

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Вариант 128

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.



При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелиевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\sin(a + \beta) = \sin a \cdot \cos \beta + \cos a \cdot \sin \beta$$

$$\cos(a + \beta) = \cos a \cdot \cos \beta - \sin a \cdot \sin \beta$$

Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

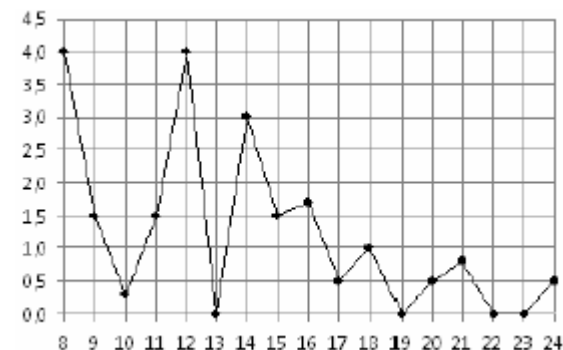
1

Система навигации самолёта информирует пассажира о том, что полёт проходит на высоте 39 000 футов. Выразите высоту полёта в метрах. Считайте, что 1 фут равен 30,5 см.

Ответ: _____

2

На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Томске с 8 по 24 января 2005 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа за данный период впервые выпало ровно 1,5 миллиметра осадков.

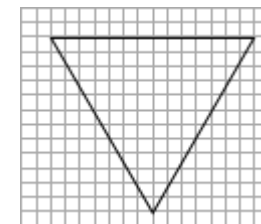


Ответ: _____

3

На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён равносторонний треугольник. Найдите радиус вписанной в него окружности.

Ответ: _____



- 4 Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 18 пассажиров, равна 0,82. Вероятность того, что окажется меньше 10 пассажиров, равна 0,51. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 10 до 17.

Ответ: _____

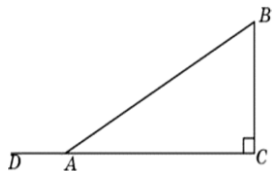
- 5 Найдите корень уравнения

$$\frac{1}{3}x^2 = 16\frac{1}{3}$$

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

Ответ: _____

- 6 В треугольнике ABC угол C равен 90° , тангенс внешнего угла при вершине A равен -2 . Найдите тангенс B .

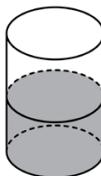


Ответ: _____

- 7 Прямая $y=7x-5$ параллельна касательной к графику функции $y=x^2+6x-8$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ: _____

- 8 В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 48 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 2 раза больше диаметра первого? Ответ выразите в см.



Ответ: _____

Часть 2

- 9 Найдите значение выражения:

$$35 \operatorname{tg} 89^\circ \cdot \operatorname{tg} 179^\circ$$

Ответ: _____

- 10 При нормальном падении света с длиной волны $\lambda=400$ нм на дифракционную решётку с периодом d нм наблюдают серию дифракционных максимумов. При этом угол φ (отсчитываемый от перпендикуляра к решётке), под которым наблюдается максимум, и номер максимума k связаны соотношением $d \cdot \sin \varphi = k \cdot \lambda$. Под каким минимальным углом φ (в градусах) можно наблюдать второй максимум на решётке с периодом, не превосходящим 1600 нм?

Ответ: _____

- 11 Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали выполнять два одинаковых заказа. В первой бригаде было 19 рабочих, а во второй – 25 рабочих. Через 10 дней после начала работы в первую бригаду перешли 9 рабочих из второй бригады. В итоге оба заказа были выполнены одновременно. Найдите, сколько дней потребовалось на выполнение заказов.

Ответ: _____

- 12 Найдите наибольшее значение функции

$$y = (3x^2 - 36x + 36)e^x$$

на отрезке $[-1; 4]$

Ответ: _____

Не забудьте перенести все ответы в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13-19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте четко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение:

$$\frac{\sin x}{\sin^2 \frac{x}{2}} = 4 \cos^2 \frac{x}{2}$$

- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2}; -3\pi\right]$

- 14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На ребре B_1C_1 отмечена точка L так, что $B_1L = 1$. Точки K и M – середины ребер AB и A_1C_1 соответственно. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L .

