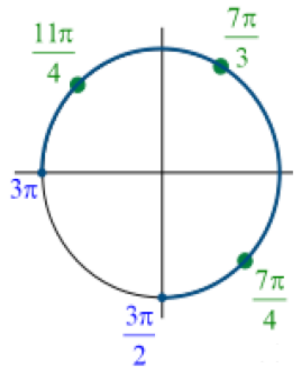
Вариант 3
Ответы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
24	2	8	0,28	0,55	7	-50	-0,25	7	8	12	113

Решения заданий 13-19
Задача 13



Решение. а) Запишем уравнение в виде:

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - \sqrt{3}\operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow\Leftrightarrow (\operatorname{tg} x + 1)(\operatorname{tg} x - \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = -1, \\ \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k, \\ x = \dfrac{\pi}{3} + \pi k, \end{array}\right. k \in \mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Получим $\frac{7\pi}{4}, \frac{7\pi}{3}$ и $\frac{11\pi}{4}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задача 14

Решение.

а) Поскольку плоскость α параллельна прямой AC, то она пересекает грань $ABCD$ по некоторой прямой FL, параллельной прямой AC. Пусть точка $L \in BC$ и прямая FL пересекает прямую BD в точке K а прямая KE пересекает прямую BB_1 в точке P. Тогда точка пересечения прямых B_1D и KE есть точка пересечения плоскости α с диагональю B_1D (см. рис. 1).

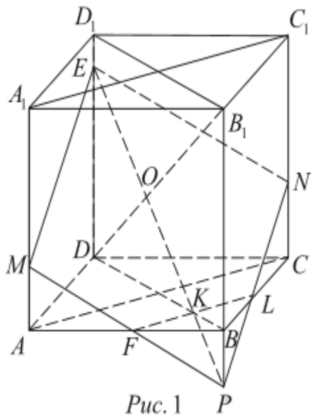


Рис. 1

Прямая FL параллельна AC, значит, точка F середина ребра AB, Тогда, отрезок FL — средняя линия треугольника ABC и, следовательно, $BK = \frac{1}{4}BD$.

Положим $DD_1 = a$, тогда $DE = \frac{6}{7}a$.

Далее имеем (см. рис. 2):

1) Треугольники BKP и DKE — подобны, откуда $\frac{BP}{DE} = \frac{BK}{DK} = \frac{1}{3}$. Таким образом $BP = \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{7}a = \frac{2}{7}a$, $PB_1 = \frac{9}{7}a$.

2) Треугольники DOE и B_1OP — подобны, откуда $\frac{DO}{OB_1} = \frac{DE}{PB_1} = \frac{6a \cdot 7}{7 \cdot 9a} = \frac{2}{3}$, что и требовалось доказать.

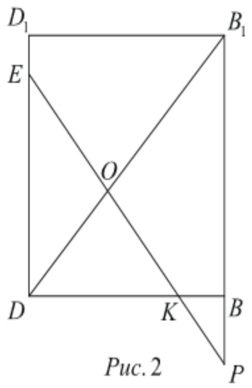


Рис. 2

б) Из того, что $FL \parallel AC$ и $AC \perp BD$, получаем, что $FL \perp BD$. Значит, согласно теореме о трех перпендикулярах, $FL \perp PK$. Таким образом, угол PKB — линейный угол искомого двугранного угла.

Учитывая, что $PB = \frac{2}{7}BB_1 = 2$ и $BK = \frac{1}{4}BD = \sqrt{2}$, из треугольника PBK находим: $\operatorname{tg}\angle PKB = \frac{PB}{BK} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, откуда $\angle PKB = \operatorname{arctg}\sqrt{2}$.

Ответ: б) $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Задача 15

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{(5x-2)^2}{x-3} \geq \frac{4-20x+25x^2}{24-11x+x^2} \Leftrightarrow \frac{(5x-2)^2}{x-3} - \frac{(5x-2)^2}{(x-3)(x-8)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(5x-2)^2(x-9)}{(x-3)(x-8)} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0.4; \\ 3 < x < 8; \\ x \geq 9. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{0.4\} \cup (3;8) \cup [9;+\infty)$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Задача 16

Решение. Пусть сумма кредита равна S млн рублей. По условию долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$S; \frac{8S}{9}, \ldots, \frac{2S}{9}, \frac{S}{9}, 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на 3%, значит, последовательность размеров долга по состоянию на 1-е число такова:

$$1{,}03S;\ 1{,}03 \cdot \frac{8S}{9}; \ldots; 1{,}03 \cdot \frac{2S}{9}; 1{,}03 \cdot \frac{S}{9}.$$

Следовательно, платежи должны быть следующими:

$$0{,}03S + \frac{S}{9};\ \frac{8 \cdot 0{,}03S + S}{9}; \ldots ;\ \frac{2 \cdot 0{,}03S + S}{9};\ \frac{0{,}03S + S}{9}.$$

Найдем сумма всех платежей:

$$S + S \cdot 0{,}03 \left(1 + \frac{8}{9} + \ldots + \frac{2}{9} + \frac{1}{9}\right) = S\left(1 + \frac{10 \cdot 0{,}03}{2}\right) = 1{,}15S.$$

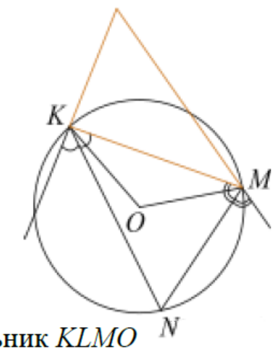
Сумма всех платежей равна 2,3 миллиона рублей, следовательно, $1{,}15S = 2{,}3$, откуда $S = 2$. Значит, сумма, взятая в кредит, равна 2 млн руб.

