Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания с кратким ответом повышенного уровня сложности и 7 заданий с развернутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8. 10 -0,8 Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 В среднем за день во время конференции расходуется 90 пакетиков чая. Конференция длится 4 дня. В пачке чая 100 пакетиков. Какого наименьшего количества пачек чая хватит на все дни конференции?

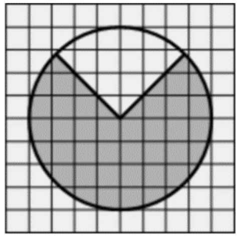
Ответ: ____________________.

2 На рисунке жирными точками показан курс доллара, установленный Центробанком РФ, во все рабочие дни с 22 сентября по 22 октября 2010 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – курс доллара в рублях. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наибольший курс доллара за указанный период. Ответ дайте в рублях.

Ответ: ____________________.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 181015

3 Площадь круга, изображённого на клетчатой бумаге, равна 12. Найдите площадь заштрихованного кругового сектора.



Ответ: ___________________________.

4 На конференцию приехали 2 учёных из Дании, 7 из Польши и 3 из Венгрии. Каждый из них делает на конференции один доклад. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что четвёртым окажется доклад учёного из Венгрии.

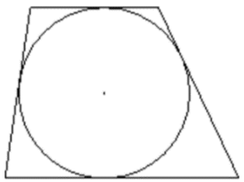
Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{5x-6} = 81.$$

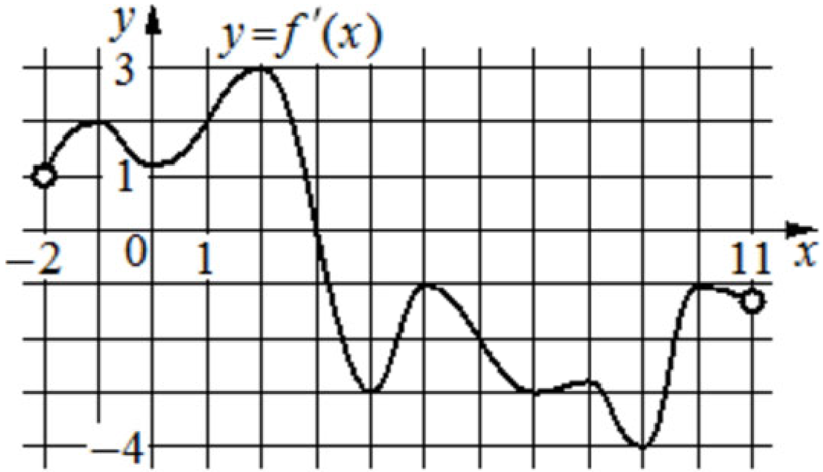
Ответ: ___________________________.

6 Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 15 и 22. Найдите среднюю линию трапеции.



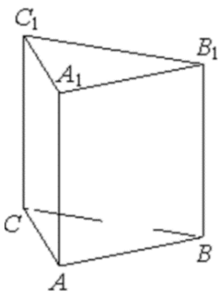
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график $y = f`(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 11)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.



Ответ: ___________________________.

8 Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины A, C, A_1, B_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$. Площадь основания призмы равна 9, а боковое ребро равно 4.



Ответ: ___________________________.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 181015

9 Найдите значение выражения

$\sqrt{108}\cos^2\frac{\pi}{12}-\sqrt{27}.$

Ответ: ____________________________.

10 Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Максимальная высота полёта мячика H (в м) вычисляется по формуле $H=\frac{{v_0}^2}{4g}(1-\cos\alpha)$, где $v_0=26$ м/с – начальная скорость мячика, а g – ускорение свободного падения (считайте $g=10$ м/с^2). При каком наименьшем значении угла α мячик пролетит над стеной высотой 7,45 м на расстоянии 1 м? Ответ дайте в градусах.

Ответ: ____________________________.

11 Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 132 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 1 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 1 час. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из А в В. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ____________________________.

12 Найдите точку максимума функции

$y=(2x-1)\cos x-2\sin x+5$ принадлежащую промежутку $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Ответ: ____________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$\log_5(5x^4+30)=1+\log_{\sqrt5}\sqrt{5x^2+2}.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5}{3};\frac{38}{13}\right]$.

14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 60, а боковое ребро SA равно 37. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C.
б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости α.

