2} \cdot 9$$

$$OCB = 9 + 1,25 \cdot 9 = 20,25$$

Ответ: 20,25 млн

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{1-2x} = a - 3|x|$$

имеет более двух корней.

Решение:

ОДЗ:

$$1 - 2x \geq 0$$

$$x \leq 0,5$$

$$\sqrt{1-2x} + 3|x| = a$$

Решим графически:

$$\text{Пусть } f(x) = \sqrt{1-2x} + 3|x|$$

1 случай раскрытия модуля

Если $0 \leq x \leq 0,5$, то

$$f(x) = \sqrt{1-2x} + 3x$$

Исследуем $f(x)$ на возрастание/убывание

$$f'(x) = \frac{-2}{2\sqrt{1-2x}} + 3 = \frac{-1}{\sqrt{1-2x}} + 3 = \frac{3\sqrt{1-2x} - 1}{\sqrt{1-2x}}$$

$$\frac{3\sqrt{1-2x} - 1}{\sqrt{1-2x}} = 0$$

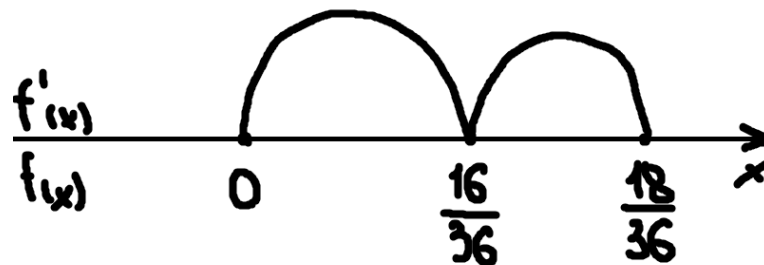
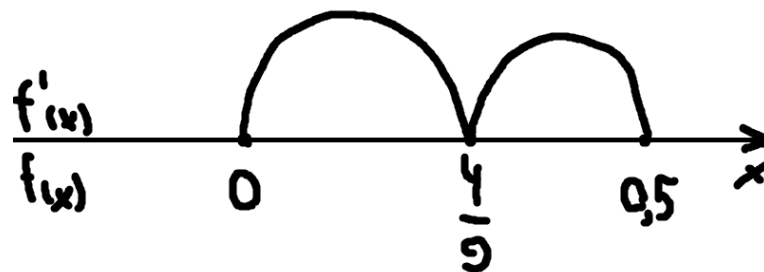
$$3\sqrt{1-2x} - 1 = 0$$

$$\sqrt{1-2x} = \frac{1}{3}$$

$$1 - 2x = \frac{1}{9}$$

$$\frac{8}{9} = 2x$$

$$x = \frac{4}{9}$$

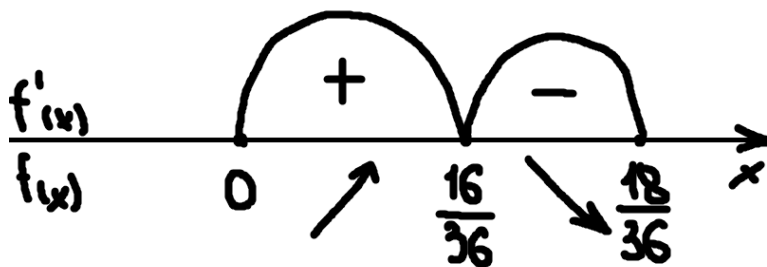


Подставим $x = \frac{17}{36}$ в производную, чтобы определить знак на интервале

$$f'(x) = \frac{3\sqrt{1-2x}-1}{\sqrt{1-2x}}$$

$$f'\left(\frac{17}{36}\right) = \frac{3\sqrt{1-2 \cdot \frac{17}{36}}-1}{\sqrt{1-2 \cdot \frac{17}{36}}} = \frac{3\sqrt{\frac{1}{18}}-1}{\sqrt{\frac{1}{18}}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}}-1}{\sqrt{\frac{1}{18}}} < 0$$