- а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ
 б) Найдите объем пирамиды, вершина которой – точка M , а основание – сечение данной призмы плоскостью γ .

- 15 Решите неравенство:

$$x^2 \cdot \log_{81} x \geq \log_{81} x^5 + x \cdot \log_3 x$$

- 16 Две окружности касаются внешним образом в точке K . Прямая AB касается первой окружности в точке A , а второй — в точке B . Прямая BK пересекает первую окружность в точке D , прямая AK пересекает вторую окружность в точке C .

- а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.
 б) Найдите площадь треугольника AKB , если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.

17

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 10 млн рублей на 5 лет. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Сколько млн рублей составила общая сумма выплат после погашения кредита?

18

Найдите значения a , при каждом из которых уравнение

$$((a-2)x^2 + 6x)^2 - 4((a-2)x^2 + 6x) + 4 - a^2 = 0$$

имеет ровно два решения.

19

На доске написано число 2045 и еще несколько (не менее двух) натуральных чисел, не превосходящих 5000. Все написанные на доске числа различны. Сумма любых двух из написанных чисел делится на какое-нибудь из остальных.

- а) Может ли на доске быть написано ровно 1024 числа?
 б) Может ли на доске быть написано ровно пять чисел?
 в) Какое наименьшее количество чисел может быть написано на доске?



Проверьте, что каждый ответ записан рядом с номером соответствующего задания.

РЕШЕНИЕ:

- 1 Система навигации самолёта информирует пассажира о том, что полёт проходит на высоте 39 000 футов. Выразите высоту полёта в метрах. Считайте, что 1 фут равен 30,5 см.

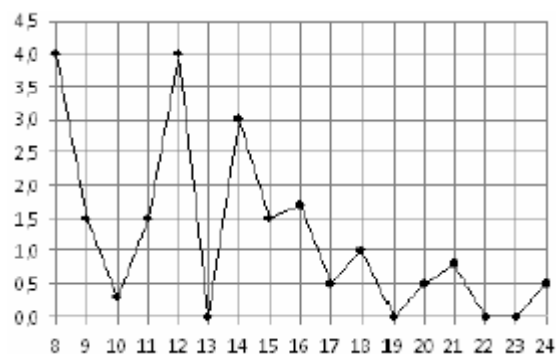
Решение:

$$1) 39000 \cdot 30,5 = 1189500 \text{ (см)}$$

$$2) 1189500 / 100 = 11895 \text{ (м)}$$

Ответ: 11895

- 2 На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Томске с 8 по 24 января 2005 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа за данный период впервые выпало ровно 1,5 миллиметра осадков.



Решение:

На графике видно, что 1,5 миллиметра осадков впервые выпало 9 числа.

Ответ: 9

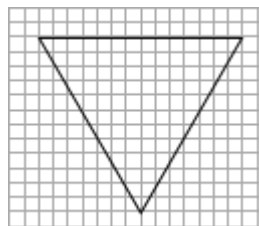
- 3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён равносторонний треугольник. Найдите радиус вписанной в него окружности.

Решение:

Радиусы вписанной и описанной окружности равностороннего треугольника делят его высоту в соотношении 1:2. Следовательно, радиус вписанной окружности равен одной трети его высоты:

$$r = \frac{12}{3} = 4.$$

Ответ: 4



- 4 Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 18 пассажиров, равна 0,82. Вероятность того, что окажется меньше 10 пассажиров, равна 0,51. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 10 до 17.

Решение:

Обозначим: a — число пассажиров. По условию: $P(a < 18) = 0,82$; $P(a < 10) = 0,51$.Тогда: $P(10 \leq a \leq 17) = 0,82 - 0,51 = 0,31$.

Ответ: 0,31

- 5 Найдите корень уравнения

$$\frac{1}{3}x^2 = 16\frac{1}{3}$$

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

Решение:

$$\frac{x^2}{3} = \frac{16 \cdot 3 + 1}{3} \Leftrightarrow x^2 = 49 \Leftrightarrow x = \pm 7.$$

Меньший из корней: -7.

