Вариант 1
Ответы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
175	5	58	0,2	0,97	38	46	3	1,2	6	-2,5	25

Решения заданий 13-19
Задача 13

Решение. а) Знаменатель дроби не должен обращаться в нуль, то есть $\sin 2x \neq 1$. Преобразуем уравнение при этом условии:

$$\frac{1+2\sin^2 x-3\sqrt{2}\sin x+\sin 2x}{2\sin x\cos x-1}=1 \underset{\sin 2x\neq 1}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{\sin 2x\neq 1}{\Leftrightarrow} 1+2\sin^2 x-3\sqrt{2}\sin x+\sin 2x=\sin 2x-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x-3\sqrt{2}\sin x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin x=\sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{4}+2\pi k, \\ x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k, \end{array}\right. k\in\mathbb{Z}.$$

Условию $\sin 2x \neq 1$ удовлетворяет только $x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

б) Отберём корни при помощи двойного неравенства:

$$-\frac{3\pi}{2}\leqslant\frac{3\pi}{4}+2\pi k\leqslant\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow-\frac{9}{8}\leqslant k\leqslant-\frac{1}{8}\Leftrightarrow k=-1.$$

Указанному отрезку удовлетворяет только $-\dfrac{5\pi}{4}$.

Ответ: а) $\left\{\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $-\dfrac{5\pi}{4}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Максимальный балл	2

Задача 14

Решение. а) Проведём отрезок ED_1 и в плоскости грани BB_1C_1C проведём через точку T прямую, параллельную ED_1. Эта прямая пересечёт ребро BB_1 в точке F. Точка F лежит в плоскости ETD_1. Треугольники EA_1D_1 и FB_1T подобны, как треугольники с параллельными сторонами, следовательно,

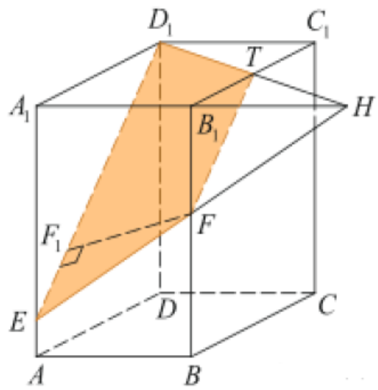
$$\frac{B_1F}{B_1T} = \frac{A_1E}{A_1D_1} = \frac{6A_1A}{7AD} = \frac{6\cdot 14}{7\cdot 12} = 1.$$

Таким образом, $B_1F = B_1T = \frac{1}{2}B_1C_1 = 6$. Тогда $FB = 14 - 6 = 8$ и $BF : FB_1 = 4 : 3$.

б) Четырёхугольник ED_1TF — сечение параллелепипеда плоскостью ETD_1. Поскольку стороны FT и ED_1 параллельны, но не равны, то четырёхугольник ED_1TF — трапеция. Продолжим боковые стороны EF и D_1T до пересечения в точке H. Точка T — середина B_1C_1, поэтому отрезок FT — средняя линия треугольника ED_1H. Из равенства треугольников A_1D_1H и A_1EH получаем $D_1H = EH$, откуда $D_1T = EF$, то есть трапеция ED_1TF — равнобедренная.

Найдём стороны трапеции: $ED_1 = EA_1\sqrt{2} = 12\sqrt{2}, \quad FT = FB_1\cdot\sqrt{2} = 6\sqrt{2},$

$$EF = D_1T = \sqrt{D_1C_1^2 + TC_1^2} = 2\sqrt{17}.$$



Высота равнобедренной трапеции

$$FF_1 = \sqrt{EF^2 - EF_1^2} = \sqrt{(2\sqrt{17})^2 - (3\sqrt{2})^2} = 5\sqrt{2}.$$

Тогда $S_{EFTD_1} = 5\sqrt{2}\cdot\dfrac{12\sqrt{2}+6\sqrt{2}}{2} = 90.$

Ответ: б) 90.

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Задача 15

Решение.

