

**Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень**

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания с кратким ответом повышенного уровня сложности и 7 заданий с развернутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

ОТВЕТ: $-0,8$

10 - 0,8

Blank

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

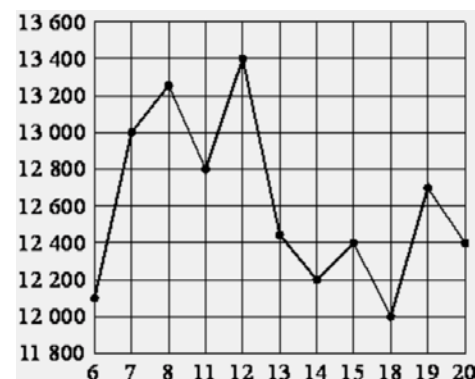
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 В квартире, где проживает Анастасия, установлен прибор расхода холодной воды (счётчик). 1 сентября счётчик показывал расход 122 куб. м воды, а 1 октября – 142 куб. м. Какую сумму должна заплатить Анастасия за холодную воду за сентябрь, если цена 1 куб. м холодной воды составляет 9 руб. 90 коп.? Ответ дайте в рублях.

ОТВЕТ:

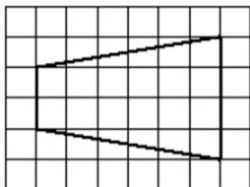
2 На рисунке жирными точками показана цена тонны никеля на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 6 по 20 мая 2009 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – цена тонны никеля в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей ценой никеля на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за тонну).



ОТВЕТ:



- 3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите её площадь.



Ответ: _____.

- 4 Вероятность того, что новый тостер прослужит больше года, равна 0,93. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,82. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

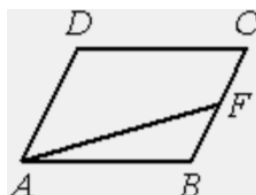
Ответ: _____.

- 5 Найдите корень уравнения $7^{-6-x} = 343$.

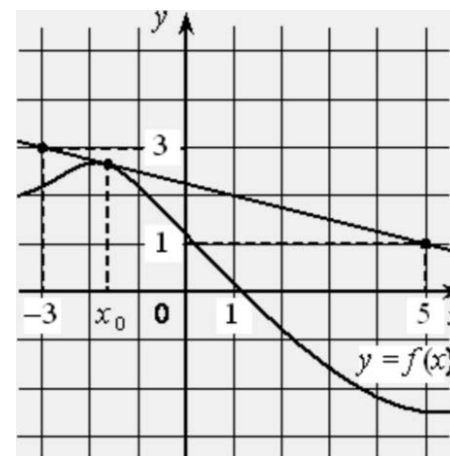
Ответ: _____.

- 6 Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 20. Точка F — середина стороны BC . Найдите площадь трапеции $AFCD$.

Ответ: _____.

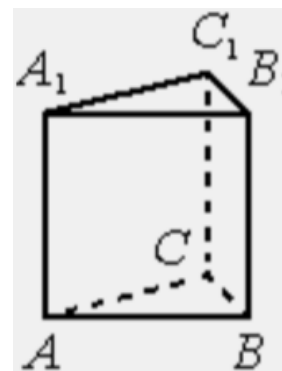


- 7 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: _____.

- 8 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1, найдите угол между прямыми AA_1 и BC_1 .



Ответ: _____.



9

Найдите $4 \cos 2\alpha$, если $\sin \alpha = -0,5$.

Ответ: _____.

10

Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 217 МГц. Скорость погружения батискафа, выражаемая в м/с, определяется по формуле $v = c \cdot \frac{f-f_0}{f+f_0}$, где $c = 1500$ м/с – скорость звука в воде, f_0 – частота испускаемых импульсов (в МГц), f – частота отражённого сигнала, регистрируемая приёмником (в МГц). Определите наибольшую возможную частоту отражённого сигнала f , если скорость погружения батискафа не должна превышать 12 м/с. Ответ выразите в МГц.

Ответ: _____.

11

Смешали некоторое количество 19-процентного раствора некоторого вещества с таким же количеством 17-процентного раствора этого вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Ответ: _____.

12

Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{x^2 + 441}{x}$ на отрезке $[2; 32]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

а) Решите уравнение

$$2 \log_3^2(2 \cos x) - 5 \log_3(2 \cos x) + 2 = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$$\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right].$$

14

В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 8$ и $BC = 6$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{21}$, $SB = \sqrt{85}$, $SD = \sqrt{57}$.