Ответ: -7

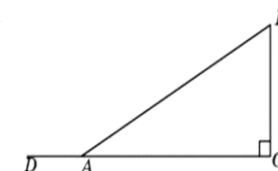
- 6 В треугольнике ABC угол C равен 90° , тангенс внешнего угла при вершине A равен -2. Найдите тангенс B .

Решение:

Тангенсы смежных углов противоположны по знаку.

Следовательно, тангенс $\angle A$ данного треугольника равен 2.

$$\operatorname{tg} \angle B = \operatorname{tg}(90^\circ - \angle A) = \operatorname{ctg} \angle A = 1 / \operatorname{tg} \angle A = 1/2 = 0,5.$$



Ответ: 0,5

- 7 Прямая $y = 7x - 5$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 6x - 8$. Найдите абсциссу точки касания.

Решение:

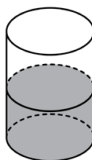
Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной.

Параллельные прямые имеют одинаковый угловой коэффициент. Следовательно, значение производной данной функции равно угловому коэффициенту прямой, параллельной касательной, который равен 7.

$$(x^2 + 6x - 8)' = 7 \Leftrightarrow 2x + 6 = 7 \Leftrightarrow x = 0,5.$$

Ответ: 0,5

- 8** В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 48 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 2 раза больше диаметра первого? Ответ выразите в см.



Решение:

Диаметр основания второго цилиндра в 2 раза больше диаметра первого, следовательно, площадь основания второго цилиндра в 4 раза больше площади основания первого. Учитывая то, что объемы в обоих сосудах равны и применяя формулу объема цилиндра $V = S_0 h$ получаем равенство:

$$V_1 = V_2 \Leftrightarrow S_0 \cdot 48 = 4S_0 \cdot h \Leftrightarrow h = 12.$$

Ответ: 12

- 9** Найдите значение выражения:

$$35 \operatorname{tg} 89^\circ \cdot \operatorname{tg} 179^\circ$$

Решение:

$$35 \operatorname{tg} 89^\circ \cdot \operatorname{tg} 179^\circ = 35 \operatorname{tg} 89^\circ \cdot \operatorname{tg}(90^\circ + 89^\circ) = 35 \operatorname{tg} 89^\circ \cdot (-\operatorname{ctg} 89^\circ) = -35.$$

Ответ: -35

- 10** При нормальном падении света с длиной волны $\lambda=400$ нм на дифракционную решётку с периодом d нм наблюдают серию дифракционных максимумов. При этом угол φ (отсчитываемый от перпендикуляра к решётке), под которым наблюдается максимум, и номер максимума k связаны соотношением $d \cdot \sin \varphi = k \cdot \lambda$. Под каким минимальным углом φ (в градусах) можно наблюдать второй максимум на решётке с периодом, не превосходящим 1600 нм?

Решение:

$$1600 \cdot \sin \varphi = 2 \cdot 400 \Rightarrow \sin \varphi = 0,5 \Rightarrow \varphi = 30^\circ.$$

Ответ: 30

- 11** Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали выполнять два одинаковых заказа. В первой бригаде было 19 рабочих, а во второй – 25 рабочих. Через 10 дней после начала работы в первую бригаду перешли 9 рабочих из второй бригады. В итоге оба заказа были выполнены одновременно. Найдите, сколько дней потребовалось на выполнение заказов.

Решение:

Объем выполненных работ бригадой - это кол-во человек, умноженное на кол-во дней. Тогда объем работ выполненный за первые 10 дней первой бригадой равен $10 \cdot 19$, второй бригадой равен $10 \cdot 25$. Пусть t – число дней, которое потребовалось на выполнение второй части работы. Тогда объем работ выполненный за t дней первой бригадой равен $t \cdot 28$, второй бригадой равен $t \cdot 16$. Следовательно:

$$10 \cdot 19 + t \cdot 28 - \text{объем работ, выполненный первой бригадой, за весь период};$$

$10 \cdot 25 + t \cdot 16$ - объем работ, выполненный второй бригадой, за весь период.