15 Решите неравенство

$\log_{16}(x+5)+\log_{(x^2+10x+25)}2\geq\frac{3}{4}.$

16 Прямая, проходящая через вершину B прямоугольника $ABCD$ перпендикулярно диагонали AC, пересекает сторону AD в точке M, равноудалённой от вершин B и D.

а) Докажите, что $\angle ABM=\angle DBC=30°$.
б) Найдите расстояние от центра прямоугольника до прямой CM, если $BC=9$.

17 В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S — **целое** число. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 30% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}6S$	$0{,}25S$	0

Найдите наибольшее значение S, при котором каждая из выплат будет меньше 5 млн рублей.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство
$|x^2 - 4x + a - 5| \leq 10$
выполняется для всех $x \in [a-5; a]$.

19 Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 4, 6, 8.
б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 20, 22?
в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 9, 10, 11, 19, 20, 21, 22, 30, 31, 32, 33, 41, 42, 43, 52.

О проекте «Пробный ЕГЭ каждую неделю»
Данный ким составлен командой всероссийского волонтёрского проекта «ЕГЭ 100 баллов» https://vk.com/ege100ballov и безвозмездно распространяется для любых некоммерческих образовательных целей.

Нашли ошибку в варианте?
Напишите нам, пожалуйста, и мы обязательно её исправим!
Для замечаний и пожеланий: https://vk.com/topic-10175642_39008096
(также доступны другие варианты для скачивания)

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 181015

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:

ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	7 лет репетиторской деятельности
Регалии:	Основатель проекта Школа Пифагора
Аккаунт ВК:	https://vk.com/eugene10
Сайт и доп. информация:	https://vk.com/shkolapifagora https://youtube.com/ШколаПифагора

Система оценивания
Ответы к заданиям 1-19

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Верно выполненные задания 13-15 максимум оцениваются в 2 балла, задания 16-17 – в 3 балла, а задания 18-19 – в 4 балла.

№ задания	Ответ
1	4
2	31,1
3	9
4	0,25
5	0,4
6	18,5
7	3
8	12
9	4,5
10	60
11	11
12	0,5
13	а) $\pm2; \pm1.$ б) $-1; 1; 2$
14	$5\sqrt{3}$
15	$(-4;-3]\cup[-1;+\infty)$
16	$\frac{3\sqrt{21}}{14}$
17	7 млн
18	$\left[3;\frac{3+\sqrt{69}}{2}\right]$
19	а) 2, 2, 2, 2 или 2, 2, 4, б) Нет, в) 9, 10, 11, 22 или 9, 10, 11, 11, 11

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 а) Решите уравнение

$\log_5(5x^4+30)=1+\log_{\sqrt{5}}\sqrt{5x^2+2}.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5}{3};\frac{38}{13}\right].$

Решение:

а)

$\log_5(5x^4+30)=1+\log_{5^{\frac{1}{2}}}(5x^2+2)^{\frac{1}{2}}$

Свойство логарифмов

$\log_a b^m = m\cdot\log_a b$

Свойство логарифмов

$\log_{a^n} b = \frac{1}{n}\cdot\log_a b$

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 181015

$\log_5(5x^4+30) = 1 + \log_5(5x^2+2)$

$\log_5(5x^4+30) = \log_5 5 + \log_5(5x^2+2)$

Сложение логарифмов с одинаковыми основаниями

$\log_a b + \log_a c = \log_a b \cdot c$

$\log_5(5x^4+30) = \log_5 5\cdot(5x^2+2)$

$5x^4+30 = 25x^2+10$

$5x^4-25x^2+20=0 \quad |:5$

$x^4-5x^2+4=0$

Пусть $x^2=t$

$t^2-5t+4=0$

$D=b^2-4ac=25-16=9=3^2$

$t_1=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{5+3}{2}=4$

$t_2=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{5-3}{2}=1$

$x^2=4$ $x=\pm2$	$x^2=1$ $x=\pm1$

б)

$-2=-\dfrac{6}{3}$

$-1=-\dfrac{3}{3}$

$1=\dfrac{13}{13}$

$2=\dfrac{26}{13}$

=>

$-2\notin\left[-\dfrac{5}{3};\dfrac{38}{13}\right]$

$-1\in\left[-\dfrac{5}{3};\dfrac{38}{13}\right]$

$1\in\left[-\dfrac{5}{3};\dfrac{38}{13}\right]$

$2\in\left[-\dfrac{5}{3};\dfrac{38}{13}\right]$

Ответ: а) ±2; ±1. б) -1; 1; 2

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б* ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

