Вариант 3
Ответы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
9	4,5	104	0,4	0,12	0,5	2	7	2	25	0,15	3

Решения заданий 13-19
Задача 13

Решение.

Найдем ОДЗ: $1-x^2>0 \Leftrightarrow -1<x<1$.

Найдем корни числителя:

$$\sin 2x-2(\sin x)^2-4\cos 2x=0 \Leftrightarrow 2\sin x\cos x-2\sin^2 x-4(\cos^2 x-\sin^2 x)=0 \Leftrightarrow \sin^2 x+\sin x\cos x-2\cos^2 x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x=1,\\ \operatorname{tg} x=-2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\\ x=-\operatorname{arctg} 2+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

С учетом ОДЗ получаем: $x=\dfrac{\pi}{4}$.

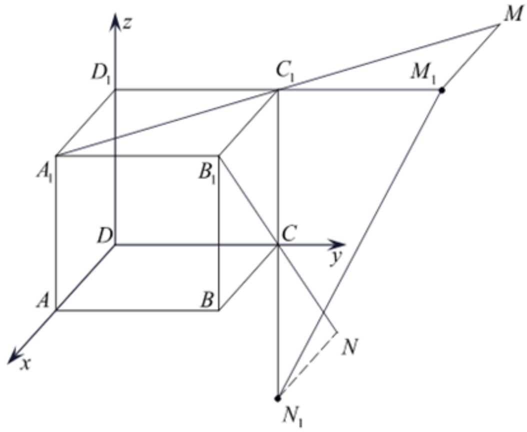
Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{4}\right\}$.

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задача 14

Решение.

а) Введем систему координат, как показано на рисунке. В введенной системе координат имеем:



$$M(-1;2;1),\ N(-1;1;-1),\ B_1(1;1;1),\ C_1(0;1;1).$$

$$\overrightarrow{MN}=(0;-1;-2),\ \overrightarrow{MB_1}=(2;-1;0),\ \overrightarrow{B_1C_1}=(-1;0;0)$$

$$|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{5},\ |\overrightarrow{MB_1}|=\sqrt{5}.$$

Таким образом, у нас получилось, что $MN=MB_1$.

б) Заметим, что проекцией B_1C_1 на плоскость DCC_1D_1 является точка C_1. Спроектируем MN на плоскость DCC_1D_1, получим отрезок M_1N_1. Таким образом, задача свелась к нахождению расстояния от точки C_1 до M_1N_1. Это расстояние равно длине высоты, проведенной из вершины C_1 треугольника $N_1C_1M_1$. Очевидно, что данный треугольник является прямоугольным, а его катеты равны 2 и 1. Тогда его гипотенуза находится по теореме Пифагора, она равна $\sqrt{5}$. Следовательно, высота равна

$$h=\frac{2\cdot 1}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Ответ: б) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Задача 15

Решение.

Сделав замену $t = \dfrac{25x^2 - 10x - 8}{2}$, получаем:

$$\left(\frac{1}{t} + t\right)^2 \geq 4 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{t} - t\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow t \neq 0.$$

Значит, $x \neq -\dfrac{2}{5}$ и $x \neq \dfrac{4}{5}$.

Ответ: $\left(-\infty;\ -\dfrac{2}{5}\right) \cup \left(-\dfrac{2}{5};\ \dfrac{4}{5}\right) \cup \left(\dfrac{4}{5};\ +\infty\right)$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Задача 16

Решение.

Пусть кредит взят на n месяцев, сумма кредита равна S = 600 000 руб. Составим таблицу по данным задачи.

Номер месяца	Долг в начале месяца (с учетом процентов), руб.	Платёж, руб.	Долг на 15-е число (после платежа), руб.
			S
1	$1{,}02S$	$0{,}02S+\frac{S}{n}$	$S-\frac{S}{n}$
2	$1{,}02\left(S-\frac{S}{n}\right)$	$0{,}02\left(S-\frac{S}{n}\right)+\frac{S}{n}$	$S-\frac{S}{n}-\frac{S}{n}$
...	...	...	...
$n-1$	...	...	$\frac{S}{n}$
n	$1{,}02\cdot\frac{S}{n}$	$0{,}02\cdot\frac{S}{n}+\frac{S}{n}$	0

Суммируем все выплаты:

$$B_n=\underbrace{\left(0{,}02S+\frac{S}{n}\right)}_{\text{первая выплата}}+\underbrace{\left(0{,}02\cdot\frac{(n-1)S}{n}+\frac{S}{n}\right)}_{\text{вторая выплата}}+\ldots+\underbrace{\left(0{,}02\cdot\frac{S}{n}+\frac{S}{n}\right)}_{n\text{–я выплата}}=$$

$$=n\cdot\frac{S}{n}+\underbrace{0{,}02\cdot\frac{S+\frac{S}{n}}{2}\cdot n}_{\text{сумма арифм. прогрессии}}=S+0{,}01S\cdot(n+1).$$

Найдём разность между суммами выплат при разных сроках кредита:

$$B_{30}-B_{24}=S+0{,}01S\cdot(30+1)-S-0{,}01S\cdot(24+1)=0{,}01S\cdot(31-25)=0{,}06S=0{,}06\cdot 600\,000=36\,000 \text{ руб.}$$

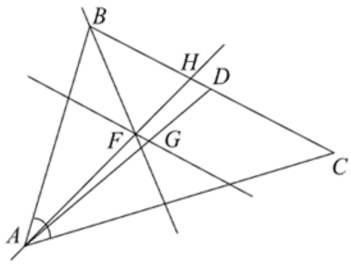
Ответ: на 36 000 рублей.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задача 17

Решение.