=>



2 случай раскрытия модуля

Если $x < 0$, то

$$f(x) = \sqrt{1-2x} - 3x$$

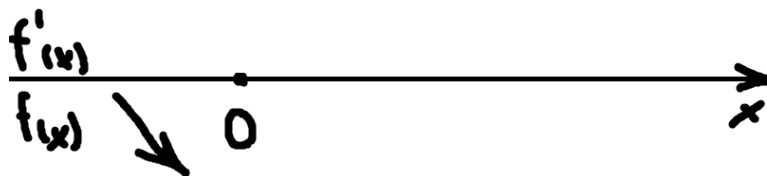
$\sqrt{1-2x}$ — убывающая функция

$-3x$ — убывающая функция

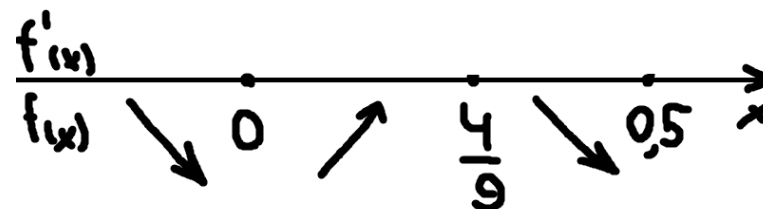
(т.к. при увеличении значения x , значение y становится всё меньше)

=>

$f(x) = \sqrt{1-2x} - 3x$ убывает при $x < 0$



Склеим данные о монотонности $f(x)$ на одной числовой прямой:



Найдём значения в данных трёх точках:

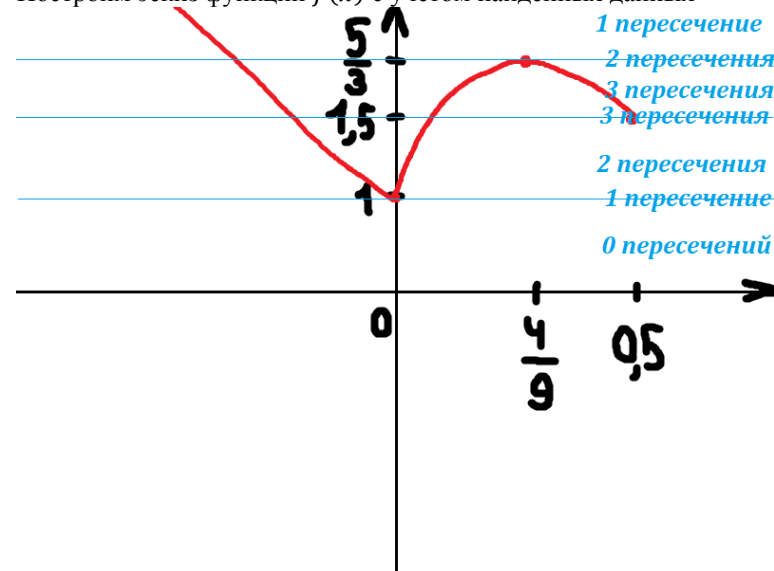
$$f(x) = \sqrt{1-2x} + 3|x|$$

$$f(0) = \sqrt{1-2 \cdot 0} + 3|0| = 1$$

$$f\left(\frac{4}{9}\right) = \sqrt{1-2 \cdot \frac{4}{9}} + 3\left|\frac{4}{9}\right| = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{1-2 \cdot \frac{1}{2}} + 3\left|\frac{1}{2}\right| = 1,5$$

Построим эскиз функции $f(x)$ с учётом найденных данных



Графически определим сколько решений имеет уравнение $\sqrt{1-2x} + 3|x| = a$



Если

$$a > \frac{5}{3} \text{ (1 решение)}$$

$$a = \frac{5}{3} \text{ (2 решения)}$$

$$1,5 < a < \frac{5}{3} \text{ (3 решения)}$$

$$a = 1,5 \text{ (3 решения)}$$

$$1 < a < 1,5 \text{ (2 решения)}$$

$$a = 1 \text{ (1 решение)}$$

$$a < 1 \text{ (0 решений)}$$

$$\text{Ответ: } a \in \left[1,5; \frac{5}{3}\right)$$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

19 Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{4}{13}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 10 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов а и б?