Так как объемы работ равны, тогда:

$$10 \cdot 19 + t \cdot 28 = 10 \cdot 25 + t \cdot 16 \Leftrightarrow 12t = 60 \Leftrightarrow t = 5.$$

Значит, на выполнение второй части работы потребовалось 5 дней. Тогда на выполнение всего заказа потребовалось $10+5=15$ дней.

Ответ: 15

- 12** Найдите наибольшее значение функции

$$y = (3x^2 - 36x + 36)e^x$$

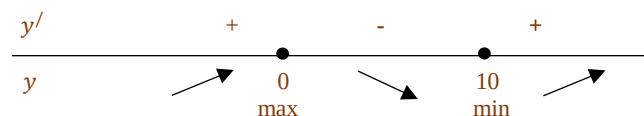
на отрезке $[-1; 4]$

Решение:

Найдем производную заданной функции и приравняем к нулю:

$$\begin{aligned} y' &= (3x^2 - 36x + 36)e^x + (3x^2 - 36x + 36)(e^x)' = \\ &= (6x - 36)e^x + (3x^2 - 36x + 36)e^x = e^x(6x - 36 + 3x^2 - 36x + 36) = \\ &= e^x(3x^2 - 30x) = 3e^x x(x - 10) = 0 \end{aligned}$$

Найдем нули производной. Так как $e^x > 0, \forall x$, то производная равна нулю только в двух случаях: $x = 0$; $x = 10$. Определим знаки производной и поведение функции:



Точка $x = 0$ - max функции и она принадлежит заданному отрезку $[-1; 4]$.

Следовательно, наибольшее значение функции на заданном отрезке достигается в точке $x = 0$. Найдем $y(0) = (3 \cdot 0^2 - 36 \cdot 0 + 36)e^0 = 36$.

Ответ: 36

- 13** а) Решите уравнение:

$$\frac{\sin x}{\sin^2 \frac{x}{2}} = 4 \cos^2 \frac{x}{2}$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2}; -3\pi\right]$

Решение:

а) При условии, что $\sin \frac{x}{2} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2\pi k$, уравнение имеет следующее решение:

$$\frac{\sin x - 4 \cos^2 \frac{x}{2} \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}} = 0;$$

$$\frac{\sin x - \left(2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}\right)^2}{\sin^2 \frac{x}{2}} = 0;$$

$$\frac{\sin x - (\sin x)^2}{\sin^2 \frac{x}{2}} = 0;$$

$$\sin x (1 - \sin x) = 0;$$

Получаем два решения:

$$\sin x = 0$$

$$x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

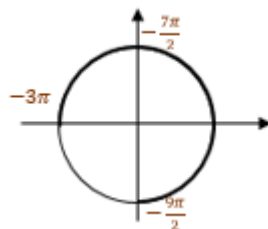
С учетом условия $x \neq 2\pi k$, получаем:

$$x = \pi + 2\pi k; \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2}; -3\pi\right]$.

Получим числа: $-3\pi; -\frac{7\pi}{2}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ б) $-3\pi; -\frac{7\pi}{2}$



14

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На ребре B_1C_1 отмечена точка L так, что $B_1L = 1$. Точки K и M – середины ребер AB и A_1C_1 соответственно. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L .

а) Докажите, что прямая MB перпендикулярна плоскости γ

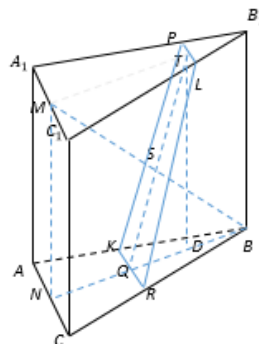
б) Найдите объем пирамиды, вершина которой – точка M , а основание – сечение данной призмы плоскостью γ .

