

**Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень**

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания с кратким ответом повышенного уровня сложности и 7 заданий с развернутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

КИМ

Ответ: -0,8

10	-	0	,	8																
----	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

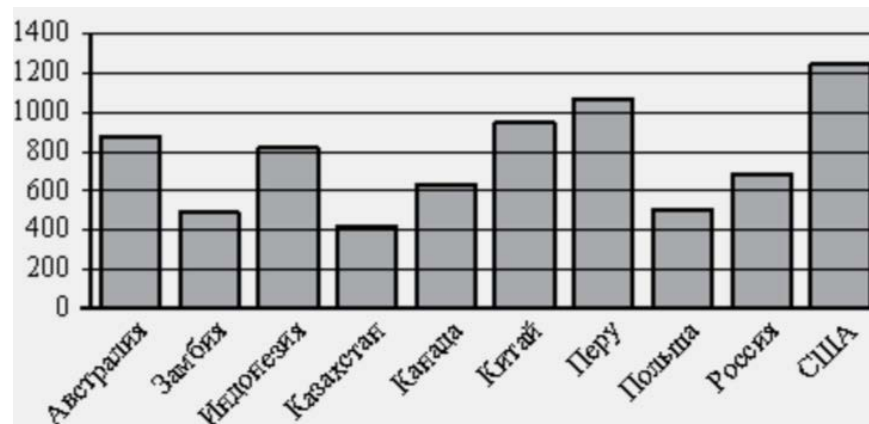
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- 1** Показания счётчика электроэнергии 1 апреля составляли 79621 кВт·ч, а 1 мая – 79821 кВт·ч. Сколько нужно заплатить за электроэнергию за апрель, если 1 кВт·ч электроэнергии стоит 4 руб. 50 коп.? Ответ дайте в рублях.

Ответ: _____.

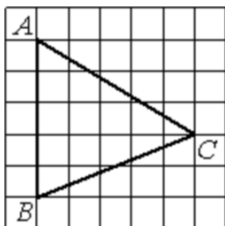
- 2** На диаграмме показано распределение выплавки меди в 10 странах мира (в тысячах тонн) за 2006 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимали США, десятое место – Казахстан. Какое место занимала Канада?



Ответ: _____.



- 3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC . Найдите длину его средней линии, параллельной стороне AB .



Ответ: _____.

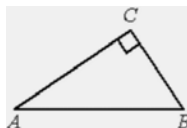
- 4 Перед началом первого тура чемпионата по теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 76 теннисистов, среди которых 7 спортсменов из России, в том числе Анатолий Москвин. Найдите вероятность того, что в первом туре Анатолий Москвин будет играть с каким-либо теннисистом из России.

Ответ: _____.

- 5 Найдите корень уравнения $\log_7(1 - x) = \log_7 5$.

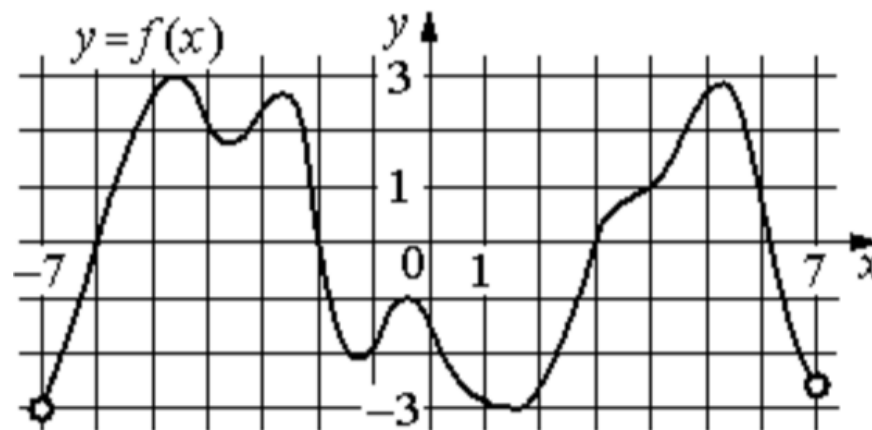
Ответ: _____.

- 6 В треугольнике ABC угол C равен 90° , $BC = 12$, $\cos B = \frac{3}{5}$. Найдите AB .



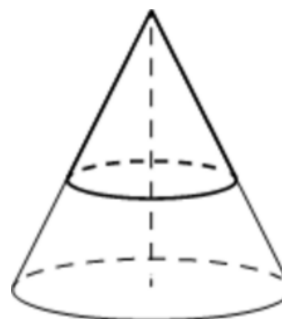
Ответ: _____.

- 7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-7; 7)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.



Ответ: _____.