а) Докажите, что SA – высота пирамиды.

б) Найдите угол между прямыми SC и BD .

15

Решите неравенство

$$\log_3^2(x^2 - 16) - 5 \log_3(x^2 - 16) + 6 \geq 0.$$

16

Две окружности касаются внутренним образом в точке K , причём меньшая проходит через центр большей. Хорда MN большей окружности касается меньшей в точке C . Хорды KM и KN пересекают меньшую окружность в точках A и B соответственно, а отрезки KC и AB пересекаются в точке L .

а) Докажите, что $CN:CM = LB:LA$.

б) Найдите MN , если $LB:LA = 2:3$, а радиус малой окружности равен $\sqrt{23}$.



- 17 Планируется выдать льготный кредит на **целое** число миллионов рублей на пять лет. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 20% по сравнению с началом года. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наибольший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика будет меньше 7 млн рублей.

- 18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $ax - 1 = \left| \frac{6}{x} - 3 \right|$ на промежутке $(0; +\infty)$ имеет ровно один корень.

- 19 В последовательности $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$, состоящей из целых чисел, $a_1 = 1$, $a_n = 235$. Сумма любых двух соседних членов последовательности равна 3, 5 или 25.

- а) Приведите пример такой последовательности.
 б) Может ли такая последовательность состоять из 1000 членов?
 в) Из какого наименьшего числа членов может состоять такая последовательность?

О проекте «Пробный ЕГЭ каждую неделю»

Данный ким составлен командой всероссийского волонтерского проекта «ЕГЭ 100 баллов» <https://vk.com/ege100ballov> и безвозмездно распространяется для любых некоммерческих образовательных целей.

Нашли ошибку в варианте?

Напишите нам, пожалуйста, и мы обязательно её исправим!

Для замечаний и пожеланий: https://vk.com/topic-10175642_39008096
 (также доступны другие варианты для скачивания)

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:

ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	7 лет репетиторской деятельности
Регалии:	Основатель проекта Школа Пифагора
Аккаунт ВК:	https://vk.com/eugene10
Сайт и доп. информация:	https://vk.com/shkolapifagora https://youtube.com/ШколаПифагора



Система оценивания Ответы к заданиям 1-19

Каждое из заданий 1–12 считается выполненным верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Верно выполненные задания 13-15 максимум оцениваются в 2 балла, задания 16-17 – в 3 балла, а задания 18-19 – в 4 балла.

№ задания	Ответ
1	198
2	1400
3	18
4	0,11
5	-9
6	15
7	-0,25
8	45
9	2
10	220,5
11	18
12	42
13	а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, -\frac{\pi}{6} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$. б) $\frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}$
14	$\arccos \frac{14}{55}$
15	$(-\infty; -\sqrt{43}] \cup [-5; -4) \cup (4; 5] \cup [\sqrt{43}; +\infty)$
16	$\frac{115}{6}$
17	3 млн
18	$(0; \frac{1}{2}) \cup (\frac{2}{3}; +\infty)$
19	а) привели, б) нет, в) 23

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13

а) Решите уравнение

$$2\log_3^2(2 \cos x) - 5 \log_3(2 \cos x) + 2 = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$$\left[\pi; \frac{5\pi}{2} \right].$$

Решение:

а)

ОДЗ логарифма

Для $\log_a b$:

$$a > 0$$

$$a \neq 1$$

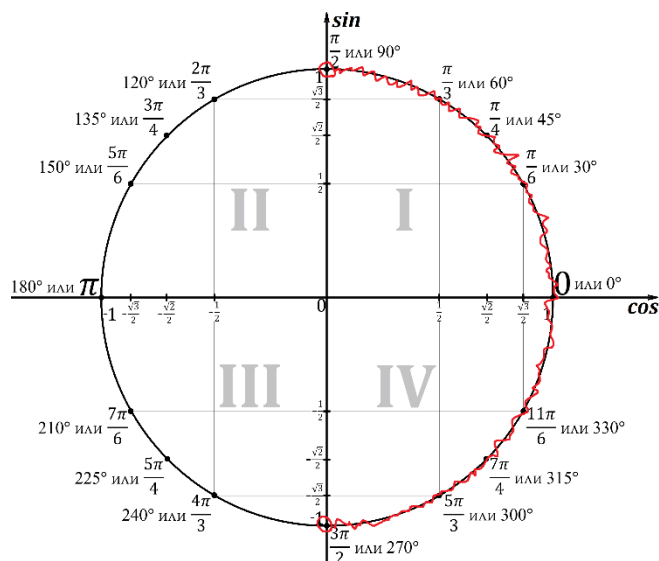
$$b > 0$$

ОДЗ:

$$2 \cos x > 0$$

$$\cos x > 0$$





Пусть $\log_3(2 \cos x) = t$

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 25 - 16 = 9 = 3^2$$

$$t_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 + 3}{4} = 2$$

$$t_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 - 3}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\log_3(2 \cos x) = 2$$

$$3^2 = 2 \cos x$$

$$\cos x = 4,5$$

(Нет решений, т.к. косинус принимает значения от -1 до 1)

$$\log_3(2 \cos x) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3^2} = 2 \cos x$$

$$\frac{1}{9} = 2 \cos x$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$$

б)

Подберём корни для $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$

Если $n = 0$, то $x = \frac{\pi}{6} \notin \left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$

Если $n = 1$, то $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6} \in \left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$

Если $n = 2$, то $x = \frac{\pi}{6} + 4\pi = \frac{25\pi}{6} \notin \left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$

Подберём корни для $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$

Если $n = 0$, то $x = -\frac{\pi}{6} \notin \left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$

Если $n = 1$, то $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6} \in \left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$

Если $n = 2$, то $x = -\frac{\pi}{6} + 4\pi = \frac{23\pi}{6} \notin \left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, -\frac{\pi}{6} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$. б) $\frac{11\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14

В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 8$ и $BC = 6$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{21}$, $SB = \sqrt{85}$, $SD = \sqrt{57}$.

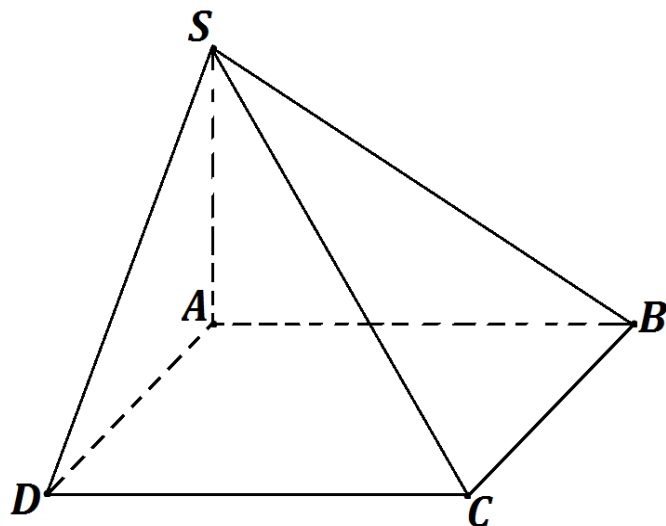
а) Докажите, что SA – высота пирамиды.

б) Найдите угол между прямыми SC и BD .

Решение:

а)





Заметим, что в $\triangle ABS$ выполняется теорема Пифагора:

$$SB^2 = SA^2 + AB^2$$

$$\sqrt{85}^2 = \sqrt{21}^2 + 8^2$$

$$85 = 21 + 64$$

$$85 = 85$$

$\Rightarrow \triangle ABS$ – прямоугольный и $\angle SAB = 90^\circ$ по теореме, обратной теореме Пифагора

Заметим, что в $\triangle ADS$ выполняется теорема Пифагора:

$$SD^2 = SA^2 + AD^2$$

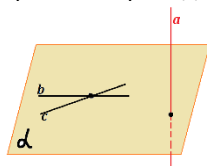
$$\sqrt{57}^2 = \sqrt{21}^2 + 6^2$$

$$57 = 21 + 36$$

$$57 = 57$$

$\Rightarrow \triangle ADS$ – прямоугольный и $\angle SAD = 90^\circ$ по теореме, обратной теореме Пифагора

Признак перпендикулярности прямой и плоскости



Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости

$SA \perp AB$ (т.к. $\triangle ABS$ и $\triangle ADS$ – прямоугольные)