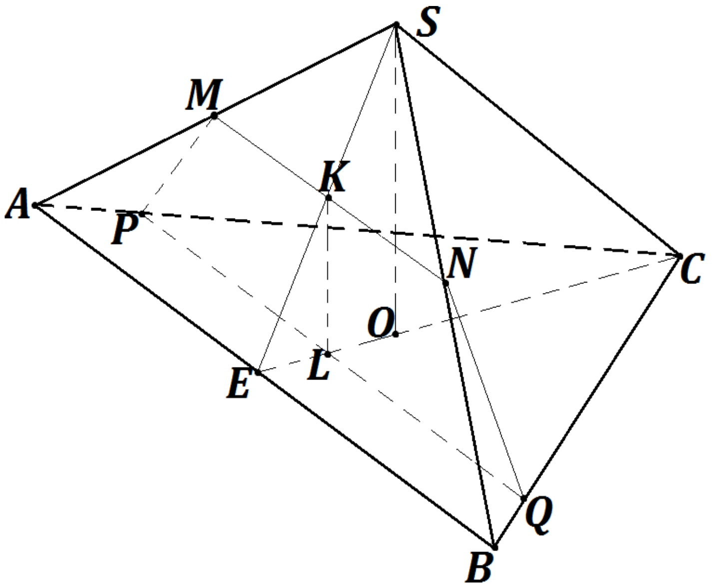
14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 60, а боковое ребро SA равно 37. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C.

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости α.

Решение:

а)



Пусть O — центр основания пирамиды
Рассмотрим $\triangle ABS$ — равнобедренный:
Проведём медиану SE, являющуюся ещё и биссектрисой и высотой
Пусть $(SEC) \cap MN = K$
Построим прямую KL такую, что $KL \parallel SO$
Построим прямую PQ через точку L такую, что $PQ \parallel AB$
Построим прямую NQ, т.к. точки N и Q лежат в одной плоскости
Построим прямую PM, т.к. точки P и M лежат в одной плоскости
$MNQP$ — сечение пирамиды плоскостью α

Рассмотрим $\triangle SOE$ — прямоугольный:
Т.к. K — середина SE и $KL \parallel SO$, то KL — средняя линия $\triangle SOE$
$=> L$ — середина OE
Пусть $EL = OL = x$
Т.к. CE — медиана в $\triangle ABC$, то:
$$\frac{OC}{OE} = 2:1$$
$$=> OC = 2 \cdot OE = 2 \cdot (EL + OL) = 2 \cdot (x + x) = 4x$$

$$=> \frac{CL}{LE} = \frac{OC + OL}{LE} = \frac{4x + x}{x} = 5:1$$
■

б)
Расстояние от точки A до плоскости α равно расстоянию от точки E до плоскости α, потому что A и E лежат на одной прямой
Итак, EL — искомое расстояние

$$CE = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 60 = 30\sqrt{3}$$
$$EL = \frac{1}{6} \cdot CE = \frac{1}{6} \cdot 30\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

Ответ: б) $5\sqrt{3}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство

$$\log_{16}(x+5) + \log_{(x^2+10x+25)} 2 \geq \frac{3}{4}.$$

Решение:

ОДЗ:
1.
$x + 5 > 0$
$x > -5$
2.
$x^2 + 10x + 25 > 0$
$(x+5)^2 > 0$
$x \neq -5$
3.
$x^2 + 10x + 25 \neq 1$
$x^2 + 10x + 24 \neq 0$

$D = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 24 = 4$

$x_1 = \dfrac{-10+2}{2} \neq -4$

$x_2 = \dfrac{-10-2}{2} \neq -6$

$\log_{2^4}(x+5) + \log_{(x+5)^2} 2 \geq \dfrac{3}{4}$

Свойство логарифмов

$\log_a b^m = m \cdot \log_a b$

Свойство логарифмов

$\log_{a^n} b = \dfrac{1}{n} \cdot \log_a b$

$\dfrac{1}{4} \cdot \log_2(x+5) + \dfrac{1}{2} \cdot \log_{(x+5)} 2 \geq \dfrac{3}{4}$