- 8 Площадь полной поверхности конуса равна 35. Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее высоту в отношении 3:2, считая от вершины конуса. Найдите площадь полной поверхности отсечённого конуса.



Ответ: _____.



- 9 Найдите значение выражения

$$\frac{\left(5^{\frac{3}{5}} \cdot 7^{\frac{2}{3}}\right)^{15}}{35^9}.$$

Ответ: _____.

- 10 В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 (мг) – начальная масса изотопа, t (мин.) – время, прошедшее от начального момента, T (мин.) – период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа $m_0 = 50$ мг. Период его полураспада $T = 5$ мин. Через сколько минут масса изотопа будет равна 12,5 мг?

Ответ: _____.

- 11 Моторная лодка прошла против течения реки 187 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 6 часов меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 3 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

- 12 Найдите точку максимума функции $y = (x - 4)^2(x + 5) + 8$.

Ответ: _____.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение

$$7^{2 \cos x} = 49^{\sin 2x}.$$

- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$$\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right].$$

- 14 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона AB основания равна 16, а высота пирамиды равна 4. На рёбрах AB , CD и AS отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM = DN = 4$ и $AK = 3$.

- а) Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.
б) Найдите расстояние от точки M до плоскости SBC .

- 15 Решите неравенство

$$\frac{2}{7^x - 7} \geq \frac{5}{7^x - 4}.$$

- 16 В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ точки K , L , M и N – середины сторон AB , BC , CD и AD соответственно. Площади четырёхугольников $ABLN$ и $NLCD$ равны, а площади четырёхугольников $KBCM$ и $AKMD$ относятся как 11:17.

- а) Докажите, что прямые BC и AD параллельны.
б) Найдите отношение BC к AD .

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2



- 17 15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r —целое число;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0

Найдите наименьшее значение r , при котором общая сумма выплат будет больше 1,2 млн рублей.

- 18 Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{(y^2 - xy - 9y + 5x + 20)\sqrt{x+5}}{\sqrt{7-y}} = 0, \\ a = x + y \end{cases}$$

имеет единственное решение.

- 19 Каждое из чисел $a_1, a_2, \dots, a_{450}$ равно 1, 2, 3 или 4. Обозначим

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 + a_2 + \dots + a_{450}, \\ S_2 &= a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{450}^2, \\ S_3 &= a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{450}^3, \\ S_4 &= a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_{450}^4. \end{aligned}$$

Известно, что $S_1 = 721$.

- Найдите S_4 , если ещё известно, что $S_2 = 1543, S_3 = 4153$.
- Может ли $S_4 = 4243$?
- Пусть $S_4 = 6315$. Найдите все значения, которые может принимать S_2 .

О проекте «Пробный ЕГЭ каждую неделю»

Данный ким составлен командой всероссийского волонтерского проекта «ЕГЭ 100 баллов» <https://vk.com/ege100ballov> и безвозмездно распространяется для любых некоммерческих образовательных целей.

Нашли ошибку в варианте?

Напишите нам, пожалуйста, и мы обязательно её исправим!

Для замечаний и пожеланий: https://vk.com/topic-10175642_39008096
(также доступны другие варианты для скачивания)

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:

ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	7 лет репетиторской деятельности
Регалии:	Основатель проекта Школа Пифагора
Аккаунт ВК:	https://vk.com/eugene10
Сайт и доп. информация:	https://vk.com/shkolapifagora https://youtube.com/ШколаПифагора



Система оценивания Ответы к заданиям 1-19

Каждое из заданий 1–12 считается выполненным верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Верно выполненные задания 13–15 максимум оцениваются в 2 балла, задания 16–17 – в 3 балла, а задания 18–19 – в 4 балла.

№ задания	Ответ
1	900
2	7
3	2,5
4	0,08
5	-4
6	20
7	8
8	12,6
9	7
10	10
11	14
12	-2
13	а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$. б) $1,5\pi; 2,5\pi; \frac{13\pi}{6}$
14	$2,4\sqrt{5}$
15	$(-\infty; 2 \log_7 2) \cup (1; 2 \log_7 3]$
16	2:5
17	5
18	$(-\infty; -6] \cup \{6\} \cup [10; +\infty)$
19	а) 12775, б) Не может, в) 1323 или 1335

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13

а) Решите уравнение

$$7^{2 \cos x} = 49^{\sin 2x}.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$$\left[\pi; \frac{5\pi}{2} \right].$$

Решение:

а)

$$7^{2 \cos x} = (7^2)^{\sin 2x}$$

Возведение степени в степень

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$7^{2 \cos x} = 7^{2 \sin 2x}$$

$$2 \cos x = 2 \sin 2x$$

$$\cos x = \sin 2x$$

Синус двойного угла

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$



$$\begin{aligned}\cos x &= 2 \sin x \cdot \cos x \\ \cos x - 2 \sin x \cdot \cos x &= 0 \\ \cos x \cdot (1 - 2 \sin x) &= 0\end{aligned}$$

