Вариант 1
Ответы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
17,5	28	34	0,42	0,42	5	-27	6	2	9	2	3

Решения заданий 13-19
Задача 13

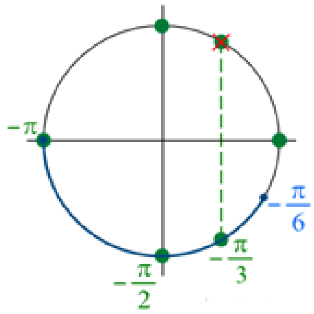
Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$\sin 2x+\sqrt{2\cos x-2\cos^3 x}=0\Leftrightarrow\sqrt{2\cos x\sin^2 x}=-\sin 2x\Leftrightarrow\sqrt{2\cos x\sin^2 x}=-2\sin x\cos x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2\cos x\sin^2 x=4\sin^2 x\cos^2 x,\\ \sin x\cos x\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x\cos x=0,\\ \begin{cases}2\cos x=1,\\ \sin x\cos x<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x\cos x=0,\\ \begin{cases}\cos x=\frac{1}{2},\\ \sin x<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi k}{2},\\ x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k,\end{array}\right.\quad k\in\mathbb{Z}.$$

б) При помощи единичной окружности отберём корни, лежащие на заданном отрезке (см. рис.). В него попадают числа $-\pi,\ -\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{3}$.



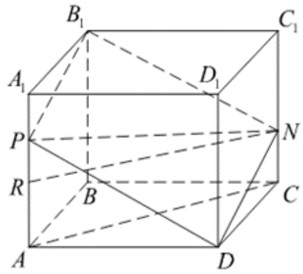
Ответ: а) $x=\frac{\pi k}{2},\ x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $-\pi,\ -\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{3}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задача 14

Решение.

а) Так как боковые грани параллелепипеда попарно параллельны, сторона сечения PD параллельна стороне B_1N, а сторона сечения PB_1 параллельна стороне ND, следовательно, сечение — параллелограмм. Проведём прямую RN параллельно диагонали основания AC. Так как прямые PB_1 и ND параллельны, прямоугольные треугольники PA_1B_1 и NCD — равны. Далее имеем:



$$A_1P = NC = AR = \frac{3}{7}AA_1 = 6,$$
$$PR = 2,$$
$$AC = RN = \frac{PR}{\operatorname{tg}\angle PNR} = 10,$$
$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = 8,$$

а тогда $DN = \sqrt{CD^2 + NC^2} = 10$ и $B_1N = \sqrt{B_1C_1^2 + C_1N^2} = 10$. Таким образом, DPB_1N — ромб.

б) Найдём диагонали ромба:

$$PN = \sqrt{RN^2 + PR^2} = 2\sqrt{26},$$
$$B_1D = \sqrt{BD^2 + BB_1^2} = 2\sqrt{74}.$$

Теперь найдём площадь ромба:

$$S_{DPB_1N} = \frac{1}{2}PN \cdot B_1D = 4\sqrt{481}.$$

Ответ: $4\sqrt{481}$.

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Задача 15

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$-|x+8|-|1-x| \le -3x-6 \Leftrightarrow |x+8|+|1-x| \ge 3x+6.$$

Последнее неравенство заведомо выполняется, если правая часть отрицательна, то есть при $x < -2$.

Если $x \ge -2$, то

$$x+8+|x-1| \ge 3x+6 \Leftrightarrow |x-1| \ge 2(x-1).$$

Это верно тогда и только тогда, когда $x-1 \le 0$. Решение неравенства: $x \le 1$.

Ответ: $(-\infty;\ 1]$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Задача 16

Решение.

Переплата сверх суммы кредита составляет 3690 – 2400 = 1290 (тыс. рублей). Это проценты на долг, образующий по месяцам следующую последовательность (на 15-е число):

Число прошедших месяцев	0	1	2	3	...	$n+1$	$n+2$
Долг	2400	2000	$2000-a$	$2000-2a$	...	$2000-na$	0

По условию задачи $2000 - na = 400$.

