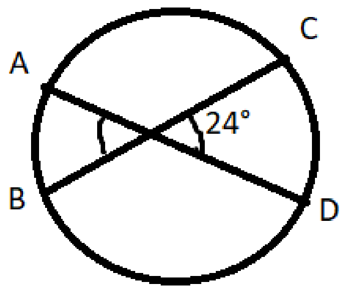
Какие-то задачки для тренировки прямо перед ЕГЭ. Составители подборки - Коваль Максим Олегович и Вотяков Александр Романович

1.Фармацевтическая компания фасует таблетки для успеха на ЕГЭ. В одном пакете не более 10г, всего требуется расфасовать 72г. Сколько пакетов понадобится для того, чтобы расфасовать всё?

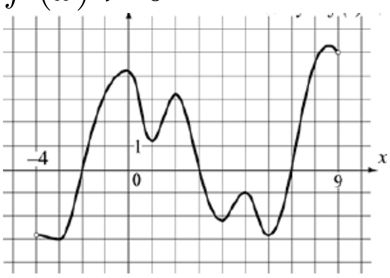
4. Есть делегации из разных стран: из одной 2 человека, из другой 2 человека, из Польши 6 человек. Какова вероятность, что первыми будут выступать на конференции поляки?

5. $\sqrt{2x+37} = 7$

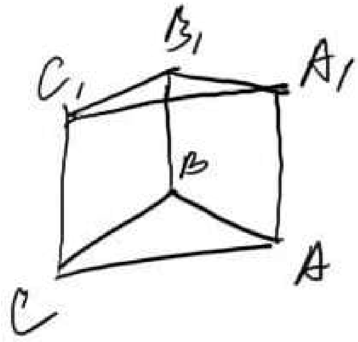
6.Найти угол BCD



7.Дан график функции $y = f(x)$. Найти количество целых точек, в которых $f'(x) > 0$



8.$ABCA_1B_1C_1$ - правильная треугольная призма. $S_{\triangle ABC} = 9$, $AA_1 = BB_1 = CC_1 = 6$. Найти $V_{ABCA_1B_1}$



9. Найти $\operatorname{tg}(\alpha)$, если $\cos(\alpha) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ и $\alpha \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$

10. Задано уравнение: $A = \alpha\nu T \log_2(\frac{V_1}{V_2})$. $\alpha = 11,5$, $\nu = 3$, $T = 300$, $V_1 = 32$ литра. Найти V_2

11. Катер едет против течения 168км за время t. Потом он едет обратно по течению, и тратит на обратный путь на два часа меньше. Найти собственную скорость катера, если скорость течения=1км/ч

12. Найти точку максимума функции $y = (8 - x)e^{x+8}$

13.1 $2\cos^2(-\frac{\pi}{2} - x) + \sqrt{3}\sin(2x) = 0$

13.2 а) $2\cos^2(x - \frac{3\pi}{2}) - \sin(x - \pi) = 0$
б) $x \in \left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$ **13.3** а) $\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(\frac{\pi}{2} + x) + 1 = 0$

14.1 Дана правильная 4-х угольная пирамида $SABCD$. Сторона основания равна 8, боковое ребро равно 9. Точки M и K расположены на AB и SB соответственно так, что $SK1, AM = 1$. Есть плоскость α, которая содержит точки K и M. Она перпендикулярно основанию $ABCD$. Надо доказать, что C лежит на этой плоскости, и найти площадь сечения плосокстью фигуры.

14.2 Дана правильная 4-х угольная пирамида $SABCD$ (S-вершина). Сторона основания равна 7, боковое ребро равно 5. Точка $M \in AB$ так, что $AM : MB = 4 : 3$. Точка $K \in SB$ так, что $SK : KB = 2 : 3$. Сечение плоскостью α таково, что $\alpha \perp (ABC)$ и $K, M \in \alpha$

а) Доказать, что $C \in \alpha$

б) Найти площадь сечения пирамиды плоскостью α

14.3 $SABC$ - правильная треугольная пирамида с вершиной S. Точка $M \in AB$ так, что $AM = 4$, $MB = 2$. Точка $K \in SB$ так, что $SK : KB = 1 : 3$, $SA = \sqrt{21}$

а) Доказать, что плоскость (MCK) перпендикулярна плоскости (ABC)

б) Найти объем пирамиды $CKMB$

14.4 Правильная 6-угольная пирамида с вершиной S, сторона основания $ABCDEF$ равна 4, боковое ребро пирамиды 10. Через точку M - середину AB и D проведена плоскость перпендикулярно основанию. Она пересекает SC в точке K.

а) Требуется доказать, что $MK = DK$

б) Найти объём $MDCK$

15.1 $x^2 \cdot log_{625}(3-x) \leq log_5(x^2-6x+9)$

Подсказка: обратите внимание, что $3-x>0$*, следовательно, аргумент логарифма в правой части удобнее представить не как* $(x-3)^2$*, а как* $(3-x)^2$*, потому что когда двойку из логарифма сносите как степень, надо бы чтобы оставшееся выражение было положительным. Модуль ставить не хочется, а тут нам такую приятную штуку в левой части подогнали, воспользуемся.*

15.2 $x^2 \cdot log_{243}(4-x) \leq log_3(x^2-8x+16)$

16.1 Треугольник ABC, $AC_1 : C_1B = 8 : 3$, $BA_1 : A_1C = 1 : 2$, $AB_1 : B_1C = 1 : 3$. Отрезки BB_1 и CC_1 пересекаются в точке D.