$SA \perp AD$

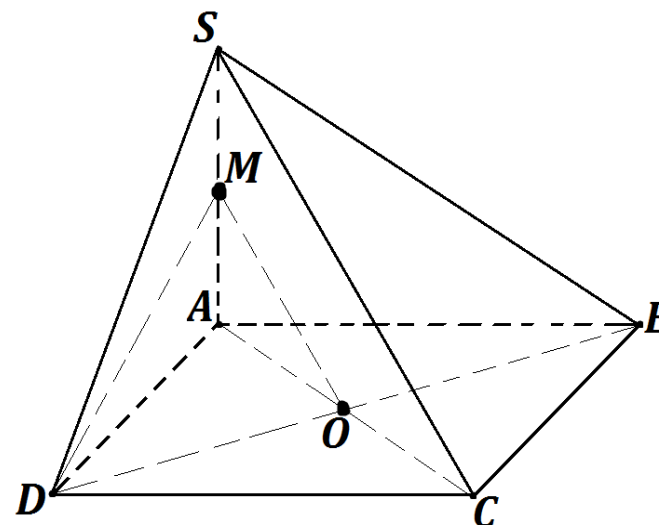
$AB \cap AD = A$

$\Rightarrow SA \perp (ABC)$

$\Rightarrow SA$ – высота пирамиды

■

б)



Построим прямую OM такую, что $OM \parallel SC$

$\angle MOD$ – искомый

O – середина AC

$\Rightarrow$

OM – средняя линия $\triangle ASC$

$\Rightarrow$

$$OM = \frac{1}{2} SC$$

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ (по теореме Пифагора)}$$

$$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{\sqrt{21}^2 + 10^2} = 11 \text{ (по теореме Пифагора)}$$

=>

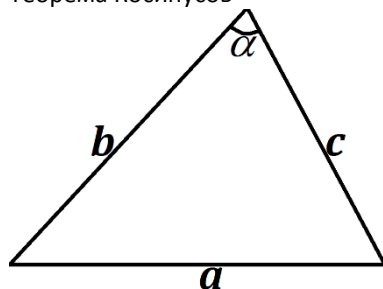
$$OM = \frac{1}{2}SC = \frac{1}{2} \cdot 11 = \frac{11}{2} = 5,5$$

$$DO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$$

$$AM = \frac{1}{2}SA = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{21} = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

$$DM = \sqrt{AM^2 + AD^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{21}}{2}\right)^2 + 6^2} = \sqrt{41,25} \text{ (по теореме Пифагора)}$$

Теорема Косинусов



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

или

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos \angle MOD = \frac{OM^2 + DO^2 - DM^2}{2 \cdot OM \cdot DO}$$

$$\cos \angle MOD = \frac{30,25 + 25 - 41,25}{2 \cdot 5,5 \cdot 5} = \frac{14}{55}$$

$$\angle MOD = \arccos \frac{14}{55}$$

$$\text{Ответ: б) } \arccos \frac{14}{55}$$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт а. ИЛИ	1

Верно решён пункт б при отсутствии обоснований в пункте а	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15

Решите неравенство

$$\log_3^2(x^2 - 16) - 5 \log_3(x^2 - 16) + 6 \geq 0.$$

Решение:

ОДЗ:

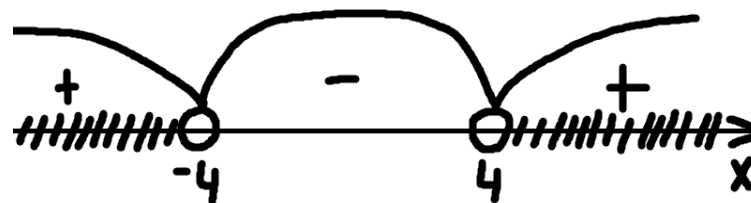
$$x^2 - 16 > 0$$

$$(x - 4)(x + 4) > 0$$

$$(x - 4)(x + 4) = 0$$

$$x = 4$$

$$x = -4$$



$$\text{Пусть } \log_3(x^2 - 16) = t$$

$$t^2 - 5t + 6 \geq 0$$

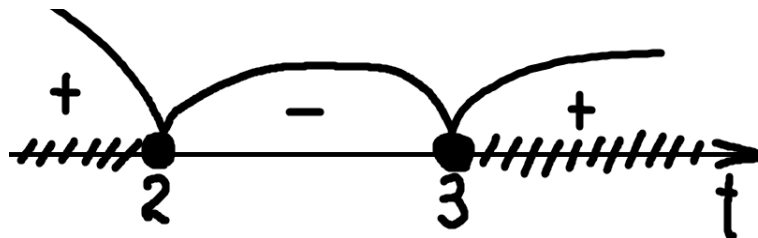
$$t^2 - 5t + 6 = 0$$

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$$

$$t_1 = \frac{5 + 1}{2} = 3$$

$$t_2 = \frac{5 - 1}{2} = 2$$

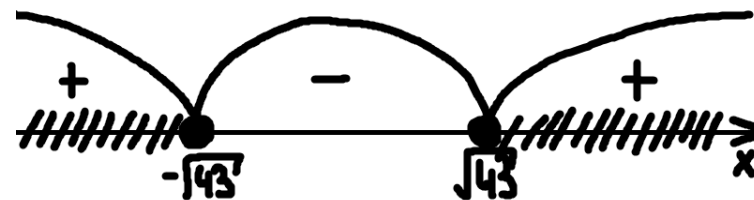




1.
 $t \leq 2$
 $\log_3(x^2 - 16) \leq 2$
 $\log_3(x^2 - 16) \leq \log_3 9$
 $x^2 - 16 \leq 9$
 $x^2 - 25 \leq 0$
 $(x - 5)(x + 5) \leq 0$
 $(x - 5)(x + 5) = 0$
 $x = 5$
 $x = -5$

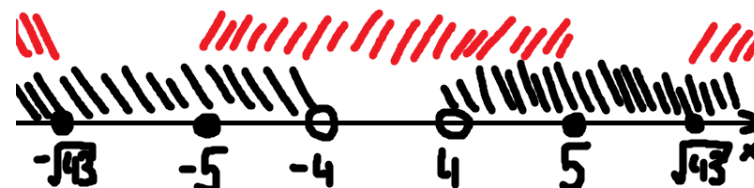


2.
 $t \geq 3$
 $\log_3(x^2 - 16) \geq 3$
 $\log_3(x^2 - 16) \geq \log_3 27$
 $x^2 - 16 \geq 27$
 $x^2 - 43 \geq 0$
 $(x - \sqrt{43})(x + \sqrt{43}) \geq 0$
 $(x - \sqrt{43})(x + \sqrt{43}) = 0$
 $x = \sqrt{43}$
 $x = -\sqrt{43}$



3.
ОДЗ:
 $x \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$

Объединим все найденные корни и промежутки на числовой прямой



Ответ: $(-\infty; -\sqrt{43}] \cup [-5; -4) \cup (4; 5] \cup [\sqrt{43}; +\infty)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2



16

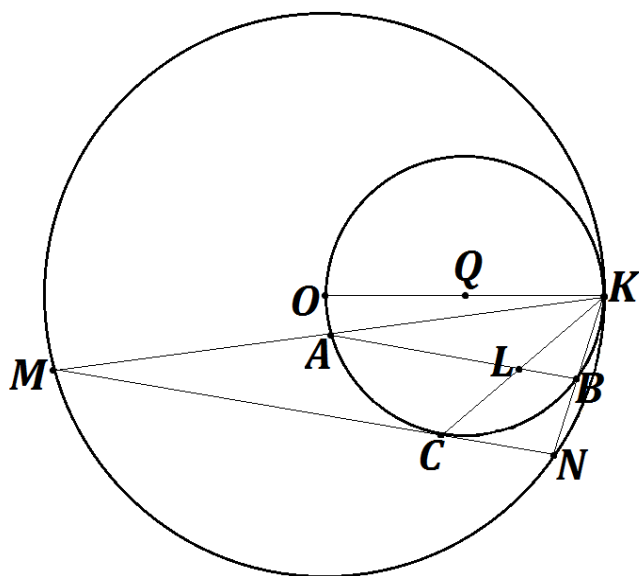
Две окружности касаются внутренним образом в точке K , причём меньшая проходит через центр большей. Хорда MN большей окружности касается меньшей в точке C . Хорды KM и KN пересекают меньшую окружность в точках A и B соответственно, а отрезки KC и AB пересекаются в точке L .

а) Докажите, что $CN:CM = LB:LA$.

б) Найдите MN , если $LB:LA = 2:3$, а радиус малой окружности равен $\sqrt{23}$.