$\cos x = 0$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n; n \in \mathbb{Z}$	$1 - 2 \sin x = 0$ $2 \sin x = 1$ $\sin x = \frac{1}{2}$ $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$ $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$
---	---

б)

Подберём корни для $x = \frac{\pi}{2} + \pi n; n \in \mathbb{Z}$ Если $n = 0$, то $x = \frac{\pi}{2} \notin \left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ Если $n = 1$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi = 1,5\pi \in \left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ Если $n = 2$, то $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi = 2,5\pi \in \left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ Если $n = 3$, то $x = \frac{\pi}{2} + 3\pi = 3,5\pi \notin \left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ Подберём корни для $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$ Если $n = 0$, то $x = \frac{\pi}{6} \notin \left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ Если $n = 1$, то $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6} \in \left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ Если $n = 2$, то $x = \frac{\pi}{6} + 4\pi = \frac{25\pi}{6} \notin \left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ Подберём корни для $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$ Если $n = 0$, то $x = \frac{5\pi}{6} \notin \left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ Если $n = 1$, то $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi = \frac{17\pi}{6} \notin \left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$. б) $1,5\pi; 2,5\pi; \frac{13\pi}{6}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б	1

ИЛИ

Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта а и пункта б

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

Максимальный балл

0

2

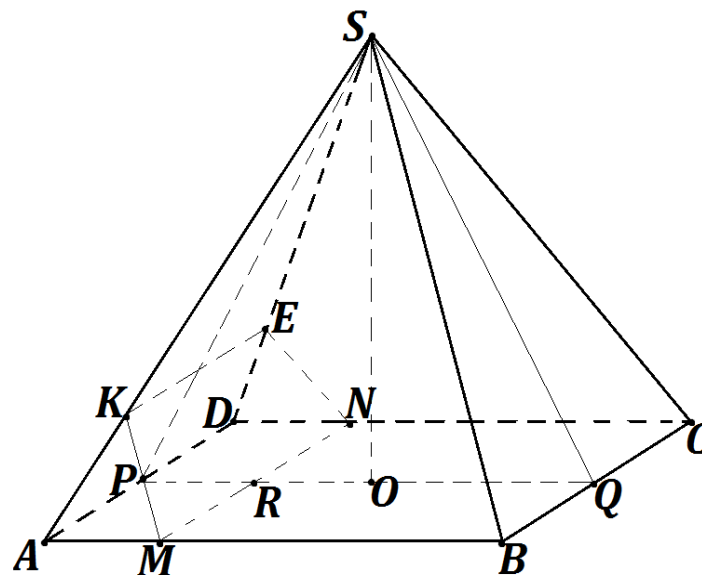
14

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона AB основания равна 16, а высота пирамиды равна 4. На рёбрах AB , CD и AS отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM = DN = 4$ и $AK = 3$.

а) Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.б) Найдите расстояние от точки M до плоскости SBC .

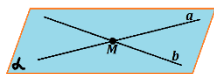
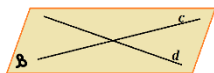
Решение:

а)



Признак параллельности двух плоскостей





Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны

$MN \parallel BC$ (т.к. $AM = 4$ и $DN = 4$)

Осталось доказать, что $MK \parallel SB$

Пусть

SO — высота пирамиды

Тогда

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{16^2 + 16^2} = 16\sqrt{2} \text{ (по теореме Пифагора)}$$

$$AO = \frac{1}{2} \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 16\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

$$SA = \sqrt{AO^2 + SO^2} = \sqrt{(8\sqrt{2})^2 + 4^2} = 12 \text{ (по теореме Пифагора)}$$

$\triangle AKM \sim \triangle ABS$ по двум пропорциональным сторонам и углу между ними

$$\left(\begin{array}{l} \frac{AM}{AB} = \frac{AK}{SA} \\ \angle MAK = \angle BAS \end{array} \right) \Rightarrow MK \parallel SB$$

$\Rightarrow (MKN) \parallel (SBC)$

■

б)

Пусть P — середина AD

Пусть R — середина MN

Пусть Q — середина BC

$(SPQ) \perp BC$

Расстояние от точки M до (SBC) равно расстоянию от точки R до (SBC) , потому что M и R лежат на одной прямой