Ответ: 2 млн руб.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2

Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задача 17



Решение. а) Пусть $\angle KLM = \alpha$. Тогда $\angle LKM + \angle LMK = 180^\circ - \alpha$,

отсюда

$$\angle NKM + \angle NMK = \frac{1}{2}(360^\circ - (180^\circ - \alpha)) = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}.$$

Следовательно, $\angle KNM = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, $\angle KOM = 180^\circ - \alpha$, и четырёхугольник $KLMO$ вписан в окружность.

б) Поскольку $\angle KLM = 120^\circ$, $\angle KOM = 60^\circ$. Тогда $S_{\Delta KMO} = \frac{1}{2}KO^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, отсюда получаем:

$$KO^2 = 27\sqrt{3} : \frac{\sqrt{3}}{4} = 108 \Leftrightarrow KO = 6\sqrt{3}.$$

Заметим, что треугольник KOM — равносторонний, следовательно, $KM = 6\sqrt{3}$. По теореме синусов получаем:

$$2R_{KLM} = \frac{6\sqrt{3}}{\sin 120^\circ} = 12 \Leftrightarrow R_{KLM} = 6.$$

Ответ: б) 6.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Задача 18

Решение. Перепишем исходную систему в виде

$$\begin{cases}(x-1)^2=y+1,\\(y-a)^2+(x-1)^2=1.\end{cases}$$

Исходная система имеет решения, тогда и только тогда, когда относительно y имеет решения система:

$$\begin{cases}(y-a)^2+y+1=1,\\y+1\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2+(1-2a)y+a^2=0,\\y\geqslant -1.\end{cases}$$

Решая уравнение этой системы, находим, что $y=\dfrac{2a-1\pm\sqrt{1-4a}}{2}$. Требование задачи будет выполнено, если последняя смешанная система имеет хотя бы одно решение. Искомые значения a находятся из совокупности неравенств

$$\frac{2a-1\pm\sqrt{1-4a}}{2}\geqslant -1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{1-4a}\geqslant -1-2a,\\\sqrt{1-4a}\leqslant 1+2a.\end{array}\right.$$

Иррациональные неравенства можно решить, используя теоремы о равносильности:

$$\sqrt{x}\leqslant y\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant 0,\\y\geqslant 0,\\x\leqslant y^2\end{cases}\quad\text{и}\quad\sqrt{x}\geqslant y\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y<0,\\x\geqslant 0,\end{cases}\\\begin{cases}y\geqslant 0,\\x\geqslant y^2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y<0,\\x\geqslant 0,\end{cases}\\x\geqslant y^2\end{array}\right.$$

Получим: $-2\leqslant a\leqslant\dfrac{1}{4}$ или $0\leqslant a\leqslant\dfrac{1}{4}$, что дает $-2\leqslant a\leqslant\dfrac{1}{4}$.

Другой путь решения неравенств — ввести замену $t=\sqrt{1-4a}$. В этом случае

$a=\frac{1}{4}(1-t^2)$. Тогда $t \geqslant -1-\frac{1}{2}(1-t^2)$, откуда

$t^2-2t-3 \leqslant 0 \underset{t\geqslant 0}{\Leftrightarrow} 0 \leqslant t \leqslant 3$ и $t \leqslant 1+\frac{1}{2}(1-t^2)$, что дает

$t^2+2t-3 \leqslant 0 \underset{t\geqslant 0}{\Leftrightarrow} 0 \leqslant t \leqslant 1.$

Тем самым, $0 \leqslant t \leqslant 3$. Возвращаясь к исходной переменной, получаем:

$$0 \leqslant \sqrt{1-4a} \leqslant 3 \Leftrightarrow 0 \leqslant 1-4a \leqslant 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 \leqslant -4a \leqslant 8 \Leftrightarrow -2 \leqslant a \leqslant \frac{1}{4}.$$

Ответ: $a \in \left[-2, \frac{1}{4}\right]$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в решении допущена вычислительная ошибка или оно недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в ходе решения допущена одна ошибка, отличная от вычислительной	2
Получены некоторые верные значения параметра, однако решение содержит более одной ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Задача 19

Решение. а) Пусть было 3 участника, которые набрали 90, 72 и 2 балла. Средний балл участников, не сдавших тест $\frac{72+2}{2}=37$ балла. После добавления баллов у участников оказалось 95, 77 и 7 баллов. Средний балл участников, не сдавших тест, составил 7 баллов.

б) В примере предыдущего пункта средний балл участников теста, сдавших тест, первоначально составлял 90 баллов, а после добавления баллов составил $\frac{95+77}{2}=86$ баллов.

в) Пусть всего было N участников теста, сдали тест a участников, после добавления баллов сдали тест b участников. Заметим, что средний балл после добавления составил 85. Имеем два уравнения: $80N = 65(N-a)+90a$ и $85N = 69(N-b)+93b$, откуда $15N=25a$, то есть $3N=5a$, и $16N=24b$, то есть $2N=3b$. Поэтому целое число N делится на 5 и на 3, то есть делится на 15. Таким образом, $N \geq 15$.

Покажем, что N могло равняться 15. Пусть изначально 5 участников набрали по 64 балла, 1 участник — 70 баллов и 9 участников по 90 баллов. Тогда средний балл был равен 80, средний балл участников, сдавших тест, был равен 90, а средний балл участников, не сдавших тест, был равен 65. После добавления средний балл участников, сдавших тест, стал равен 93, средний балл участников, не сдавших тест, стал равен 69. Таким образом, все условия выполнены.

Ответ: а) да; б) да; в) 15.

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта *а*; – обоснованное решение пункта *б*; – искомая оценка в пункте *в*; – пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4