Решение:

В театре число мальчиков $\leq \frac{4}{13}$ числа посетивших театр

В кино число мальчиков $\leq \frac{2}{5}$ числа посетивших кино

а)

Доля мальчиков в театре будет тем меньше, чем меньше будет мальчиков в театре и чем больше будет девочек в театре

Аналогично с кино

Доля мальчиков в кино будет тем меньше, чем меньше будет мальчиков в кино и чем больше будет девочек в кино

В группе 20 учащихся: 10 мальчиков и 10 девочек

Пусть

все мальчики ходили только в кино или только в театр, а все девочки ходили сразу и в кино, и в театр за 1 день

Начинаем подбор:

1

Пусть

5 мальчиков были только в театре

5 мальчиков были только в кино

Тогда

Всего в театре было $5m + 10d$

=>

$$\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

(Доля мальчиков в театре)

Проверим, подходит ли под условие:

1

$$\frac{1}{3} \leq \frac{4}{13}$$

$$\frac{13}{39} \leq \frac{12}{39}$$

=>

Противоречие

=>

Такой вариант нам не подходит, уменьшим число мальчиков в театре

2



Пусть
 4 мальчика были только в театре
 6 мальчиков были только в кино
 Тогда
 Всего в театре было $4m + 10d$
 $\Rightarrow$
 $\frac{4}{14} = \frac{2}{7}$
 (Доля мальчиков в театре)

Проверим, подходит ли под условие:

$$\frac{2}{7} \leq \frac{4}{13}$$

$$\frac{26}{91} \leq \frac{28}{91}$$

$$\Rightarrow$$

Подходит
 $\Rightarrow$

Проверим, подходит ли под другое условие:

Всего в кино было $6m + 10d$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

(Доля мальчиков в кино)

$$\frac{3}{8} \leq \frac{2}{5}$$

$$\frac{15}{40} \leq \frac{16}{40}$$

$$\Rightarrow$$

Подходит
 $\Rightarrow$

Могло

б)
 В предыдущем пункте было доказано, что мальчиков могло быть 10, предположим, что их было 11:

Если мальчиков 11, то девочек 9

Аналогично предыдущему пункту:

Доля мальчиков в театре будет тем меньше, чем меньше будет мальчиков в театре и чем больше будет девочек в театре

Аналогично с кино

Доля мальчиков в кино будет тем меньше, чем меньше будет мальчиков в кино и чем больше будет девочек в кино

Пусть
 все мальчики ходили только в кино или только в театр, а
 все девочки ходили сразу и в кино, и в театр за 1 день

Начинаем подбор:

1
 Пусть
 5 мальчиков были только в театре
 6 мальчиков были только в кино
 Тогда
 Всего в театре было $5m + 9d$
 $\Rightarrow$
 $\frac{5}{14}$
 (Доля мальчиков в театре)

Проверим, подходит ли под условие:

$$\frac{5}{14} \leq \frac{4}{13}$$

$$\frac{65}{182} \leq \frac{56}{182}$$

$$\Rightarrow$$

Противоречие
 $\Rightarrow$

Такой вариант нам не подходит, уменьшим число мальчиков в театре

2
 Пусть
 4 мальчика были только в театре
 7 мальчиков были только в кино
 Тогда
 Всего в театре было $4m + 9d$
 $\Rightarrow$
 $\frac{4}{13}$
 (Доля мальчиков в театре)

Проверим, подходит ли под условие:

$$\frac{4}{13} \leq \frac{4}{13}$$



=>

Подходит

=>

мальчиков в театре должно быть 0, 1, 2, 3 или 4

Проверим, подходит ли под другое условие:

Всего в кино было 7 м + 9 д

=>

$$\frac{7}{16} \leq \frac{2}{5}$$

(Доля мальчиков в кино)

$$\frac{16}{35} \leq \frac{5}{32}$$

$$\frac{80}{80} \leq \frac{32}{80}$$

=>

Противоречие

=>

Такой вариант нам не подходит, уменьшим число мальчиков в кино

Всего в кино было 6 м + 9 д

=>

$$\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

(Доля мальчиков в кино)

$$\frac{2}{5} \leq \frac{2}{5}$$

=>

мальчиков в кино должно быть 0, 1, 2, 3, 4, 5 или 6

Итак,

мальчиков в театре должно быть 0, 1, 2, 3 или 4

мальчиков в кино должно быть 0, 1, 2, 3, 4, 5 или 6

=>

даже если в театре было 4 мальчика и в кино 6, то одиннадцатый мальчик не был ни в театре, ни в кино, что противоречит условию