Итак, расстояние от точки R до прямой SQ — искомое

Рассмотрим $\triangle PQS$ — равнобедренный

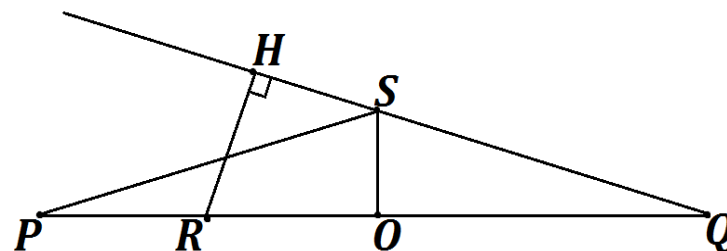
$$SQ = SP = \sqrt{SO^2 + OQ^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \text{ (по теореме Пифагора)}$$

$$PQ = AB = 16$$

Воспользуемся теоремой косинусов, чтобы узнать тупоугольным или остроугольным является $\triangle PQS$:

$$\cos \angle PSQ = \frac{SP^2 + SQ^2 - PQ^2}{2 \cdot SP \cdot SQ} = \frac{\sqrt{80}^2 + \sqrt{80}^2 - 16^2}{2 \cdot \sqrt{80} \cdot \sqrt{80}}$$

$$\cos \angle PSQ < 0 \Rightarrow \triangle PQS \text{ — тупоугольный:}$$



RH — искомое расстояние

$$RQ = 12$$

$$\sin \angle OQS = \frac{SO}{SQ} = \frac{4}{4\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin \angle HQR = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{HR}{RQ}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{HR}{12}$$

$$HR = \frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5} = 2,4\sqrt{5}$$

Ответ: б) $2,4\sqrt{5}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт а. ИЛИ Верно решён пункт б при отсутствии обоснований в пункте а	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2



15 Решите неравенство

$$\frac{2}{7^x - 7} \geq \frac{5}{7^x - 4}$$

Решение:

Пусть $7^x = t$

$$\frac{2}{t - 7} \geq \frac{5}{t - 4}$$

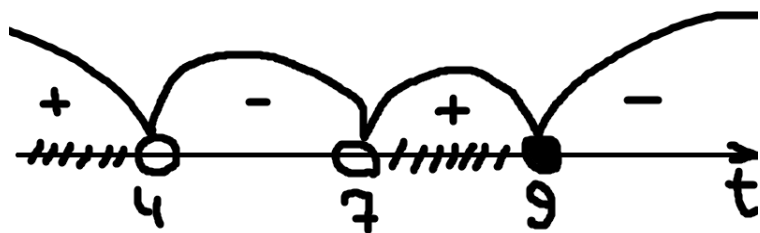
$$\frac{2}{t - 7} - \frac{5}{t - 4} \geq 0$$

$$\frac{2t - 8 - 5t + 35}{(t - 7)(t - 4)} \geq 0$$

$$\frac{-3t + 27}{(t - 7)(t - 4)} \geq 0$$

$$\begin{aligned} -3t + 27 &= 0 \\ -3t &= -27 \\ t &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (t - 7)(t - 4) &\neq 0 \\ t &\neq 7 \\ t &\neq 4 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} t &< 4 \\ 7^x &< 4 \\ 7^x &< 7^{\log_7 4} \\ x &< \log_7 4 \\ x &< 2 \log_7 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7 &< t \leq 9 \\ 7 &< 7^x \leq 9 \\ 7^1 &< 7^x \leq 7^{\log_7 9} \\ 1 &< x \leq \log_7 9 \\ 1 &< x \leq 2 \log_7 3 \end{aligned}$$

Ответ: $(-\infty; 2 \log_7 2) \cup (1; 2 \log_7 3]$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16

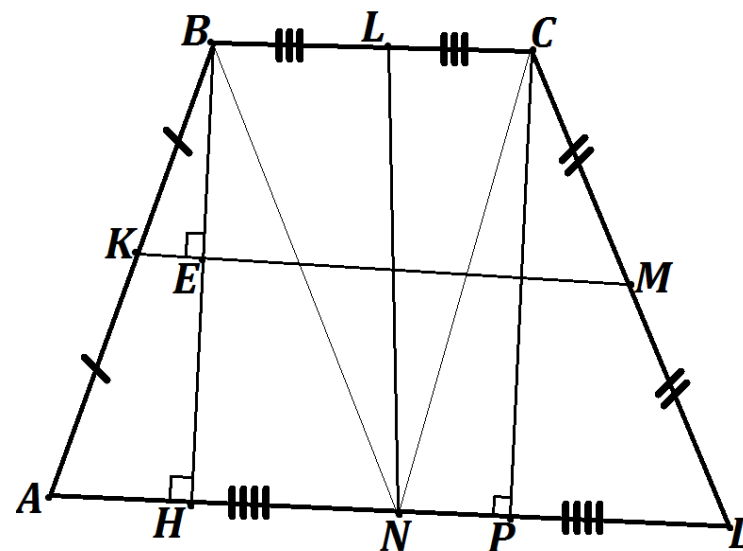
В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ точки K, L, M и N — середины сторон AB, BC, CD и AD соответственно.