Заметим, что $x^2 = |x|^2$ и преобразуем неравенство:

$$\frac{x^2 - 4|x| - 16}{x^2} \le 0 \Leftrightarrow \frac{\left(|x| - 2 - 2\sqrt{5}\right)\left(|x| - 2 + 2\sqrt{5}\right)}{x^2} \le 0.$$

Учитывая, что всегда $|x| + 2\sqrt{5} - 2 > 0$, получим, что $|x| - 2 - 2\sqrt{5} \le 0$ при $x \ne 0$. Тогда $-2 - 2\sqrt{5} \le x < 0$ или $0 < x \le 2 + 2\sqrt{5}$.

Ответ: $\left[-2 - 2\sqrt{5}; 0\right) \cup \left(0; 2 + 2\sqrt{5}\right]$.

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Задача 16

Решение. В течение 8 лет долг в июле каждого года должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года, значит, ежегодно долг уменьшается на $\frac{400}{8}=50$ тыс. руб. Пусть $m=1+\frac{q\%}{100\%}$, $n=1+\frac{r\%}{100\%}$. Заполним таблицу.

Год	Долг в январе, тыс. руб.	Выплата, тыс. руб.	Долг в июле, тыс. руб.
2025			400
2026	$400m$	$400m-350$	350
2027	$350m$	$350m-300$	300
2028	$300m$	$300m-250$	250
2029	$250m$	$250m-200$	200
2030	$200n$	$200n-150$	150
2031	$150n$	$150n-100$	100
2032	$100n$	$100n-50$	50
2033	$50n$	$50n-0$	0

Найдём из таблицы суммы выплат за первые и за последние четыре года:

$$S_{2026-2029}=400m-350+350m-300+300m-250+250m-200= \\ =1300m-1100;$$

$$S_{2030-2033}=200n-150+150n-100+100n-50+50n=500n-300.$$

Учитывая, что сумма всех выплат после полного погашения кредита составит 650 тыс. руб., а общая сумма выплат за первые четыре года больше общей суммы выплат за последние четыре года на 140 тыс. руб., получаем систему уравнений

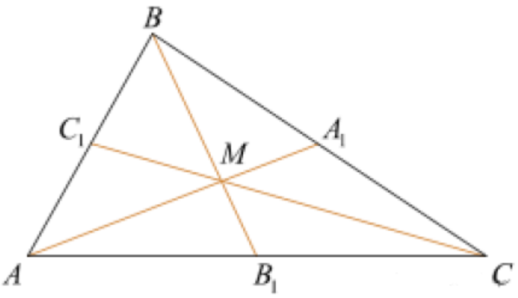
$$\begin{cases}1300m-1100+500n-300=650,\\ 1300m-1100-500n+300=140\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}2600m-2200=790,\\ 1000n-600=510\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=1,15,\\ n=1,11.\end{cases}$$

Следовательно, $q=15$ и $r=11$.

Ответ: $q=15$, $r=11$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задача 17



Решение. а) Медианы треугольника точкой пересечения делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины. Значит,

$$BB_1 = \frac{3}{2}BM = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}AC = \frac{1}{2}AC.$$

Следовательно, треугольники AB_1B и CB_1B равнобедренные, причём $\angle B_1AB = \angle ABB_1$ и $\angle B_1CB = \angle CBB_1$. Сумма всех этих четырёх углов равна 180°. Тогда

$$\angle ABC = \angle ABB_1 + \angle CBB_1 = 90^\circ.$$

Значит, треугольник ABC прямоугольный.

б) Треугольник A_1BA прямоугольный. Поэтому

$$AA_1^2 = A_1B^2 + BA^2 = \frac{1}{4}CB^2 + BA^2.$$

Треугольник C_1BC также прямоугольный. Поэтому

$$CC_1^2 = C_1B^2 + BC^2 = \frac{1}{4}AB^2 + BC^2.$$

Сложим полученные равенства:

$$AA_1^2 + CC_1^2 = \frac{5}{4}AB^2 + \frac{5}{4}BC^2 = \frac{5}{4}(AB^2 + BC^2) = \frac{5}{4}AC^2 = 720.$$

Ответ: б) 720.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0

Максимальный балл	3

Задача 18

Решение. Пусть $t = \cos x$, тогда неравенство запишется в виде

$$|5t + a^2 - 44| + |4t + a - 3| \leqslant 14t + |a^2 + a - 56| + 14.$$

Поскольку $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, необходимо найти все значения a, при которых неравенство выполнено при $-1 \leqslant t \leqslant 1$.