=>

11 мальчиков в группе из 20 учащихся быть не могло

=>

10 – наибольшее количество мальчиков в группе из 20 учащихся

в)

Из предыдущего пункта следует, что наибольшее количество мальчиков в группе (а, следовательно, наименьшая доля девочек) достигается, если все мальчики ходили или в кино, или в театр, а все девочки ходили и в кино, и в театр за 1 день.

Пусть

 m_T – число мальчиков в театре m_K – число мальчиков в кино d – число девочек в театре или кино

Требуется найти наименьшее значение дроби:

$$\frac{m_T + m_K + d}{d}$$

Преобразуем дробь:

$$\frac{m_T + m_K + d}{d} = \frac{1}{\frac{m_T + m_K + d}{d}} = \frac{1}{\frac{m_T + m_K}{d} + 1}$$

Попробуем как-то оценить значение дроби:

$$\frac{m_T + m_K}{d}$$

1

По условию имеем:

В театре число мальчиков $\leq \frac{4}{13}$ числа посетивших театр

$$\frac{m_T}{m_T + d} \leq \frac{4}{13}$$

$$13m_T \leq 4 \cdot (m_T + d)$$

$$4 \cdot (m_T + d) \geq 13m_T \quad | :4$$

$$m_T + d \geq \frac{13m_T}{4} \quad | :m_T$$

$$\frac{m_T + d}{m_T} \geq \frac{13}{4}$$

$$\frac{m_T + d}{m_T} \geq \frac{13}{4}$$

$$1 + \frac{d}{m_T} \geq \frac{13}{4}$$

$$\frac{d}{m_T} \geq \frac{9}{4}$$

$$4d \geq 9m_T$$

$$9m_T \leq 4d \quad | :9$$



$$\begin{aligned} m_T &\leq \frac{4d}{9} & | : d \\ \frac{m_T}{d} &\leq \frac{4}{9} \end{aligned}$$

По условию имеем:

В кино число мальчиков $\leq \frac{2}{5}$ числа посетивших кино

$$\begin{aligned} \frac{m_K}{m_K + d} &\leq \frac{2}{5} \\ 5m_K &\leq 2 \cdot (m_K + d) \\ 2 \cdot (m_K + d) &\geq 5m_K & | : 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_K + d &\geq \frac{5m_K}{2} & | : m_K \\ \frac{m_K + d}{m_K} &\geq \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$\frac{m_K}{m_K} + \frac{d}{m_K} \geq \frac{5}{2}$$

$$1 + \frac{d}{m_K} \geq \frac{5}{2}$$

$$\frac{d}{m_K} \geq \frac{3}{2}$$

$$2d \geq 3m_K$$

$$3m_K \leq 2d & | : 3$$

$$m_K \leq \frac{2d}{3} & | : d$$

$$\frac{m_K}{d} \leq \frac{2}{3}$$

3

$$\frac{m_T}{d} \leq \frac{4}{9}$$

$$\frac{m_K}{d} \leq \frac{2}{3}$$

=>

$$\frac{m_T}{d} + \frac{m_K}{d} \leq \frac{4}{9} + \frac{2}{3}$$

$$\frac{m_T + m_K}{d} \leq \frac{10}{9}$$

4

Мы искали наименьшее значение дроби:

$$\frac{1}{\frac{m_T + m_K}{d} + 1}$$

Чем больше знаменатель – тем меньше значение дроби

=>

Подставляем под $\frac{m_T + m_K}{d}$ наибольшее возможное значение, т.е. $\frac{10}{9}$

$$\frac{1}{\frac{10}{9} + 1} = 1 : \frac{19}{9} = \frac{9}{19}$$

Ответ: а) Могло, б) 10, в) $\frac{9}{19}$

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: - обоснованное решение п. а; - обоснованное решение п. б; - искомая оценка в п. в; - пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