а) Доказать, что ADA_1B_1 - параллелограмм

б) Чему равен радиус описанной окружности, если $AD \perp BC$, $AC = 16$, $BC = 15$

Подсказка: теорема Ван-Обеля и Чевы, Менелая

Решение: а) продлеваем AD до пересечения с BC в точке A_2. Записываем Чевы для A_2, B_1, C_1, получаем $CA_2 : A_2B = 8 : 1$. Отсюда $BA_2 = t$, $A_1A2 = 2t$, $CA_1 = 6t$. Тогда по теореме Фалеса $A_1B_1||AD$.

Записываем теорему Менелая для прямой AA_2 и треугольника B_1BC, получаем $BD : DB1 = 1 : 2$. Также $BA_1 : CA_1 = 1 : 2$, откуда по Фалесу имеем параллельность $DA_1||AB_1$, ч.т.д.

16.2 Треугольник ABC, $AC_1 : C_1B = 6 : 5$, $BA_1 : A_1C = 2 : 1$, $AB_1 : B_1C = 3 : 2$. Отрезки BB_1 и CC_1 пересекаются в точке D.

а) Доказать, что ADA_1B_1 - параллелограмм

б) Чему равен радиус описанной окружности, если $AD \perp BC$, $AC = 25$, $BC = 21$

(Иркутск)

16.3 Треугольник ABC, прямоугольный, $\angle C = 90^\circ$. На стороне AC выбрана точка N так, что $CN = CB$. На продолжении стороны BC за точку C выбрана точка M такая, что $CM = CA$. Q - середина AB, P - середина ML.

а) Доказать, что $CQ \perp CP$

б) MN пересекает AB в точке L. BN пересекает AM в точке K. Найти KL, если $AC = 3$, $BC = 1$

17.1 Кредит, первые три года платят только проценты (долг=S), затем за два года двумя равными платежами полностью гасят. S=825 тыс., ставка 20% годовых. Чему равна сумма выплат?

17.2 Кредит на три года, выплачивается равными платежами

17.3 В июле в 2026 берут кредит на 5 лет сумма 220тыс.р. $r\%$ процент банка. В июле 2027,2028,2029 долг 220тыс.р. В 2030и 2031 погашен равными платежами. Общая сумма выплат=420 (или 520) тыс. руб. Найти r

18.1 При каких значениях параметра а система имеет два решения?

$$\begin{cases} log_4(16 - y^2) = log_4(16 - a^2x^2) \\ x^2 + y^2 = 10x + 4y \end{cases}$$

Подсказка: в первом уравнении после записи ОДЗ логарифмы можно снимать, а второе уравнение - окружность (перенесли в левую часть всё и вынесли полные квадраты

18.2 При каких значениях параметра а система имеет два решения?

$$\begin{cases} log_5(y^2 - 16) = log_5(16 - a^2y^2) \\ x^2 - y^2 = 6y - 4 \end{cases}$$

Подсказка: 1) При икс равном нулю - отдельно рассмотреть, найти а при которых два решения по игреку получится. т.е. решения $(0, y_1)$ *и* $(0, y_2)$ *2) При других икс в силу чётности второго уравнения по иксу если подходит* (x, y)*, то обяз подойдёт* $(-x, y)$*. Так что во втором уравнении после переноса* y^2 *в правую часть правая часть должна быть положительная, причём определена однозначно (иначе не два решения будет). Первое уравнение имеет два решения, значит одно из них должно не подойти в ОДЗ, вуаля*

18.3 При каких значениях a ровно 2 решения?

$$\begin{cases} \sqrt{a - x^2} = \sqrt{a - y^2} \\ x^2 + y^2 = 2x + 4y \end{cases}$$

19.1 Даны различные натуральные числа, их разделили на 3 группы. В первой группе всем числам приписали справа 4, во второй - 7, третью не трогали.
а) Могла ли сумма всех чисел увеличиться в 3 раза?
б) Могла ли сумма чисел увеличиться в 17 раз
Подсказка: что означает "приписать к числу цифру 4 справа"? Это означает: умножить число на десять (чтобы приписать к нему нолик) и затем прибавить 4 (чтобы вместо нолика получилось 4). То есть, "приписать 4" это $x \to 10x + 4$. *Подумайте над этим.*

19.2 На доске написаны различные натуральные числа, состоящие только из цифр 3 и 8.
а)Может ли сумма равняться 94?
б) Могла ли сумма равняться 248?
в) Минимальное количество чисел, сумма которых равна 2659?
Подсказка: что означает "приписать к числу цифру 4 справа"? Это означает: умножить число на десять (чтобы приписать к нему нолик) и затем прибавить 4 (чтобы вместо нолика получилось 4). То есть, "приписать 4" это $x \to 10x + 4$. *Подумайте над этим.*

19.3 Написаны различные числа составленные из 1 и 6, можно и одно число.
А) может ли быть сумма 173
Б) может ли быть 109
В) какое минимальное количество чисел если их сумма равна 1021
19.4 На доске записаны n единиц
Между ними ставят "+"и находят сумму
Например, для 10 единиц 1+1+111+11+11+1=136
А) может ли получиться 141 для n=60
Б) может ли получиться 141 при n=80
В) какое наименьшее n для числа 141