Следовательно, $1290 = 0{,}025\cdot(2400 + (2000 + (2000 - a) + \ldots +400))$.

Во внутренних скобках – сумма арифметической прогрессии из $(n + 1)$ слагаемого.

Поэтому $1290 = 0{,}025\cdot\left(2400+\dfrac{(2000+400)(n+1)}{2}\right)=$

$$=0{,}025\cdot 2400\left(1+\frac{n+1}{2}\right)=30\cdot(n+3)\;\Rightarrow\; n+3=\frac{1290}{30}=43\;\Rightarrow\; n=40.$$

Ответ: 40.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

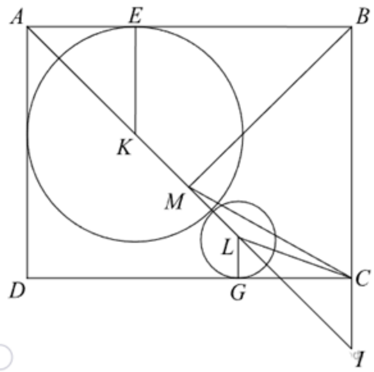
Задача 17

Решение.

а) Пусть первая окружность касается стороны AB в точке E, первая окружность касается второй окружности в точке H, вторая окружность касается стороны CD в точке G. Проекция отрезка KL на сторону AD равна

$$AD - KE - LG = \frac{3\sqrt{2}}{2} = KL \cdot \cos 45^\circ.$$

Это означает, что прямая KL составляет с прямой AD угол 45°. Угол KAD из очевидных соображений тоже равен 45°, а значит, точки A, K, L лежат на одной прямой.



б) Пусть прямая AK и прямая BC пересекаются в точке I. Тогда ABI — равнобедренный треугольник и

$$CI = AB - BC = 3 - 3\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Обозначим h расстояние от точки C до прямой AI. Тогда

$$h = CI \cdot \sin 45^\circ = 3 \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

Заметим, что

$$ML = AL - AM = AK + KL - \frac{1}{2}AI = 2\sqrt{2} + 3 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{2} = 3 - \sqrt{2}.$$

Теперь можно найти площадь треугольника CLM:

$$S = \frac{1}{2} \cdot h \cdot ML = \frac{1}{2} \cdot (3 - \sqrt{2}) \cdot \left(3 \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right) = \frac{12\sqrt{2}-15}{4}.$$

Ответ: б) $\frac{12\sqrt{2}-15}{4}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Задача 18

Решение.

Перепишем уравнение в виде $a^2(x^2+1)^3+(x^3+1)^2=12ax^3$, и поскольку $x=0$ не является его корнем ни при каком a, разделим его на x^3:

$$(a^2+1)\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=12a.$$

Заметим, что если x_0 — корень уравнения, то $\frac{1}{x_0}$ — также его корень. Следовательно, уравнение будет иметь единственное решение, если $x_0=\frac{1}{x_0}$, откуда его единственным возможным корнем может быть $x=-1$ или $x=1$.

В первом случае получаем $8a^2=-12a$, откуда $a=-\frac{3}{2}$ или $a=0$, а во втором — $8a^2+4=12a$, откуда $a=\frac{1}{2}$ или $a=1$.

Подставляя значения $a=-\frac{3}{2}$; $\frac{1}{2}$; 1, в уравнение $(a^2+1)t^3-3t+2-12a=0$, где $t=x+\frac{1}{x}$, $|t|\geqslant 2$, убеждаемся, что при каждом из них оно имеет единственное решение $t=-2$ или $t=2$, а исходное — соответственно единственное решение $x=-1$ или $x=1$.

В случае $a=0$ уравнение $t^3-3t+2=0$ имеет два корня $t=-2$ и $t=1$, но только один из них удовлетворяет условию $|t|\geqslant 2$. Поэтому в данном случае уравнение имеет единственный корень $t=-2$, который дает решение $x=-1$.