Решение:

а)



Пусть

O — центр большей окружности

Q — центр меньшей окружности

KO — диаметр меньшей окружности

Рассмотрим $\triangle MOK$

$MO = KO$

(т.к. это радиусы большей окружности)

$\Rightarrow$

$\triangle MOK$ — равнобедренный

$\angle OAK = 90^\circ$

(т.к. это вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности)

$\Rightarrow$

OA — высота $\triangle MOK$

$\Rightarrow$

OA — медиана $\triangle MOK$

(по свойству равнобедренного треугольника)

$\Rightarrow$

$AM = AK$

Аналогично

Рассмотрим $\triangle ONK$

$ON = OK$

(т.к. это радиусы большей окружности)

$\Rightarrow$

$\triangle ONK$ — равнобедренный

$\angle OKN = 90^\circ$

(т.к. это вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности)

$\Rightarrow$

OB — высота $\triangle ONK$

$\Rightarrow$

OB — медиана $\triangle ONK$

(по свойству равнобедренного треугольника)

$\Rightarrow$

$BN = BK$

$\Rightarrow$

A — середина MK

B — середина KN

$\Rightarrow$

AB — средняя линия $\triangle MNK$

$LB \parallel CN$ (т.к. $AB \parallel MN$)

$BN = BK$

$\Rightarrow$

LB — средняя линия $\triangle CNK$

$LA \parallel CM$ (т.к. $AB \parallel MN$)

$AM = AK$

$\Rightarrow$

LA — средняя линия $\triangle CMK$



$$\begin{aligned}\sqrt{23}^2 &= x^2 + (\sqrt{23} - \sqrt{92 - 25x^2})^2 \\ 23 &= x^2 + 23 - 2\sqrt{2116 - 575x^2} + 92 - 25x^2 \\ 2\sqrt{2116 - 575x^2} &= 92 - 24x^2 \\ \sqrt{2116 - 575x^2} &= 46 - 12x^2 \quad |^2 \\ 2116 - 575x^2 &= 2116 - 1104x^2 + 144x^4 \\ 144x^4 - 529x^2 &= 0 \\ x^2(144x^2 - 529) &= 0\end{aligned}$$

$x^2 = 0$ $x = 0$ (посторонний корень)	$144x^2 - 529 = 0$ $144x^2 = 529$ $x^2 = \frac{529}{144}$ $x = \frac{23}{12}$ $x = -\frac{23}{12}$ (посторонний корень)
--	--

$$\begin{aligned}x &= \frac{23}{12} \\ MN = 10x &= 10 \cdot \frac{23}{12} = \frac{230}{12} = \frac{115}{6}\end{aligned}$$

Ответ: $\frac{115}{6}$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i>	3
Получен обоснованный ответ в пункте <i>b</i> ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> и при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , ИЛИ При обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> с	1

использованием утверждения пункта <i>a</i> , при этом пункт <i>a</i> не выполнен	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17

Планируется выдать льготный кредит на **целое** число миллионов рублей на пять лет. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 20% по сравнению с началом года. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наибольший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика будет меньше 7 млн рублей.

Решение:

Пусть

S — сумма кредита

x — сумма выплаты в 4-ом и 5-ом годах

1 января 2010 — день открытия кредита

1 июня — день начисления процентов

1 декабря — день выплаты части долга

Составим таблицу как изменялась сумма долга:

Число	Сумма долга
01.01.2010	S
01.06.2010	$\left(1 + \frac{20}{100}\right) \cdot S = 1,2 \cdot S$
01.12.2010	
01.01.2011	S
=>	
01.12.2010	$1,2 \cdot S - S = 0,2 \cdot S$



Второй год

01.01.2011	S
01.06.2011	$1,2 \cdot S$
01.12.2011	
01.01.2012	S

 $\Rightarrow$

01.12.2011	$1,2 \cdot S - S = 0,2 \cdot S$
------------	---------------------------------

Третий год

01.01.2012	S
01.06.2012	$1,2 \cdot S$
01.12.2012	
01.01.2013	S

 $\Rightarrow$

01.12.2012	$1,2 \cdot S - S = 0,2 \cdot S$
------------	---------------------------------

