Вариант 2
Ответы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
150	40	4	0,06	0,0064	1	0,25	1	90	6	2,75	-3

Решения заданий 13-19
Задача 13

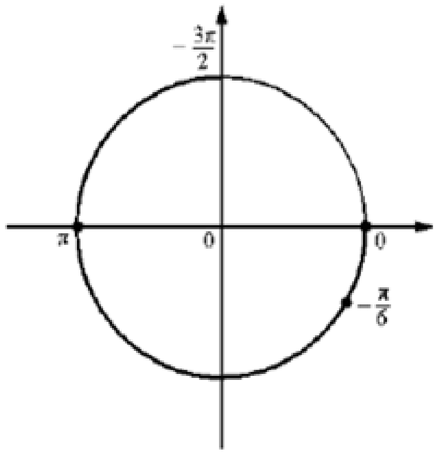
Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$\sin 2x - 2\sqrt{3}\cos x\cos\frac{7\pi}{6} + 2\sqrt{3}\sin x\sin\frac{7\pi}{6} = 3\cos x \Leftrightarrow 2\sin x\cos x + 3\cos x - \sqrt{3}\sin x = 3\cos x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sin x\left(2\cos x - \sqrt{3}\right) = 0.$$

Значит, $\sin x = 0$, откуда $x = \pi n,\ n\in\mathbb{Z}$, или $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$, или $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберем корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$. Получим числа $-\pi,\ -\frac{\pi}{6},\ 0$.



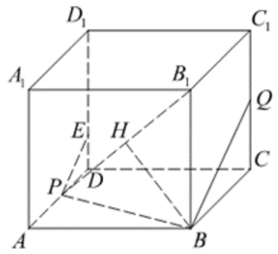
Ответ: а) $\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\ \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z};\ -\frac{\pi}{6} + 2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$; б) $-\pi;\ -\frac{\pi}{6};\ 0.$

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задача 14

Решение.

а) Пусть ребро куба равно $4a$. Отметим на ребре DD_1 такую точку E, что $DE = a$. Прямая PE параллельна прямой BQ, следовательно, необходимо проверить, что $\angle EPB_1 = 90°$.



По теореме Пифагора вычислим длины сторон треугольника EPB_1:

$$PE^2 = PD^2 + DE^2 = 5a^2,$$
$$B_1E^2 = B_1D_1^2 + D_1E^2 = 32a^2 + 9a^2 = 41a^2,$$
$$B_1P^2 = B_1B^2 + BA^2 + AP^2 = 16a^2 + 16a^2 + 4a^2 = 36a^2,\ B_1P = 6a.$$

Поскольку

$$5a^2 + 36a^2 = 41a^2 = B_1E^2 = PE^2 + B_1P^2,$$

по теореме, обратной теореме Пифагора, получаем, что $\angle EPB_1 = 90°$, то есть прямая BQ перпендикулярна прямой B_1P.

б) Поскольку прямая BQ перпендикулярна прямой B_1P, проекции точек B и Q на прямую B_1P совпадают. В прямоугольном треугольнике BB_1P имеем

$$\cos\angle HPB = \frac{HP}{PB} = \frac{PB}{PB_1},$$

откуда

$$PH = \frac{PB^2}{PB_1} = \frac{6^2 + 12^2}{18} = 10.$$

Ответ: б) 10.

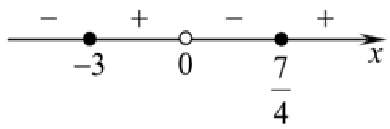
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Задача 15

Решение.

$$\frac{x(x^2-3x+1)}{x}-\frac{x^3+x^2+3x-21}{x}\geq\frac{3x}{x}\Leftrightarrow\frac{-4x^2-5x+21}{x}\geq 0\Leftrightarrow\frac{(x+3)(4x-7)}{x}\leq 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x+3)(4x-7)}{x}\leq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\leq -3,\\ 0<x\leq\frac{7}{4}.\end{array}\right.$$



Ответ: $(-\infty;\ -3]\cup\left(0;\ \frac{7}{4}\right]$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Задача 16

Решение.