Площади четырёхугольников $ABLN$ и $NLCD$ равны, а площади четырёхугольников $KBCM$ и $AKMD$ относятся как 11:17.

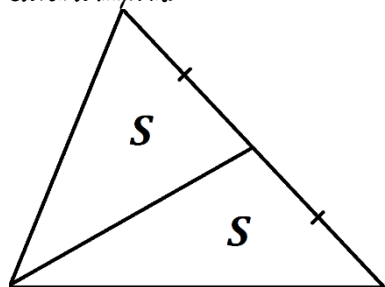
- а) Докажите, что прямые BC и AD параллельны.
б) Найдите отношение BC к AD .

Решение:

а)

Рассмотрим $\triangle CBN$ NL — медиана

Свойство медианы



Медиана разбивает треугольник на два равновеликих (с одинаковыми площадями)

=>

$$S_{BLN} = S_{NLC}$$

$$S_{ABLN} = S_{NLCD} \text{ (по условию)}$$

$$S_{ABN} + S_{BLN} = S_{NLC} + S_{CDN}$$

=>

$$S_{ABN} = S_{CDN}$$

Пусть BH – высота $\triangle ABN$

Пусть CP – высота $\triangle CDN$

$$\frac{1}{2} \cdot AN \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot DN \cdot CP$$

=>

$$BH = CP$$

$$BH \perp AD$$

$$CP \perp AD$$

=>

$$BH \parallel CP$$

Признаки параллелограмма

Четырёхугольник является параллелограммом:

1) Если две стороны равны и параллельны

2) Если противоположные углы попарно равны

3) Если противоположные стороны попарно равны

4) Если все противоположные стороны попарно параллельны

5) Если диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам

6) Если сумма соседних углов равна 180 градусов

7) Если сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех сторон

8) Если сумма расстояний между серединами противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равна его полупериметру

=>

$CBHP$ – параллелограмм

=>

$$BC \parallel HP$$

=>

$$BC \parallel AD$$

■

6)

$$\frac{BC}{AD} - ?$$

$ABCD$ – трапеция (т.к. $BC \parallel AD$)

KM – средняя линия трапеции (т.к. K и M – середины боковых сторон)

$$KM = \frac{BC + AD}{2}$$

$KBCM$ – трапеция

$AKMD$ – трапеция

Пусть $BH \cap KM = E$

$BE = EH$ (т.к. средняя линия делит высоту трапеции $ABCD$ пополам)

$$S_{KBCM} = \frac{BC + KM}{2} \cdot BE$$

$$S_{AKMD} = \frac{AD + KM}{2} \cdot EH$$

$$\frac{S_{KBCM}}{S_{AKMD}} = \frac{11}{17}$$

$$\frac{\frac{BC+KM}{2} \cdot BE}{\frac{AD+KM}{2} \cdot EH} = \frac{11}{17}$$

$$\frac{BC + KM}{AD + KM} = \frac{11}{17}$$



$$17BC + 17KM = 11AD + 11KM$$

$$17BC + 6KM = 11AD$$

$$17BC + 6 \cdot \frac{BC + AD}{2} = 11AD$$

$$17BC + 3BC + 3AD = 11AD$$

$$20BC = 8AD \quad | : AD$$

$$\frac{20BC}{AD} = 8 \quad | : 20$$

$$\frac{BC}{AD} = \frac{8}{20}$$

$$\frac{BC}{AD} = \frac{2}{5}$$

Ответ: б) 2:5

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i>	3
Получен обоснованный ответ в пункте <i>б</i> ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> и при обоснованном решении пункта <i>б</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , ИЛИ При обоснованном решении пункта <i>б</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i> с использованием утверждения пункта <i>a</i> , при этом пункт <i>a</i> не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Максимальный балл	3
-------------------	---

17

15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r — целое число;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0

Найдите наименьшее значение r , при котором общая сумма выплат будет больше 1,2 млн рублей.

Решение:

Переведём миллионы в тысячи:

1 млн это 1000 тыс.

1,2 млн это 1200 тыс.