а) Пусть в треугольнике ABC биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке H, а биссектрису угла B в точке пересекаются в точке F. По свойству биссектрисы $BH : HC = AB : AC = 2 : 3$. Аналогично, по свойству биссектрисы, только для треугольника ABH получаем:



$$AF : FH = AB : BH = AB : \frac{2}{5}BC = 4 : 2 = 2 : 1.$$

Пусть теперь AD — медиана треугольника ABC, а G — точка пересечения медиан. Известно, что $AG : GD = 2 : 1$. Тогда треугольники AFG и AHD подобны по двум сторонам и углу между ними. Значит, прямые FG и HD параллельны, то есть прямые FG и BC параллельны. Что и требовалось доказать.

б) Запишем теорему косинусов для треугольников ABH и AHC, приняв угол AHB за α:

$$4^2 = 2^2 + AH^2 - 2 \cdot 2 \cdot AH \cdot \cos\alpha,$$
$$6^2 = 3^2 + AH^2 - 2 \cdot 3 \cdot AH \cdot \cos(\pi - \alpha).$$

Отсюда

$$\frac{6^2 - 3^2 - AH^2}{2 \cdot 3 \cdot AH} = \frac{AH^2 + 2^2 - 4^2}{2 \cdot 2 \cdot AH}.$$

Упрощая, получаем:

$$4(27 - AH^2) = 6(AH^2 - 12) \Leftrightarrow AH^2 = 18 \Leftrightarrow AH = 3\sqrt{2}.$$

Ответ: $3\sqrt{2}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Задача 18

Решение.

Сделаем замену $t \in [0;\ 1) = \cos x$. Уравнение примет вид:

$$(t-1)^2 = a(3t + 4(1-t^2) - 8).$$

Каждому его корню на $[0;\ 1)$ соответствует единственное значение $x \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right]$, поэтому это уравнение должно иметь единственный корень на $[0;\ 1)$. Далее:

$$t^2 - 2t + 1 = a(-4t^2 + 3t - 4).$$

Очевидно выражение в скобках отрицательно, на него можно поделить. Получаем

$$a = \frac{t^2 - 2t + 1}{-4t^2 + 3t - 4}$$

Исследуем функцию

$$f(t) = \frac{t^2 - 2t + 1}{-4t^2 + 3t - 4}$$

на промежутке $[0;\ 1)$. Имеем:

$$f'(t) = \frac{(2t-2)(-4t^2+3t-4) - (-8t+3)(t-1)^2)}{(-4t^2+3t-4)^2} =$$
$$= \frac{(t-1)(-8t^2+6t-8+8t^2-3t-8t+3)}{(-4t^2+3t-4)^2} =$$
$$= \frac{-5(t-1)(t+1)}{(-4t^2+3t-4)^2} > 0 \text{ при } t \in [0;1).$$

Значит, $f(t)$ возрастает на этом промежутке, поэтому при всех $a \in [f(0);\ f(1))$ уравнение будет иметь единственный корень, а при прочих a вообще не будет иметь корней. Далее:

$$f(0) = -\frac{1}{4};\ f(1) = 0.$$

Ответ: $a \in \left[-\frac{1}{4};\ 0\right)$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в решении допущена вычислительная ошибка или оно недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в ходе решения допущена одна ошибка, отличная от вычислительной	2
Получены некоторые верные значения параметра, однако решение содержит более одной ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Задача 19

Решение.

а) Например, из числа 2847 получается 2108124117.

б) Заметим, что если в изначальном числе была цифра 9 (не в последнем разряде), то в получившемся числе справа от нее должна стоять цифра 1 или 9. Значит, цифра 9 в числе 37494128 могла получиться только в результате сложения соседних цифр. Но сумма 4 + 4 не равна 9, поэтому такое число не могло получиться.

в) Пусть изначальное трехзначное число равно $100a + 10b + c$, где a, b и c — цифры. Получившееся число будет семизначным, только если $a+b \geq 10$ и $b+c \geq 10$, а во всех остальных случаях полученное число будет меньше 1 000 000.

Если $a+b \geq 10$ и $b+c \geq 10$, то полученное число будет равно

$$a \cdot 10^6 + 1 \cdot 10^5 + (a+b-10) \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + (b+c-10) \cdot 10 + c.$$

Знакочередующая сумма цифр полученного числа равна

$$a - 1 + (a + b - 10) - b + 1 - (b + c - 10) + c = 2a - b.$$

При $a = 9$ получившееся число будет больше, чем при любом другом a, вне зависимости от b и c. В этом случае $2a - b$ делится на 11 только при $b = 7$ и любом c. При $a = 9$ и $b = 7$ максимальное число получится для $c = 9$.

Таким образом, максимальное число получается из числа 979 и равно 9167169.

Ответ: а) 2847; б) нет; в) 9167169.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующий результатов: — обоснованное решение пункта *а*; — обоснованное решение пункта *б*; — оценка в пункте *в*; — пример в пункте *в*, обеспечивающий точность найденной оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4