Обозначим $S=12000000$, $p=1,12$, $q=1,04$. Размер долга после выплаты должен будет составлять $\frac{14}{15}S$, $\frac{13}{15}S$, ..., $\frac{1}{15}S$, 0. До долга $\frac{7}{15}S$ размер долга будет больше половины исходной суммы, поэтому банк будет умножать размер долга на p. Значит, выплаты будут

$$pS-\frac{14}{15}S,\ p\cdot\frac{14}{15}S-\frac{13}{15}S,\ \ldots,\ p\cdot\frac{8}{15}S-\frac{7}{15}S.$$

После этого размер долга будет меньше половины суммы и умножать банк будет на q. Значит, выплаты будут

$$q\cdot\frac{7}{15}S-\frac{6}{15}S,\ \ldots,\ q\cdot\frac{1}{15}S-0.$$

И первая и вторая последовательность выплат — арифметические прогрессии. Посчитаем тогда общую сумму выплат:

$$\begin{aligned}&\frac{pS-\frac{14}{15}S+p\cdot\frac{8}{15}S-\frac{7}{15}S}{2}\cdot 8+\frac{q\cdot\frac{7}{15}S-\frac{6}{15}S+q\cdot\frac{1}{15}S}{2}\cdot 7=\\&=\left(\frac{23p}{15}-\frac{21}{15}\right)4S+\left(\frac{8q}{15}-\frac{6}{15}\right)\frac{7}{2}S=\\&=S\left(\frac{92p-84+28q-21}{15}\right)=21728000.\end{aligned}$$

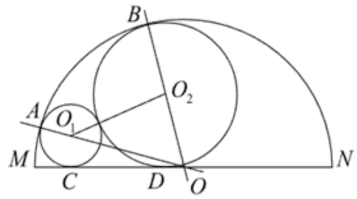
Ответ: 21728000 рублей.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задача 17

Решение.

а) Заметим, что точка касания двух окружностей лежит на их линии центров. Пусть O — середина диаметра MN, тогда A лежит на прямой OO_1, точка B лежит на OO_2. Значит, прямые AO_1, BO_2 и MN пересекаются в одной точке (точке O). Что и требовалось доказать.



б) Пусть C и D — точки касания соответственно первой и второй окружностей с прямой MN. Тогда из прямоугольной трапеции CO_1O_2D получаем:

$$CD^2 = (2+5)^2 - (5-2)^2 = 40.$$

Обозначим искомый радиус R, тогда из треугольника O_1CO получаем

$$CO^2 = (R-2)^2 - 2^2 = R^2 - 4R.$$

Аналогично,

$$DO^2 = (R-5)^2 - 5^2 = R^2 - 10R.$$

Точки касания могут лежать по одну сторону от центра большей окружности или по разные стороны. В каждом из этих случаев $DO = |CO - CD|$, то есть $DO^2 = (CO - CD)^2$, откуда:

$$R^2 - 10R = R^2 - 4R - 2\sqrt{40 \cdot (R^2 - 4R)} + 40 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{40 \cdot (R^2 - 4R)} = 3R + 20 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 40R^2 - 160R = 9R^2 + 120R + 400 \Leftrightarrow R = \frac{140 + 80\sqrt{5}}{31}.$$

Ответ: б) $\dfrac{140+80\sqrt{5}}{31}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

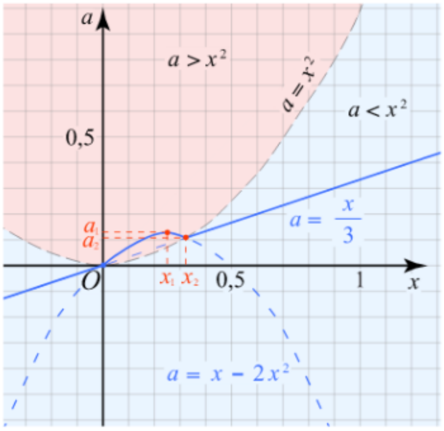
Задача 18

Решение.