Решение:

$$\text{а) } BN = \sqrt{36 - 9} = 3\sqrt{3}; \quad QD = \frac{1}{3}BN = \sqrt{3};$$

$$\Delta MNB: \quad MB = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = 6; \quad \sin \angle MBN = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}; \quad \angle MBN = 30^\circ.$$

$$\Delta QTD: \quad QT = \sqrt{3^2 + \sqrt{3}^2} = 2\sqrt{3}; \quad \sin \angle TQD = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \angle TQD = 60^\circ.$$



$$\Delta QSB: \angle SQB = \angle TQD = 60^\circ; \quad \angle SBQ = \angle MBN = 30^\circ; \\ \angle QSB = 180^\circ - \angle SQB - \angle SBQ = 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 90^\circ.$$

Следовательно, $TQ \perp MB$.

Прямая KR параллельна AC , которая $\perp$ плоскости BNM , следовательно, $KR \perp MB$.

Значит две пересекающиеся прямые KR и TQ принадлежащие плоскости γ перпендикулярны прямой MB , следовательно, MB перпендикулярна γ .

б) Найдём высоту MS искомой пирамиды:

$$\Delta MST: \angle MST = 90^\circ; \quad \angle MTS = \angle TQD = 60^\circ; \quad MT = \frac{5}{6}B_1M = \frac{5}{6}BN = \frac{5}{6} \cdot 3\sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \angle MTS = \frac{MS}{MT}; \quad MS = MT \cdot \sin \angle MTS = \frac{5\sqrt{3}}{2} \cdot \sin 60^\circ = \frac{5\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15}{4}.$$

Найдём площадь основания $PLRK$ искомой пирамиды:

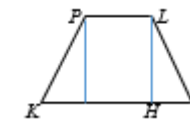
$PLRK$ – равнобедренная трапеция, где $PL=1; KR=3; LR = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$.

Найдём высоту LH трапеции $PLRK$:

$$\Delta LHR: LR = \sqrt{13}; HR = \frac{3-1}{2} = 1, \text{ тогда } LH = \sqrt{13-1} = \sqrt{12}.$$

$$\text{Следовательно, площадь основания: } S_{PLRK} = \frac{1+3}{2} \cdot \sqrt{12} = 4\sqrt{3}.$$

$$\text{Следовательно, объем искомой пирамиды: } V = \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{15}{4} = 5\sqrt{3}.$$



Ответ: б) $5\sqrt{3}$

15

Решите неравенство:

$$x^2 \cdot \log_{81} x \geq \log_{81} x^5 + x \cdot \log_3 x$$

Решение:

При условии, что $x > 0$, неравенство имеет следующее решение:

$$x^2 \cdot \log_{81} x - \log_{81} x^5 - x \cdot \log_3 x \geq 0;$$

$$\frac{1}{4}x^2 \cdot \log_3 x - \frac{5}{4}\log_3 x - x \cdot \log_3 x \geq 0;$$

$$\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4} - x\right)\log_3 x \geq 0;$$

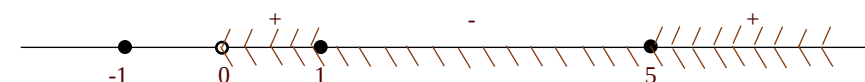
$$(x^2 - 4x - 5)\log_3 x \geq 0;$$

$$(x - 5)(x + 1)\log_3 x \geq 0.$$

Решим неравенство методом интервалов.

Найдём нули:

$$x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5; \quad x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1; \quad \log_3 x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$



Ответ: $(0; 1]; [5; \infty)$

- 16** Две окружности касаются внешним образом в точке K . Прямая AB касается первой окружности в точке A , а второй — в точке B . Прямая BK пересекает первую окружность в точке D , прямая AK пересекает вторую окружность в точке C .

а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника AKB , если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.

Решение:

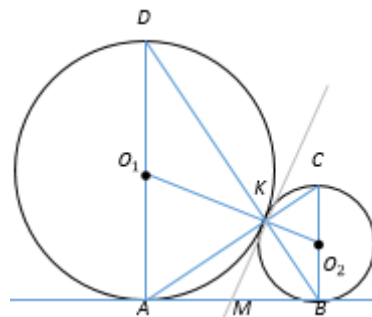
а) Проведем касательную MK .

