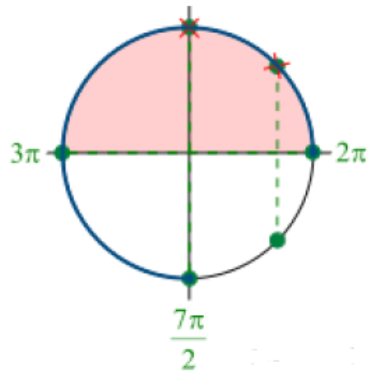
Вариант 2
Ответы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0,25	90	110	0,45	0,079	-1	1	22	15	250	1	−607,5

Решения заданий 13-19
Задача 13

Решение.

а) Получаем:



$$\left(\sqrt{2}\sin^2 x+\cos x-\sqrt{2}\right)\sqrt{-6\sin x}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \begin{cases}\sqrt{2}\sin^2 x+\cos x-\sqrt{2}=0,\\ -\sin x\geqslant 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \begin{cases}\cos x-\sqrt{2}\cos^2 x=0,\\ \sin x\leqslant 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \begin{cases}\cos x(1-\sqrt{2}\cos x)=0,\\ \sin x\leqslant 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin x\leqslant 0,\\ \left[\begin{array}{l}\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ \cos x=0,\\ \sin x=0,\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi k,\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\\ x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

б) Корни, принадлежащие отрезку отберём с помощью единичной окружности.

Получаем числа: $2\pi, 3\pi$ и $\dfrac{7\pi}{2}$.

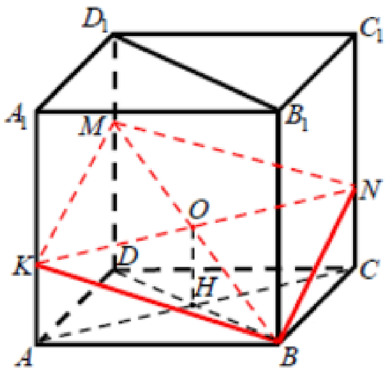
Ответ: а) $\left\{\pi k,\ -\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ -\dfrac{\pi}{2}+2\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $2\pi,\ 3\pi,\ \dfrac{7\pi}{2}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задача 14

Решение.



Пусть четырёхугольник $KBNM$ - сечение данной призмы плоскостью α (см. рисунок). Прямая AC параллельна плоскости α, а плоскость ACK пересекает плоскость α по прямой KN, следовательно $KN \parallel AC$ и, значит, $AKNC$ - прямоугольник. Прямые BD и AC являются соответственно проекциями прямых BM и KN на плоскость ABC, значит, точка пересечения прямых BD и AC (точка H) является проекцией точки пересечения прямых BM и KN (точки O) на эту плоскость. Таким образом, $OH = AK = \frac{1}{3}AA_1$. С другой стороны, отрезок OH - средняя линия треугольника BDM и, следовательно, $DM = 2 \cdot OH = \frac{2}{3}AA_1 = \frac{2}{3}DD_1$, откуда и следует доказываемое утверждение.

б) Так как $AC \perp BD$ и $AC \perp BB_1$, то $AC \perp (BDD_1)$. Но $KN \parallel AC$, значит, и $KN \perp (BDD_1)$. Следовательно, $KN \perp BM$, поскольку $BM \subset (BDD_1)$ и площадь сечения S равна $S = \frac{BM \cdot KN}{2}$.

Имеем:

$$KN = AC = AB\sqrt{2} = 4\sqrt{2},$$

$$BM = \sqrt{BD^2 + DM^2} = \sqrt{32+16} = 4\sqrt{3},$$

$$S = \frac{4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{6}.$$

Ответ: б) $8\sqrt{6}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3

Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Задача 15

Решение.