Раскроем модуль по определению:

$$x^2+2a=x+|x^2-a| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+2a=x+x^2-a,\\ x^2-a\ge 0,\end{cases}\\ \begin{cases}x^2+2a=x-x^2+a,\\ x^2-a\le 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=\dfrac{x}{3},\\ a\le x^2,\end{cases}\\ \begin{cases}a=x-2x^2,\\ a\ge x^2.\end{cases}\end{array}\right.$$

Изобразим решение полученной совокупности двух систем на плоскости xOa. Графиком первой системы являются участки прямой $a=\frac{x}{3}$, лежащие ниже параболы $a=x^2$. Графиком второй системы — часть параболы $a=x-2x^2$, лежащая выше параболы $a=x^2$. Пусть вершина параболы $a=x-2x^2$ — точка с координатами $(x_1;\ a_1)$, а точки пересечения этой параболы с параболой $a=x^2$ суть точки $(x_0;\ a_0)$ и $(x_2; a_2)$. Найдём эти координаты.



Вершина параболы: $x_1=-\dfrac{1}{2\cdot(-2)}=\dfrac{1}{4}$, $a_1=\dfrac{1}{4}-2\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{1}{8}$.

Точки пересечения парабол:

$$x^2=x-2x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=\dfrac{1}{3}.\end{array}\right.$$

Значит, $x_0=0;\ a_0=0;\ x_2=\dfrac{1}{3};\ a_2=\dfrac{1}{9}$. Заметим, что $x_1=\dfrac{1}{4}<x_2=\dfrac{1}{3}$.

Построим график исходного уравнения (см. рис., выделено синим). По графику находим, что при $a<a_2$ или $a>a_1$ уравнение имеет один корень, при $a=a_2$ или $a=a_1$ — два корня, при $a_2<a<a_1$ — три корня. Таким образом, уравнение имеет три корня при $\dfrac{1}{9}<a<\dfrac{1}{8}$.

Ответ: $\left(\dfrac{1}{9};\ \dfrac{1}{8}\right)$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в решении допущена вычислительная ошибка или оно недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в ходе решения допущена одна ошибка, отличная от вычислительной	2
Получены некоторые верные значения параметра, однако решение содержит более одной ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Задача 19

Решение.

а) Очевидно, что начиная со второй строчки, все числа в таблице не больше 1000. Кроме того, каждое число не больше написанного под ним. Поэтому сумма чисел в третьей строчке не меньше, чем во второй и т.д., и каждая из этих сумм не больше миллиона. Следовательно, поскольку все время суммы возрастать не могут, в каких-то соседних строчках суммы совпадут, а тогда совпадут и сами строчки.

б) Докажем, что если в m-ой строчке при $m \geq 2$, число отлично от написанного над ним, то оно не меньше, чем 2^{m-2}. Действительно, для $m = 2$ это очевидно, так как все числа второй строки натуральные. Пусть это уже проверено для всех строк с номерами, меньшими m. Пусть в $m-1$-ой строчке написано число a, а под ним написано число b, большее a. Тогда в $m-2$-ой строчке написано b чисел, равных a. Ясно, что в $m-2$-ой строчке будет написано несколько групп одинаковых чисел, по a в каждой группе, причем числа из разных групп различны. Отсюда вытекает, что b делится на a, то есть $b \geq 2a$. Кроме того, по крайней мере одно из чисел в этих группах отличается от a, а значит, по предположению индукции $a \geq 2^{(m-1)-2}$. Итак, $b \geq 2a \geq 2^{m-2}$. Наше утверждение доказано по индукции для всех $m \geq 2$. Если предположить, что 11-я строчка отлична от 12-й, то какое-то число в 12-й строчке будет больше, чем $2^{12-2} = 1024 > 1000$, что невозможно.

в) Приведем такой пример:

0, 1, 2, 2, 4, 4, 4, 4, …, 256, …, 256, 488, …, 488
1, 1, 2, 2, 4, 4, 4, 4, …, 256, …, 256, 488, …, 488
2, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 4, …, 256, …, 256, 488, …, 488
4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, …, 256, …, 256, 488, …, 488
………………………………………………………………
256, ……………………………., 256, 488, …, 488
1 512, ……………………………., 512, 488, …, 488

В первой строчке 0 и 1 встречаются по одному разу, 2 — два раза, 4 — четыре раза, 8 — восемь раз, …., 256 — 256 раз, 488 — встречается 488 раз, в 11 строчке встречается 512 раз число 512 и 488 раз число 488.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в)	
Обоснованно получены верные ответы в пункте б) и в одном из пунктов а) или в)	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте б) или верные ответы в пунктах а) и в)	2
Обоснованно получен верный ответ в одном из пунктов а) или в)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	**4**