Свойство логарифмов

$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

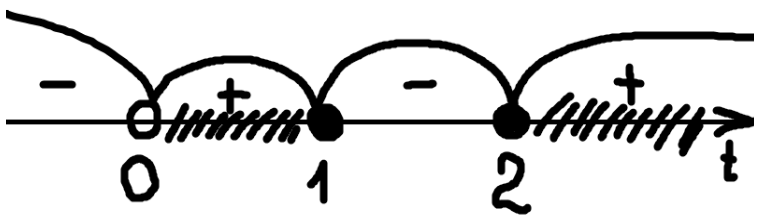
$\dfrac{1}{4} \cdot \log_2(x+5) + \dfrac{1}{2\log_2(x+5)} \geq \dfrac{3}{4}$

Пусть $\log_2(x+5) = t$

$\dfrac{t}{4} + \dfrac{1}{2t} - \dfrac{3}{4} \geq 0$

$\dfrac{t^2 - 3t + 2}{4t} \geq 0$

$t^2 - 3t + 2 = 0$ $D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1$ $t_1 = \dfrac{3+1}{2} = 2$ $t_2 = \dfrac{3-1}{2} = 1$	$4t \neq 0$ $t \neq 0$



$0 < t \leq 1$ $0 < \log_2(x+5) \leq 1$ $\log_2 1 < \log_2(x+5) \leq \log_2 2$ $1 < x+5 \leq 2$ $-4 < x \leq -3$	$t \geq 2$ $\log_2(x+5) \geq 2$ $\log_2(x+5) \geq \log_2 4$ $x+5 \geq 4$ $x \geq -1$

Ответ: $(-4; -3] \cup [-1; +\infty)$

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

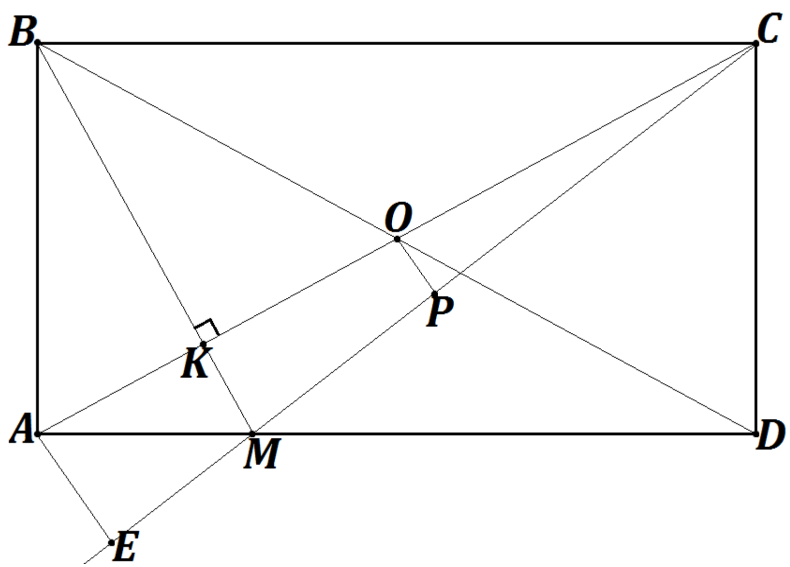
16 Прямая, проходящая через вершину B прямоугольника $ABCD$ перпендикулярно диагонали AC, пересекает сторону AD в точке M, равноудалённой от вершин B и D.

а) Докажите, что $\angle ABM = \angle DBC = 30°$.

б) Найдите расстояние от центра прямоугольника до прямой CM, если $BC = 9$.

Решение:

а)



$BM = DM$

$\angle DBC = \angle MDB$
(т.к. это накрест лежащие углы при параллельных прямых)
$\angle MBD = \angle MDB$
(т.к. $\triangle\, MBD$ – равнобедренный)

Пусть
$\angle DBC = \alpha = \angle MDB = \angle MBD$
$AC \cap BD = O$

$\angle OAD = \angle ADO = \alpha$
(т.к. $\triangle\, AOD$ – равнобедренный по свойству прямоугольника)

$\angle BAC = \angle BAD - \angle OAD = 90 - \alpha$

Пусть
$BM \cap AC = K$
$\angle AKB = 90°$
$\angle ABK = 180 - \angle AKB - \angle BAC = 180 - 90 - (90 - \alpha) = \alpha$
(по теореме о сумме углов треугольника)
=>
$\angle ABC = 90°$
$\angle DBC = \alpha$
$\angle MBD = \alpha$
$\angle ABM = \alpha$
=>
$\angle ABM = \angle DBC = \angle MBD = 90 : 3 = 30°$
■

б)
Пусть
P – основание перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую CM
OP–?