Четвёртый год

01.01.2013	S
01.06.2013	$1,2 \cdot S$
01.12.2013	$1,2 \cdot S - x$

Пятый год

01.01.2014	$1,2 \cdot S - x$
01.06.2014	$1,2 \cdot (1,2 \cdot S - x) = 1,44 \cdot S - 1,2x$
01.12.2014	$1,44 \cdot S - 1,2x - x$

В конце 4-го и 5-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью

 $\Rightarrow$

$$1,44 \cdot S - 1,2x - x = 0$$

Выразим x

$$1,44 \cdot S = 2,2x$$

$$x = \frac{1,44S}{2,2} = \frac{144S}{220} = \frac{36}{55}S$$

Требуется найти наибольший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика будет меньше 7 млн рублей

 $\Rightarrow$

$$0,2 \cdot S + 0,2 \cdot S + 0,2 \cdot S + x + x < 7$$

$$0,6 \cdot S + 2x < 7$$

$$0,6 \cdot S + 2 \cdot \frac{36}{55}S < 7$$

$$\frac{6S}{10} + \frac{72S}{55} < 7$$

$$\frac{66S}{110} + \frac{144S}{110} < 7$$

$$\frac{210S}{110} < 7$$

$$S < \frac{7 \cdot 110}{210}$$

$$S < \frac{11}{3}$$

$$S < 3\frac{2}{3}$$

Требуется найти наибольшее подходящее целое S

 $\Rightarrow$

$$S = 3$$

Ответ: 3 млн

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за	2



вычислительной ошибки ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно	
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$ax - 1 = \left| \frac{6}{x} - 3 \right|$$

на промежутке $(0; +\infty)$ имеет ровно один корень.

Решение:

Решим графически:

Построим $y = \left| \frac{6}{x} - 3 \right|$ (можно строить только в первой и четвёртой четверти)

Уравнение $y = ax - 1$ задаёт множество прямых, проходящих через точку $(0; -1)$

Если $a = 1$, то получаем 1 пересечение с гиперболой

Если $a < 0$, то получаем 0 пересечений с гиперболой (т.к. прямая в 4-й четверти будет располагаться ниже оси Ox)

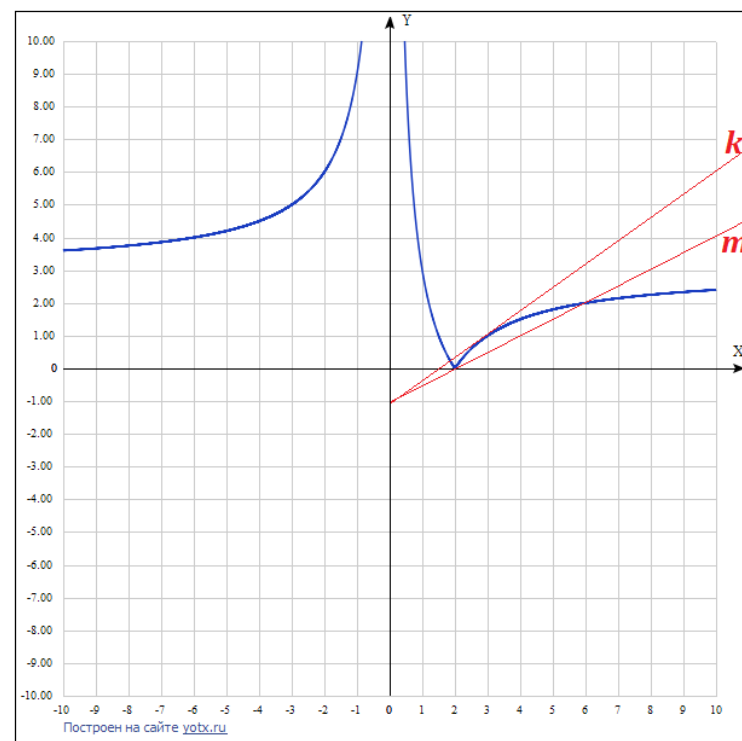
Если $a = 0$, то получаем 0 пересечений с гиперболой (т.к. прямая станет параллельна оси абсцисс)

Пусть

m — прямая, проходящая через точку $(2; 0)$, т.е. через точку «перелома» гиперболы

k — прямая, проходящая через точку касания гиперболы

Проведём прямые m и k :