Ответ: $-\frac{3}{2}$; 0; $\frac{1}{2}$; 1.

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в решении допущена вычислительная ошибка или оно недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в ходе решения допущена одна ошибка, отличная от вычислительной	2
Получены некоторые верные значения параметра, однако решение содержит более одной ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Задача 19

Решение.

а) Предположим, что продавались всего три книги, которые первоначально стоили 120, 94 и 20 рублей. Средняя цена «выгодных» книг составляет $\frac{94+20}{2}=57$ рублей. После увеличения цены книги стали стоить 130, 104 и 30 рублей. Теперь средняя цена «выгодных» книг составляет 30 рублей.

б) В примере из предыдущего пункта первоначально средняя цена «невыгодных» книг составляет 120 рублей, а после увеличения $\frac{130+104}{2}=117$ рублей.

в) Пусть всего привезли n книг. Первоначально «выгодных» было x книг, после увеличения цены выгодных стало y книг. Средняя цена всех книг после увеличения составляет 120 рублей. Получаем два уравнения: $110n=226(n-x)+81x$ и $120n=210(n-y)+90y$, откуда $116n=145x$, то есть $4n=5x$, и $90n=120y$, то есть $3n=4y$. Поэтому число n кратно 4 и 5, то есть кратно 20. Таким образом, $n\geq 20$.

Покажем, что возможен случай $n=20$. Пусть первоначально было 15 книг по 80 рублей, одна книга — по 96 рублей и четыре книги по 226 рублей. Тогда средняя цена всех книг 110 рублей, средняя цена книг с биркой 81 рубль, а средняя цена книг без бирки — 226 рублей. После увеличения цены средняя цена книг с биркой «выгодно» составила 90 рублей, а средняя цена книг без бирки — 210 рублей. Все условия выполнены.

Ответ: а) да; б) да; в) 20.

Приведём другое решение.

а,б) Если изначально были три книги с ценами 5, 95 и 995 рублей, то после повышения цен они стали стоить 15, 105, 1005 рублей. Тогда средняя цена выгодных книг стала 15 (а была $\frac{5+95}{2}=50$), а средняя цена прочих стала $\frac{105+1005}{2}=555$ (а была 995).

в) Пусть было x книг ценой 100 рублей и выше, y книг ценой от 90 до 99 рублей и z книг ценой менее 90 рублей. Книги из второй группы при повышении цены лишаются бирки «выгодно». Тогда суммарная цена всех книг составляла $110\cdot(x+y+z)$, суммарная цена выгодных книг — $81\cdot(y+z)$, суммарная цена книг первой группы — $226x$, откуда

$$110(x+y+z)=226x+81(y+z)\Leftrightarrow 29(y+z)=116x\Leftrightarrow y+z=4x\Leftrightarrow x+y+z=5x.$$

Значит, общее число книг кратно 5. После повышения суммарная цена составляла $120\cdot(x+y+z)$ (каждая книга подорожала на 10 рублей). При этом суммарная цена книг третьей группы составила $90z$, а суммарная цена прочих — $210\cdot(x+y)$, откуда

$$120(x+y+z)=210(x+y)+90z\Leftrightarrow 30z=90(x+y)\Leftrightarrow z=3(x+y)\Leftrightarrow x+y+z=4(x+y).$$

Значит, общее число книг кратно 4. Поэтому общее число книг не может быть меньше 20. 20 книг быть может — пусть $y=1$, $x=4$, $z=15$, причем изначально были 4 книги по 226 рублей, 15 книг по 80 рублей и одна книга за 96 рублей, тогда все условия задачи выполнены.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующий результатов: — обоснованное решение пункта *а*; — обоснованное решение пункта *б*; — оценка в пункте *в*; — пример в пункте *в*, обеспечивающий точность найденной оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4