Пусть клиент вносил платежи 7 числа каждого месяца

Кредит на 6 месяцев, поэтому будет 6 платежей:

x_1 — первый платёж

x_2 — второй платёж

...

x_6 — шестой платёж

Составим таблицу как изменялась сумма долга:

Число	Сумма долга
15.01	1000
01.02	$1000 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right) = 1000 + 10r$



07.02	$1000 + 10r - x_1$
15.02	900
01.03	$900 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right) = 900 + 9r$
07.03	$900 + 9r - x_2$
15.03	800
01.04	$800 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right) = 800 + 8r$
07.04	$800 + 8r - x_3$
15.04	700
01.05	$700 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right) = 700 + 7r$
07.05	$700 + 7r - x_4$
15.05	600
01.06	$600 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right) = 600 + 6r$
07.06	$600 + 6r - x_5$
15.06	500
01.07	$500 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right) = 500 + 5r$
07.07	$500 + 5r - x_6$
15.07	0

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 1000 + 10r - x_1 = 900 \\ 900 + 9r - x_2 = 800 \\ 800 + 8r - x_3 = 700 \\ 700 + 7r - x_4 = 600 \\ 600 + 6r - x_5 = 500 \\ 500 + 5r - x_6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1000 + 10r - 900 = x_1 \\ 900 + 9r - 800 = x_2 \\ 800 + 8r - 700 = x_3 \\ 700 + 7r - 600 = x_4 \\ 600 + 6r - 500 = x_5 \\ 500 + 5r = x_6 \end{cases}$$

Сложим левые и правые части уравнений:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 1000 + 45r$$

Общая сумма выплат должна быть больше 1,2 млн рублей (по условию)

=>

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 > 1200 \text{ тыс.}$$

$$1000 + 45r > 1200$$

$$45r > 200$$

$$r > \frac{200}{45}$$

$$r > \frac{40}{9}$$

$$r > 4\frac{4}{9}$$

Требуется найти наименьшее подходящее целое r

=>

$$r = 5$$

Ответ: 5

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за	2



вычислительной ошибки ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно	
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{(y^2 - xy - 9y + 5x + 20)\sqrt{x+5}}{\sqrt{7-y}} = 0, \\ a = x + y \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение:

Найдём корни уравнения $y^2 - xy - 9y + 5x + 20 = 0$

$$y^2 - (x+9)y + 5x + 20 = 0$$

$$D = x^2 + 18x + 81 - 20x - 80 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

$$y = \frac{x+9 + \sqrt{(x-1)^2}}{2} = \frac{x+9 + |x-1|}{2}$$

$$y = \frac{x+9 - \sqrt{(x-1)^2}}{2} = \frac{x+9 - |x-1|}{2}$$

$\Rightarrow$

$$y_1 = \frac{x+9+x-1}{2} = x+4$$

$$y_2 = \frac{x+9-x+1}{2} = 5$$

Получаем новую систему:

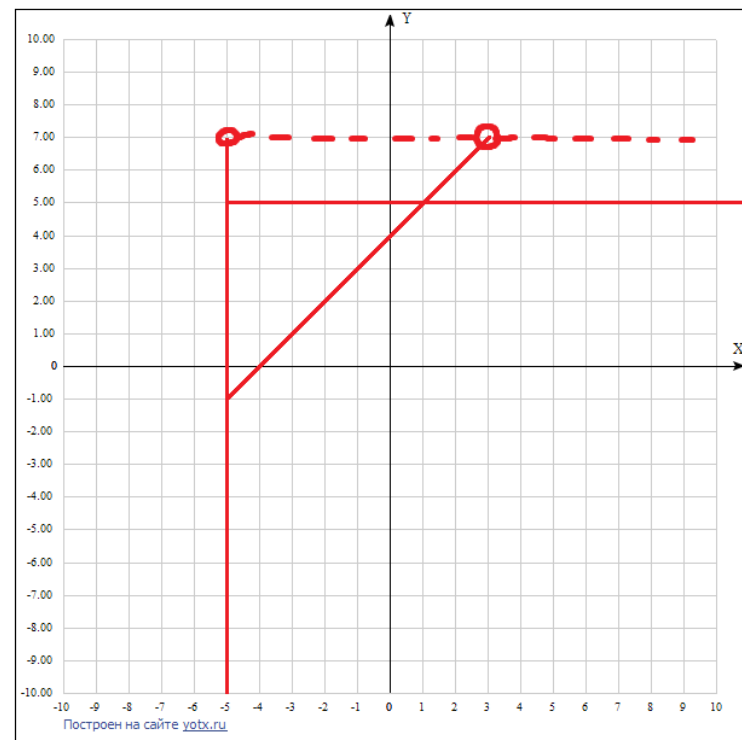
$$\begin{cases} x+5 \geq 0 \\ 7-y > 0 \\ y = x+4 \\ y = 5 \\ \sqrt{x+5} = 0 \\ a = x+y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -5 \\ y < 7 \\ y = x+4 \\ y = 5 \\ x = -5 \\ y = -x+a \end{cases}$$

Решим графически:

Сначала построим график системы:

$$\begin{cases} x \geq -5 \\ y < 7 \\ y = x+4 \\ y = 5 \\ x = -5 \end{cases}$$



$y = -x + a$ — семейство прямых с коэффициентов угла наклона касательной $k = -1$