Рассмотрим функции $f(t) = |5t + a^2 - 44| + |4t + a - 3|$ и $g(t) = 14t + |a^2 + a - 56| + 14$. Функция $f(t)$ — кусочно-линейная. Угловой коэффициент её звеньев не превосходит 9. Функция $g(t)$ — линейная с угловым коэффициентом 14. Значит, функция $f(t) - g(t)$ убывающая. Таким образом, если неравенство $f(t) \leqslant g(t)$ выполнено при $t = -1$, то оно выполнено при всех $t \geqslant -1$, а значит, и на отрезке $[-1; 1]$.

При $t = -1$ неравенство принимает вид

$$|a^2 - 49| + |a - 7| \leqslant |a^2 + a - 56| \Leftrightarrow |a - 7| \cdot (|a + 7| - |a + 8| + 1) \leqslant 0.$$

Выражение $|a - 7|$ равно нулю при $a = 7$. При прочих a выражение $|a - 7|$ положительно, и на него можно разделить, не меняя знака неравенства. Получим:

$$|a+7| - |a+8| + 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} a+7-(a+8)+1 \leqslant 0, & \text{при } a \geqslant -7, \\ -(a+7)-(a+8)+1 \leqslant 0, & \text{при } -8 < a < -7, \\ -(a+7)+(a+8)+1 \leqslant 0, & \text{при } a \leqslant -8 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 0 \leqslant 0, & \text{при } a \geqslant -7, \\ a > -7, & \text{при } -8 < a < -7, \\ 2 \leqslant 0, & \text{при } a \leqslant -8 \end{array}\right. \Leftrightarrow a \geqslant -7.$$

Ответ: $[-7; +\infty)$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в решении допущена вычислительная ошибка или оно недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в ходе решения допущена одна ошибка, отличная от вычислительной	2
Получены некоторые верные значения параметра, однако решение содержит более одной ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Максимальный балл	4

Задача 19

Решение. Сразу заметим, что количества хамелеонов разных цветов дают различные остатки от деления на 3, и эта ситуация сохраняется — можно считать, что при встрече количество всех видов хамелеонов уменьшается на 1 (и все остатки по-прежнему разные), а затем количество хамелеонов одного из цветов увеличивается на 3, что не влияет на остатки. Более того, сохраняются разности между остатками. То есть если изначально разность между числом малиновых и числом бурых давала при делении на 3 остаток 1, то это свойство сохранится и в дальнейшем (при «правильном» понимании остатков для отрицательных чисел — например, −10 при делении на 3 дает остаток 2, поскольку $-10=-4\cdot 3+2$).

а) Если встретятся малиновый и бурый хамелеоны, потом снова малиновый и бурый, а потом малиновый и серый, то за эти три встречи число бурых хамелеонов не изменится, число серых вырастет на 3, а число малиновых уменьшится на 3. Повторяя такую последовательность встреч 4 раза, получим требуемое.

б) Количества хамелеонов должны стать равными 60, 0, 0, то есть все должны давать одинаковые остатки от деления на 3, что невозможно.

в) В силу замечания в начале решения, разность между количествами малиновых и бурых хамелеонов при делении на 3 всегда дает остаток 1, поэтому если малиновых хамелеонов 2, то бурых не может быть 0. Значит, серых не более 60-2-1=57.

Такого количества легко добиться, обеспечив 27 встреч между бурым и малиновым хамелеонами.

Ответ: а) да; б) нет; в) 57.

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2
Верно получен один из следующих результатов: − обоснованное решение пункта *а*; − обоснованное решение пункта *б*; − искомая оценка в пункте *в*; − пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4