Пусть
AE – высота в $\triangle\, ACM$

$AE \perp CM$
$OP \perp CM$
=>
$AE \parallel OP$
O – середина AC
(т.к. диагонали прямоугольника точкой пересечения делятся пополам)
=>
OP – средняя линия $\triangle\, ACE$
=>
$OP = \frac{1}{2} \cdot AE$

Найдём AE как высоту в $\triangle\, ACM$ через формулы площади этого треугольника
$\frac{1}{2} \cdot CM \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AM \cdot \sin \angle CAM$

Найдём как можно больше элементов равенства:
Из $\triangle\, BCD$:
$\operatorname{tg} \angle CBD = \frac{CD}{BC}$
$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{CD}{9}$
$CD = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$

$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{9^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$ (по теореме Пифагора)

Из $\triangle ABM$:

$\operatorname{tg}\angle ABM = \dfrac{AM}{AB}$

$\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{AM}{3\sqrt{3}}$

$AM = 3$

$DM = BC - AM = 9 - 3 = 6$

$CM = \sqrt{CD^2 + DM^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 6^2} = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$ (по теореме Пифагора)

$\angle CAM = \alpha$

$\sin\angle CAM = \sin 30° = \dfrac{1}{2}$

Подставляем полученные значения:

$\dfrac{1}{2}\cdot 3\sqrt{7}\cdot AE = \dfrac{1}{2}\cdot 6\sqrt{3}\cdot 3\cdot\dfrac{1}{2}$

$3\sqrt{7}\cdot AE = 9\sqrt{3}$

$AE = \dfrac{9\sqrt{3}}{3\sqrt{7}} = \dfrac{3\sqrt{21}}{7}$

=>

$OP = \dfrac{1}{2}\cdot AE = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3\sqrt{21}}{7} = \dfrac{3\sqrt{21}}{14}$

Ответ: $\frac{3\sqrt{21}}{14}$

Содержание критерия	**Баллы**
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S – **целое** число. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 30% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}6S$	$0{,}25S$	0

Найдите наибольшее значение S, при котором каждая из выплат будет меньше 5 млн рублей.

Решение:

Пусть
1 января – день начисления процентов
1 апреля – день выплаты части долга

Составим таблицу как изменялась сумма долга:

Число	Сумма долга
01.07.2016	S

2017 год

01.01.2017	$\left(1+\frac{30}{100}\right)\cdot S = 1{,}3\cdot S$
01.04.2017	
01.07.2017	$0{,}6\cdot S$

=>

01.04.2017	$1{,}3\cdot S - 0{,}6\cdot S = 0{,}7\cdot S$

2018 год

01.01.2018	$1{,}3\cdot 0{,}6\cdot S = 0{,}78\cdot S$
01.04.2018	
01.07.2018	$0{,}25\cdot S$

=>

01.04.2018	$0{,}78\cdot S - 0{,}25\cdot S = 0{,}53\cdot S$

2019 год

01.01.2019	$1{,}3\cdot 0{,}25\cdot S = 0{,}325\cdot S$
01.04.2019	
01.07.2019	0

=>

01.04.2019	$0{,}325\cdot S - 0 = 0{,}325\cdot S$

По условию, каждая из выплат должна быть меньше 5 млн рублей, получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} 0{,}7\cdot S < 5 \\ 0{,}53\cdot S < 5 \\ 0{,}325\cdot S < 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S < \frac{50}{7} \\ S < \frac{500}{53} \\ S < \frac{5000}{325} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S < \frac{50}{7} \\ S < \frac{500}{53} \\ S < \frac{200}{13} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S < 7\frac{1}{7} \\ S < 9\frac{23}{53} \\ S < 15\frac{5}{13} \end{cases}$$

Требуется найти наибольшее подходящее целое S

=>

$S = 7$

Ответ: 7 млн

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство
$|x^2 - 4x + a - 5| \le 10$
выполняется для всех $x \in [a-5; a]$.