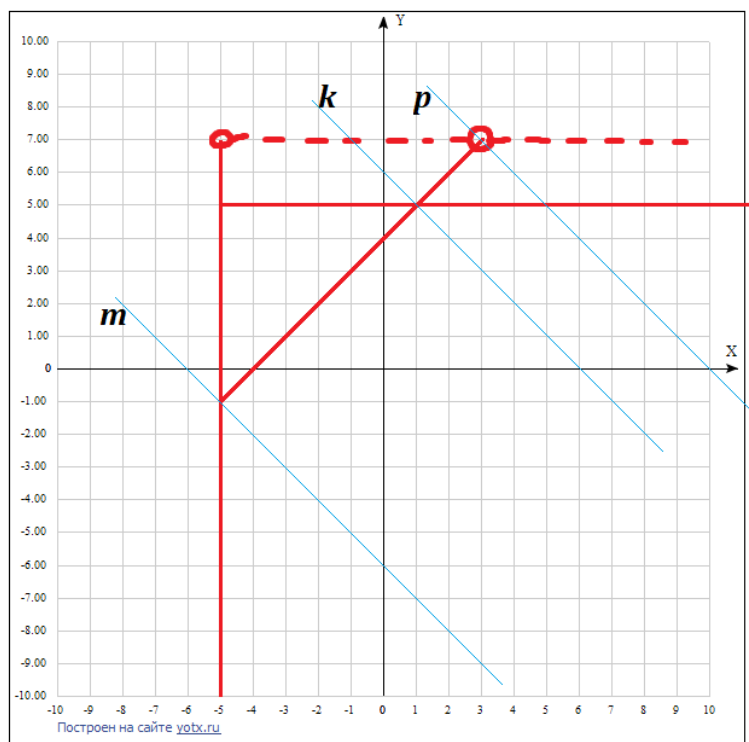
Пусть

m – прямая, проходящая через точку $(-5; -1)$ из семейства прямых $y = -x + a$

k – прямая, проходящая через точку $(1; 5)$ из семейства прямых $y = -x + a$

p – прямая, проходящая через точку $(3; 7)$ из семейства прямых $y = -x + a$

Проведём прямые t , k и p



Известно, что $S_1 = 721$.

- а) Найдите S_4 , если ещё известно, что $S_2 = 1543$, $S_3 = 4153$.
 б) Может ли $S_4 = 4243$?
 в) Пусть $S_4 = 6315$. Найдите все значения, которые может принимать S_2 .

Решение:

Пусть

e — количество единиц среди $a_1, a_2, \dots, a_{450}$

d — количество двоек среди $a_1, a_2, \dots, a_{450}$

t — количество троек среди $a_1, a_2, \dots, a_{450}$

c — количество четвёрок среди $a_1, a_2, \dots, a_{450}$

а)

$S_4 = ?$

$$S_4 = e + 16d + 81t + 256c = ?$$

$$\begin{cases} \boxed{1} \begin{cases} e + d + t + c = 450 & (\text{количество чисел}) \\ \boxed{2} \begin{cases} e + 2d + 3t + 4c = 721 & (S_1) \\ \boxed{3} \begin{cases} e + 4d + 9t + 16c = 1543 & (S_2) \\ \boxed{4} \begin{cases} e + 8d + 27t + 64c = 4153 & (S_3) \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Из уравнения $\boxed{2}$ вычтем уравнение $\boxed{1}$

$$\boxed{5}d + 2t + 3c = 271$$

Из уравнения $\boxed{4}$ вычтем уравнение $\boxed{3}$

$$4d + 18t + 48c = 2610 \quad | : 2$$

$$\boxed{6}2d + 9t + 24c = 1305$$

Запишем уравнения $\boxed{5}$ и $\boxed{6}$ в систему двух уравнений

$$\boxed{5} \begin{cases} d + 2t + 3c = 271 & | \cdot 2 \\ \boxed{6} \begin{cases} 2d + 9t + 24c = 1305 \\ - \begin{cases} 2d + 4t + 6c = 542 \\ \boxed{7}5t + 18c = 763 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Из уравнения $\boxed{3}$ вычтем уравнение $\boxed{1}$

$$\boxed{8}3d + 8t + 15c = 1093$$

Из уравнения $\boxed{4}$ вычтем уравнение $\boxed{2}$

$$6d + 24t + 60c = 3432 \quad | : 6$$

$$\boxed{9}d + 4t + 10c = 572$$

Запишем уравнения $\boxed{8}$ и $\boxed{9}$ в систему двух уравнений

$$\boxed{8} \begin{cases} 3d + 8t + 15c = 1093 \\ \boxed{9} \begin{cases} d + 4t + 10c = 572 & | \cdot 3 \\ - \begin{cases} 3d + 8t + 15c = 1093 \\ \boxed{10}4t + 15c = 623 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Запишем уравнения $\boxed{7}$ и $\boxed{10}$ в систему двух уравнений