$\triangle AKB$: По свойству касательных к окружности выходящих из одной точки: $AM=MK$; $MK=MB$, следовательно, $AM=MK=MB$, следовательно, $\angle AKB = 90^\circ$.

Следовательно, $\angle AKD = \angle BKC = 90^\circ$.

Следовательно, AD и BC диаметры окружностей (т.к. вписанный угол равный 90° опирается на диаметр).

Следовательно, $AD \perp AB$; $BC \perp AB$ (т.к. касательная к окружности $\perp$ радиусу, проведенному в точку касания). Следовательно, прямые AD и BC параллельны (т.к. две прямые перпендикулярные третьей прямой параллельны друг другу).



б) Рассмотрим прямоугольную трапецию ABO_2O_1 :

$AO_1 = 4$; $BO_2 = 1$; $O_2O_1 = 5$. Проведем высоту HO_2 .

Найдем AB по т. Пифагора: $AB = HO_2 = \sqrt{25 - 9} = 4$.

Далее, обозначим $KC = x$, тогда $AK = 4x$ (т.к. треугольники ADK и BCK подобны и коэффициент подобия равен 4), $BK = \sqrt{4 - x^2}$ (по т. Пифагора из $\triangle BCK$).

Рассмотрим треугольник AKB : $AK = 4x$; $BK = \sqrt{4 - x^2}$; $AB = 4$.

По т. Пифагора получаем уравнение: $16 = 16x^2 + 4 - x^2$; откуда $x = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Тогда: $AK = 4x = \frac{8}{\sqrt{5}}$; $BK = \sqrt{4 - x^2} = \frac{4}{\sqrt{5}}$.

Следовательно, $S_{AKB} = \frac{1}{2} \cdot AK \cdot BK = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{\sqrt{5}} \cdot \frac{4}{\sqrt{5}} = 3,2$.

Ответ: 3,2

- 17** В июле планируется взять кредит в банке на сумму 10 млн рублей на 5 лет. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Сколько млн рублей составила общая сумма выплат после погашения кредита?

Решение:

Так как долг в размере 10 млн. руб. должен уменьшаться на одну и ту же сумму в течении 5 лет, значит ежегодно необходимо отдавать 2 млн. руб. плюс процент от

остатка долга. Тогда общая сумма выплат равна 10 млн. руб. плюс проценты от остатка долга за каждый год:

$$S = 10 + 0,1 \cdot 10 + 0,1 \cdot 8 + 0,1 \cdot 6 + 0,1 \cdot 4 + 0,1 \cdot 2 = 13.$$

Ответ: 13

- 18** Найдите значения a , при каждом из которых уравнение

$$((a-2)x^2 + 6x)^2 - 4((a-2)x^2 + 6x) + 4 - a^2 = 0$$

имеет ровно два решения.

Решение:

Пусть $t = (a-2)x^2 + 6x$.

$$t^2 - 4t + 4 - a^2 = 0$$

$$D = (2a)^2$$

Для того, чтобы исходное уравнение имело 2 решения, возможны два случая:

1) Данное уравнение имеет единственное решение, т. е. $D = (2a)^2 = 0$, следовательно, $a = 0$. А исходное уравнение имеет два решения.

Получаем единственное решения данного уравнения: $t = 2$. Вернемся к замене:

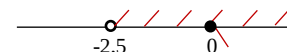
$$(a-2)x^2 + 6x = 2;$$

$$(a-2)x^2 + 6x - 2 = 0;$$

$$D = 20 + 8a$$

Исходное уравнение имеет два решения, когда $D = 20 + 8a > 0$, следовательно, $20 + 8a > 0$;

$$a > -2,5.$$



Следовательно, в первом случае, уравнение имеет ровно два решения при $a = 0$.

2) Данное уравнение имеет два решения, т. е. $D = (2a)^2 > 0$, следовательно, $a \neq 0$.