Решение:

Рассмотрим функцию
$f(x) = x^2 - 4x + a - 5$
$f(x)$ — парабола, ветви которой направлены вверх
$x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{4}{2} = 2$

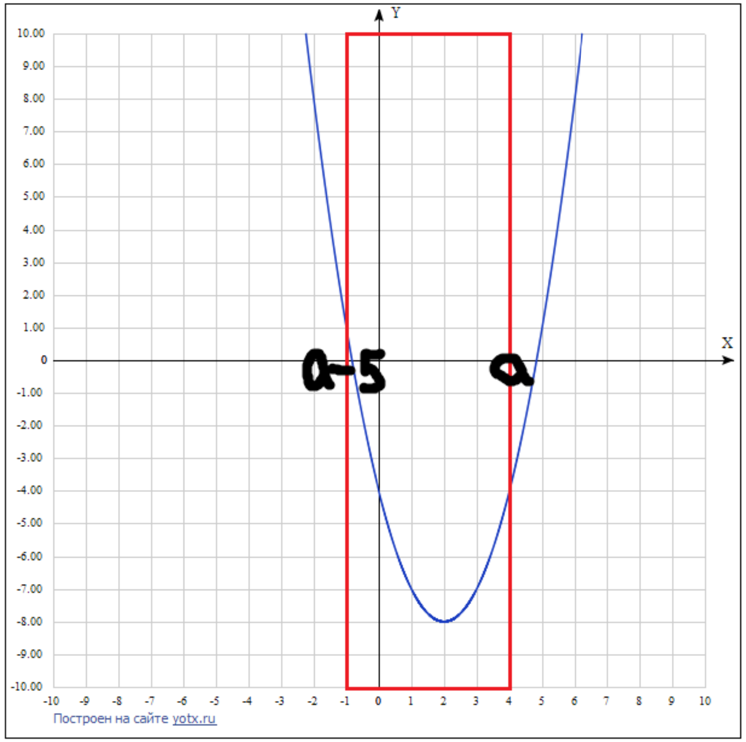
При $x > 2$ парабола возрастает
При $x < 2$ парабола убывает

$x \in [a-5; a]$
=>
длина рассматриваемого отрезка по оси Ox равна 5

$-10 \le x^2 - 4x + a - 5 \le 10$
=>
размах области значений параболы на отрезке $[a-5; a]$ равен 20

Если x_0 лежит вне отрезка $[a-5; a]$, то приращение параболы на отрезке длиной 5 будет 25 или больше
=>
при таком варианте график не поместится в заданный размах области значений
=>
$x_0 \in [a-5; a]$

Один из вариантов как выглядит график:



Очевидно, что наибольшее значение функции достигается в одной из границ отрезка, а наименьшее значение функции достигается в вершине параболы

Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} x_0 \in [a-5; a] \\ f(a-5) \le 10 \\ f(a) \le 10 \\ y_0 \ge -10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-5 < 2 < a \\ f(a-5) \le 10 \\ f(a) \le 10 \\ f(2) \ge -10 \end{cases}$$

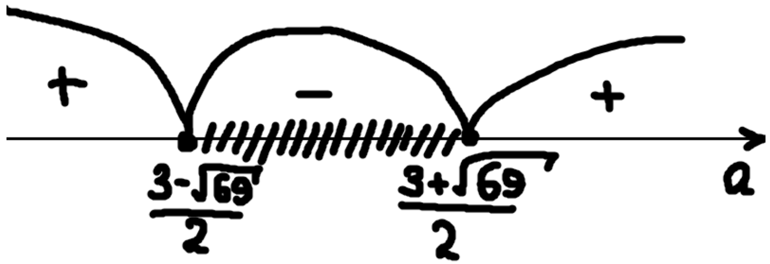
$$\begin{cases} -5 < 2 - a < 0 \\ (a-5)^2 - 4(a-5) + a - 5 \le 10 \\ a^2 - 4a + a - 5 \le 10 \\ -4 + a - 5 \ge -10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 < a < 7 \\ (a-5)^2 - 3(a-5) \le 10 \\ a^2 - 3a - 15 \le 0 \\ a \ge -1 \end{cases}$$