$$\boxed{7} \begin{cases} 5t + 18c = 763 & | \cdot 4 \\ \boxed{10} \begin{cases} 4t + 15c = 623 & | \cdot 5 \\ - \begin{cases} 20t + 72c = 3052 \\ \boxed{11}20t + 75c = 3115 \\ 3c = 63 \\ c = 21 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Из уравнения $\boxed{7}$

$$5t + 18 \cdot 21 = 763$$

$$5t = 385$$

$$t = 77$$

Из уравнения $\boxed{5}$

$$d + 2 \cdot 77 + 3 \cdot 21 = 271$$

$$d = 54$$

Из уравнения $\boxed{1}$

$$e + 54 + 77 + 21 = 450$$

$$e = 298$$

$$S_4 = e + 16d + 81t + 256c$$

$$S_4 = 298 + 16 \cdot 54 + 81 \cdot 77 + 256 \cdot 21 = 12775$$

б)

$$\boxed{1} \begin{cases} e + d + t + c = 450 & (\text{количество чисел}) \\ \boxed{2} \begin{cases} e + 2d + 3t + 4c = 721 & (S_1) \\ \boxed{3} \begin{cases} e + 16d + 81t + 256c = 4243 & (S_4) \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Из уравнения $\boxed{3}$ вычтем уравнение $\boxed{1}$

$$15d + 80t + 255c = 3793$$

$$5(3d + 16t + 51c) = 3793$$



$$3d + 16t + 51c = \frac{3793}{5}$$

=>

Противоречие, т.к. d , t и c – целые числа

=>

Не может

в)

 S_2 – ?

$$S_2 = e + 4d + 9t + 16c - ?$$

$$\begin{cases} \boxed{1} & e + d + t + c = 450 & (\text{количество чисел}) \\ \boxed{2} & e + 2d + 3t + 4c = 721 & (S_1) \\ \boxed{3} & e + 16d + 81t + 256c = 6315 & (S_4) \end{cases}$$

Из уравнения $\boxed{2}$ вычтем уравнение $\boxed{1}$

$$\boxed{4} d + 2t + 3c = 271$$

Из уравнения $\boxed{3}$ вычтем уравнение $\boxed{1}$

$$15d + 80t + 255c = 5865 \quad | :5$$

$$\boxed{5} 3d + 16t + 51c = 1173$$

Запишем уравнения $\boxed{4}$ и $\boxed{5}$ в систему двух уравнений

$$\boxed{4} \begin{cases} d + 2t + 3c = 271 \\ \boxed{5} 3d + 16t + 51c = 1173 \end{cases} \quad | \cdot 3$$

$$\begin{cases} 3d + 16t + 51c = 1173 \\ - \begin{cases} 3d + 6t + 9c = 813 \\ 3d + 16t + 51c = 1173 \end{cases} \end{cases}$$

$$10t + 42c = 360 \quad | :2$$

$$5t + 21c = 180$$

$$21c = 180 - 5t$$

$$c = \frac{180 - 5t}{21}$$

$$c = \frac{21}{5(36 - t)}$$

$$c = \frac{21}{21}$$

c должно быть целым, поэтому есть 2 варианта какое значение может принимать t

$$t = 36$$

$$c = \frac{5(36 - t)}{21}$$

$$c = 0$$

$$t = 15$$

$$c = \frac{5(36 - t)}{21}$$

$$c = 5$$

Из уравнения $\boxed{4}$
 $d + 2 \cdot 36 + 3 \cdot 0 = 271$
 $d = 199$

Из уравнения $\boxed{1}$
 $e + 199 + 36 + 0 = 450$
 $e = 215$

$$\begin{aligned} S_2 &= e + 4d + 9t + 16c \\ S_2 &= 215 + 796 + 324 \\ S_2 &= 1335 \end{aligned}$$

Из уравнения $\boxed{4}$
 $d + 2 \cdot 15 + 3 \cdot 5 = 271$
 $d = 226$

Из уравнения $\boxed{1}$
 $e + 226 + 15 + 5 = 450$
 $e = 204$

$$\begin{aligned} S_2 &= e + 4d + 9t + 16c \\ S_2 &= 204 + 904 + 135 + 80 \\ S_2 &= 1323 \end{aligned}$$

Ответ: а) 12775, б) Не может, в) 1323 или 1335

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: - обоснованное решение п. а; - обоснованное решение п. б; - искомая оценка в п. в; - пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