Ведем замену $z=(x+1)\sqrt{3}$. тогда получим:

$$\frac{3}{2-z}+\frac{z-1}{z-3}\ge 3 \Leftrightarrow \frac{(z-1)(z-3,5)}{(z-2)(z-3)}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1\le z<2,\\ 3<z\le 3,5.\end{array}\right.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получим:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}-1\le x<\frac{2}{\sqrt{3}}-1 \text{ или } \sqrt{3}-1<x\le\frac{7}{2\sqrt{3}}-1.$$

$$\frac{\sqrt{3}-3}{3}\le x<\frac{2\sqrt{3}-3}{3} \text{ или } \sqrt{3}-1<x\le\frac{7\sqrt{3}-6}{6}.$$

Ответ: $\left[\frac{\sqrt{3}-3}{3};\frac{2\sqrt{3}-3}{3}\right)\cup\left(\sqrt{3}-1;\frac{7\sqrt{3}-6}{6}\right]$.

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Задача 16

Решение. Пусть в отеле будет x номеров площадью 27 кв. м и y номеров площадью 45 кв. м. Тогда $27x+45y\leqslant 981$ или $3x+5y\leqslant 109$. Прибыль, которую будут приносить эти номера, равна $2000x+4000y$ или $2000(x+2y)$. Прибыль будет наибольшей при наибольшем значении суммы $x+2y$. Пусть $s=x+2y$, тогда $x=s-2y$, откуда, подставляя в последнее неравенство, получаем:

$$3(s-2y)+5y\leqslant 109 \Leftrightarrow 3s\leqslant y+109,$$

В случае равенства $3s=y+109$ наибольшему значению суммы s соответствовало бы наибольшее значение величины y. В случае неравенства необходимо найти наибольшее возможное значение y и проверить меньшие значения, уменьшающие количество пустого пространства.

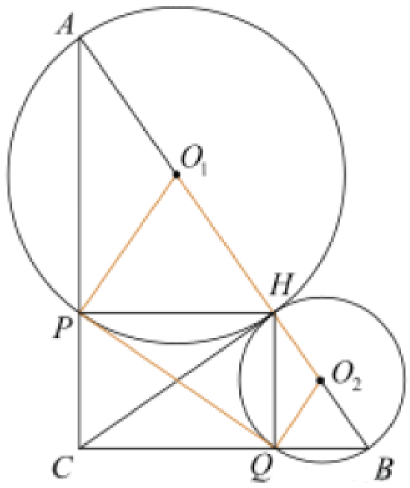
Наибольшее возможное значение y равно 21. Поскольку $981=45\cdot 21+36$, для получения наибольшей прибыли в гостинице необходимо открыть 21 номер люкс и 1 стандартный номер, которые будут приносить предпринимателю доход

$2000(1+2\cdot 21)=86\ 000$ руб. в сутки. При этом останется 9 кв. м. незанятого пространства. Уменьшим на 1 количество люксов. Если в гостинице 20 люксов и 3 стандартных номера, незанятого пространства не остается: $981=27\cdot 3+45\cdot 20$. В этом случае доход тот же $2000\cdot 3+4000\cdot 20=86\ 000$ руб. Дальнейшее уменьшение количества люксов в пользу стандартных номеров приведет к уменьшению прибыли. Тем самым, в отеле должно быть как можно больше номеров площадью 45 кв. м.

Ответ: 86 000 руб.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задача 17



Решение. а) Высота CH, проведённая из прямого угла, равна $\sqrt{AH \cdot HB}$.

Отношение площадей кругов равно $\frac{AH^2}{HB^2}$. Тангенс угла ABC равен $\frac{CH}{HB}$, то есть $\operatorname{tg}^4 \angle ABC = \frac{CH^4}{HB^4}$. Подставим CH в формулу тангенса четвёртой степени:

$$\operatorname{tg}^4 \angle ABC = \frac{AH^2 \cdot HB^2}{HB^4} = \frac{AH^2}{HB^2}.$$