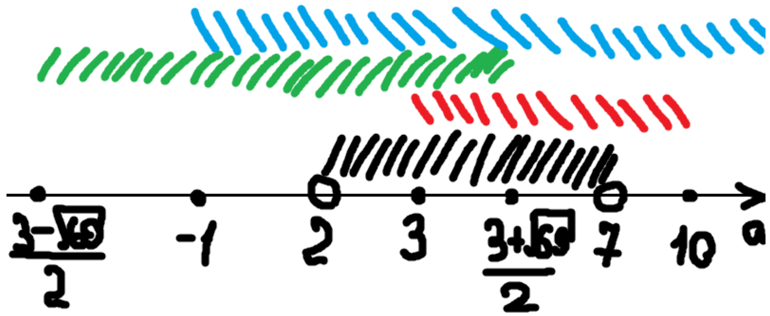
$(a-5)^2 - 3(a-5) \le 10$
$(a-5)^2 - 3(a-5) - 10 \le 0$
Пусть $(a-5) = t$
$t^2 - 3t - 10 \le 0$
$t^2 - 3t - 10 = 0$
$D = 49$
$t_1 = \dfrac{3+7}{2} = 5$
$t_2 = \dfrac{3-7}{2} = -2$

$-2 \le t \le 5$
$-2 \le a - 5 \le 5$
$3 \le a \le 10$

$a^2 - 3a - 15 \le 0$
$a^2 - 3a - 15 = 0$
$D = 69$
$a_1 = \dfrac{3+\sqrt{69}}{2}$
$a_2 = \dfrac{3-\sqrt{69}}{2}$



$$\begin{cases} 2 < a < 7 \\ 3 \le a \le 10 \\ \dfrac{3-\sqrt{69}}{2} \le a \le \dfrac{3+\sqrt{69}}{2} \\ a \ge -1 \end{cases}$$



Ответ: $a \in \left[3; \frac{3+\sqrt{69}}{2}\right]$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений а, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений а	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений а	1
Решение не соответствует ни одному из критериев,	0

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 181015

перечисленных выше	
Максимальный балл	4

19 Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 4, 6, 8.
б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 20, 22?
в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 9, 10, 11, 19, 20, 21, 22, 30, 31, 32, 33, 41, 42, 43, 52.

Решение:

а)
Набор 2, 4, 6, 8
1.
Среди задуманных чисел должно быть самое маленькое, т.е. 2
2
2.
Чтобы получить 4, какие варианты есть?

Взять ещё 2 22	Взять ещё 4 24

3.
Чтобы получить 8 в конце, какие варианты есть?

22 Взять ещё 22 2222	24 Взять ещё 2 224

б)
Набор 1, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 20, 22

22 – это сумма всех задуманных чисел
1 – это минимальное задуманное число
=>
$22 - 1 = 21$ – это сумма всех чисел, кроме единицы
=>
21 должно быть на доске, но его нет
=>
такого набора не существует

в)
Набор 9, 10, 11, 19, 20, 21, 22, 30, 31, 32, 33, 41, 42, 43, 52

9 – это минимальное задуманное число
=>
9
Должно ли быть задумано 10? Да, потому что оно есть в наборе и не является суммой каких-либо указанных в наборе чисел
=>
9, 10
Должно ли быть задумано 11? Да, потому что оно есть в наборе и не является суммой каких-либо указанных в наборе чисел
=>
9, 10, 11
Должно ли быть задумано 19? Нет, т.к. если будет задумано 19, то текущая сумма чисел 9+10+11+19=49, а такого числа в наборе нет
=>
9, 10, 11
Должно ли быть задумано 20? Нет, т.к. если будет задумано 20, то текущая сумма чисел 9+10+11+20=50, а такого числа в наборе нет
=>
9, 10, 11
Должно ли быть задумано 21? Нет, т.к. если будет задумано 21, то текущая сумма чисел 9+10+11+21=51, а такого числа в наборе нет
=>
9, 10, 11
Должно ли быть задумано 22? Да, т.к. если будет задумано 22, то текущая сумма чисел 9+10+11+22=52 и это последнее число набора
=>
9, 10, 11, 22

Также 22 можно получить, взяв два раза по 11
=>
9, 10, 11, 11, 11

Ответ: а) 2, 2, 2, 2 или 2, 2, 4, б) Нет, в) 9, 10, 11, 22 или 9, 10, 11, 11, 11

Содержание критерия	**Баллы**
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: - обоснованное решение п. а; - обоснованное решение п. б; - искомая оценка в п. в; - пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4