Получаем решения данного уравнения: $t_1 = 2 + a$; $t_2 = 2 - a$.

Вернемся к замене, получаем два уравнения. Для того, чтобы исходное уравнение имело ровно два решения необходимо, чтобы каждое из этих двух уравнений имело по одному решению либо одно не имело решения, а второе имело два решения.

Рассмотрим первое уравнение:

$$(a-2)x^2 + 6x = 2 + a;$$

$$(a-2)x^2 + 6x - (2 + a) = 0;$$

$$D = 20 + 4a^2 > 0$$

Дискриминант строго положителен, следовательно, данное уравнение всегда имеет ровно два решения. Значит второе уравнение не должно иметь решений.

$$(a-2)x^2 + 6x = 2 - a;$$

$$(a-2)x^2 + 6x - (2 - a) = 0;$$

$$D = -4a^2 + 16a + 20 < 0;$$

$$-(a-5)(a+1) < 0$$

Получаем: $a \in (-\infty; -1) \cup (5; \infty)$.



Далее, заметим, что при $a = 2$, наши уравнения $(a - 2)x^2 + 6x = 2 + a$ и $(a - 2)x^2 + 6x = 2 - a$ становятся линейными и каждое из них имеет по одному различному решению.

Следовательно, во втором случае, при условии, что $a \neq 0$ уравнение имеет ровно два решения при $a \in (-\infty; -1) \cup \{2\} \cup (5; \infty)$.

Ответ: $(-\infty; -1) \cup \{0\} \cup \{2\} \cup (5; \infty)$

19

На доске написано число 2045 и еще несколько (не менее двух) натуральных чисел, не превосходящих 5000. Все написанные на доске числа различны. Сумма любых двух из написанных чисел делится на какое-нибудь из остальных.

а) Может ли на доске быть написано ровно 1024 числа?

б) Может ли на доске быть написано ровно пять чисел?

в) Какое наименьшее количество чисел может быть написано на доске?

Решение:

а) Сумма двух нечетных чисел является четной, следовательно, делиться на 2. Возьмем число 2 и остальные нечетные. Тогда сумма любых двух нечетных чисел делиться на 2, сумма числа 2 и любого нечетного числа делиться на число 1, сумма числа 2 и числа 1 делиться на число 3. Таким образом, если взять числа: 1; 2; 3, и произвольно выбранные из заданного ряда нечетные числа, например, все нечетные числа в ряде от 5 до 2045 включительно, то получим ровно 1024 числа сумма двух любых из которых делится на какое-нибудь из остальных.

б) Число 2045 делиться на 5, т. е. $2045:5=409$. Значит мы можем получить пять кратных 409 чисел: 409; 818; 1227; 1636; 2045, сумма любых двух из которых делиться на какое-нибудь из остальных.

в) Приведем пример четырех чисел, удовлетворяющих условию задачи: 1; 2; 3; 2045. Покажем, что трёх чисел быть не может, от обратного. Пусть есть три числа, удовлетворяющих условию задачи, тогда они должны иметь вид: a ; $2a$; $3a$. и одно из них число 2045.

Пусть $a = 2045$, тогда $2a = 4090$, $3a = 6135 > 5000$.

Пусть $2a = 2045$, но 2045 не делится на 2.

Пусть $3a = 2045$, но 2045 не делится на 3.

Значит трех чисел, удовлетворяющих условию задачи, среди которых число 2045, написано быть может.

Ответ: а) да; б) да; в) 4

Ответы

Ответы	
№1	11895
№2	9
№3	4
№4	0,31
№5	-7
№6	0,5
№7	0,5
№8	12
№9	-35
№10	30
№11	15
№12	36
№13	а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ б) -3π ; $-\frac{7\pi}{2}$
№14	б) $5\sqrt{3}$
№15	$(0; 1]$; $[5; \infty)$
№16	б) 3,2
№17	13 млн.
№18	$(-\infty; -1)$; 0; 2; $(5; \infty)$
№19	а) да; б) да; в) 4