б) Углы $\angle PCQ = \angle CPH = \angle CQH = 90^\circ$, поэтому $CPHQ$ — прямоугольник. Заметим, что площадь искомого четырехугольника состоит из суммы площадей треугольников HPO_1, PHQ и HQO_2. Более того, площади этих фигур являются половинами площадей APH, $PHQC$ и HQB соответственно. Таким образом, $S_{O_1PQO_2} = \frac{1}{2}S_{ABC} = \frac{1}{4}22 \cdot 18 = 99.$

Ответ: б) 99.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0

Максимальный балл	3

Задача 18

Решение. Первое неравенство имеет ровно два решения: (1;4), (6;4). Следовательно, данная система имеет ровно одно решение тогда и только тогда, когда второму неравенству удовлетворяет только одно из решений первого неравенства. Найдем все значения a, при которых справедлива каждая из систем:

$$\begin{cases}(1-a)^2+(4-2a)^2\leqslant 4a^2,\\(6-a)^2+(4-2a)^2>4a^2\end{cases}\text{или}\begin{cases}(1-a)^2+(4-2a)^2>4a^2,\\(6-a)^2+(4-2a)^2\leqslant 4a^2.\end{cases}$$

Решим первую систему:

$$\begin{cases}(1-a)^2+(4-2a)^2\leqslant 4a^2,\\(6-a)^2+(4-2a)^2>4a^2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(a-1)(a-17)\leqslant 0,\\(a-2)(a-26)>0\end{cases}\Leftrightarrow 1\leqslant a<2.$$

Решим вторую систему:

$$\begin{cases}(1-a)^2+(4-2a)^2>4a^2,\\(6-a)^2+(4-2a)^2\leqslant 4a^2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(a-1)(a-17)>0,\\(a-2)(a-26)\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow 17<a\leqslant 26.$$

Ответ: $[1;2)\cup(17;26]$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в решении допущена вычислительная ошибка или оно недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в ходе решения допущена одна ошибка, отличная от вычислительной	2
Получены некоторые верные значения параметра, однако решение содержит более одной ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Задача 19

Решение. Обозначим суммы чисел в группах S_1, S_2, S_3, S_4 а указанную в условии сумму модулей их попарных разностей через A. Можно считать, что $S_1 \leqslant S_2 \leqslant S_3 \leqslant S_4$.

а) Чтобы число A равнялось 0, необходимо, чтобы каждая из разностей $S_i - S_j$ равнялась 0, то есть $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$. Сумма всех двенадцати чисел $1 + 2 + \ldots + 11 + 12 = \frac{12 \cdot 13}{2} = 78$. С другой стороны, она равна $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 4S_1$, но 78 не делится на 4. Значит, $A \neq 0$.

б) Чтобы число A равнялось 1, необходимо, чтобы все, кроме одной, разности $S_i - S_j$ равнялись 0. Значит, $S_1 < S_4$, но в этом случае каждая из сумм S_2, S_3 не равна хотя бы одной из сумм S_1, S_4 поэтому хотя бы три разности $S_i - S_j$ не равны 0 и число A не меньше 3. Значит, $A \neq 1$.

в) Выразим число A явно через S_1, S_2, S_3, S_4:

$$A = (S_2 - S_1) + (S_3 - S_1) + (S_4 - S_1) + (S_3 - S_2) + (S_4 - S_2) + (S_4 - S_3) = \\ = 3(S_4 - S_3) + 4(S_3 - S_2) + 3(S_2 - S_1).$$

В предыдущих пунктах было показано, что $A \geqslant 3$. Если $A = 3$, то $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 - 1$ или $S_4 = S_2 = S_3 = S_1 + 1$. В этом случае сумма всех двенадцати чисел равна $4S_1 + 1$ или $4S_4 - 1$, то есть нечётна, что неверно.

Для следующего разбиения чисел на группы: $\{12; 7\}; \{11; 6; 2\}; \{10; 5; 4; 1\}; \{9; 8; 3\}$ – число A равно 4.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 4.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта *а*; – обоснованное решение пункта *б*; – искомая оценка в пункте *в*; – пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4