Гипербола в точке касания — это гипербола с отрицательным коэффициентом, поэтому раскрываем модуль, меняя знаки на противоположные

$$y = \left| \frac{6}{x} - 3 \right|$$

$$y = -\frac{6}{x} + 3 \text{ — гипербола при } x > 2$$

Найдём значение параметра a у прямой m :

$$y = ax - 1 \text{ проходит через т. } (2; 0)$$

$$0 = a \cdot 2 - 1$$

$$1 = 2a$$

$$a = \frac{1}{2}$$

Найдём значение параметра a у прямой k :

$$y = ax - 1 \text{ является касательной к гиперболе } -\frac{6}{x} + 3$$



Условие касания функции и прямой

$$\begin{cases} y' = f'(x_0) \\ y = f(x_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (ax - 1)' = \left(-\frac{6}{x} + 3\right)' \\ ax - 1 = -\frac{6}{x} + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = (-6 \cdot x^{-1} + 3)' \\ ax - 1 = -\frac{6}{x} + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{6}{x^2} \\ ax - 1 = -\frac{6}{x} + 3 \end{cases}$$

Подставим значение a под второе уравнение системы:

$$\frac{6}{x^2} \cdot x - 1 = -\frac{6}{x} + 3$$

$$\frac{6}{x} - 1 = -\frac{6}{x} + 3$$

$$\frac{12}{x} = 4$$

$$x = 3$$

$$a = \frac{6}{x^2} = \frac{6}{3^2} = \frac{2}{3}$$

Если $a = \frac{1}{2}$, то получаем 2 пересечения с гиперболойЕсли $a = \frac{2}{3}$, то получаем 2 пересечения с гиперболойЕсли $\frac{1}{2} < a < \frac{2}{3}$, то получаем 3 пересечения с гиперболойЕсли $0 < a < \frac{1}{2}$, то получаем 1 пересечение с гиперболойЕсли $a > \frac{2}{3}$, то получаем 1 пересечение с гиперболой

$$\text{Ответ: } \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19

В последовательности $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$, состоящей из целых чисел, $a_1 = 1$, $a_n = 235$. Сумма любых двух соседних членов последовательности равна 3, 5 или 25.

- а) Приведите пример такой последовательности.
 б) Может ли такая последовательность состоять из 1000 членов?
 в) Из какого наименьшего числа членов может состоять такая последовательность?

Решение:

а)

Если сумма двух соседних членов последовательности равна 3, потом 5, потом снова 3, потом снова 5 и т.д.:

1 2 3 0 5 -2 7 ...

=>

В такой последовательности числа, стоящие на нечётных позициях, увеличиваются на 2

=>

Очевидно, что таким способом мы дойдём до $a_n = 235$

1 2 3 0 5 -2 7 ... 231 -228 233 -230 235

б)



Заметим, что в приведённой в предыдущем пункте последовательности на нечётных позициях стоят нечётные числа, а на чётных – чётные

Первое число – нечётное, и сумма двух чисел – число нечётное (по условию 3, 5 или 25)

=>

В данной последовательности всегда на нечётных позициях стоят нечётные числа, а на чётных – чётные

=>

a_{1000} должно быть чётным, но последнее число последовательности – это 235

=>

Не может

в)

Наименьшее число членов последовательности будет достигаться при наибольшем увеличении значений последовательности, т.е. если:

Уменьшение числа (по модулю) идёт на 3 (начиная с третьего)

Увеличение числа (по модулю) идёт на 25

1 2 23 -20 45 -42 67 ...

Нечётные числа при таком раскладе увеличиваются на 22, поэтому:

$$a_1 = 1$$

$$a_3 = 23$$

$$a_5 = 45$$

$$a_7 = 67$$

$$a_9 = 89$$

$$a_{11} = 111$$

$$a_{13} = 133$$

$$a_{15} = 155$$

$$a_{17} = 177$$

$$a_{19} = 199$$

$$a_{21} = 221$$

$$a_{23} = 243 \text{ (на 8 больше, чем нужно)}$$

=>

Заменяем четыре уменьшения числа (по модулю) на 3

на четыре уменьшения числа (по модулю) на 5, например, самые первые четыре, получаем последовательность из 23 членов:

1 4 21 -16 41 -36 61 -56 81 -78 103 -100

125 -122 147 -144 169 -166 191 -188 213
-210 235

Ответ: а) привели, б) нет, в) 23

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: - обоснованное решение п. а; - обоснованное решение п. б; - искомая оценка в п. в; - пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

