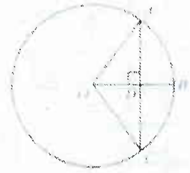
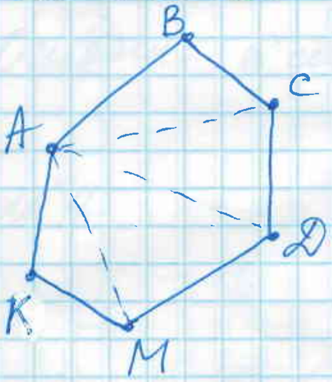
Билет №1

1) Дайте определение многоугольника, вершины, стороны, диагонали и периметра многоугольника. Запишите формулу суммы углов выпуклого многоугольника
2) Докажите теорему о средней линии треугольника.
3) Радиус *OB* окружности с центром в точке *O* пересекает хорду *AC* в точке *D* и перпендикулярен ей. Найдите длину хорды *AC*, если $BD = 1$ см, а радиус окружности равен 5 см.

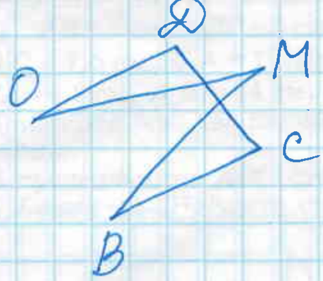


4) Периметр прямоугольника равен 56, а диагональ равна 20. Найдите площадь этого прямоугольника.

№1 О: Многоугольник это замкнутая ломаная, у которой несмежные звенья не имеют общих точек.



АВСДМК – многоугольник



ОДМСВ – не многоугольник

О: Вершина м/ка это точка, в которой соединяются 2е смежные стороны м/ка.

О: Сторона м/ка это звено ломаной.

О: Диагональ м/ка – это отрезок соединяющий две не соседние вершины м/ка (АС; АМ; АД)

О: Периметр мн/ка это сумма длин всех сторон мн/ка

Формула суммы углов выпуклого многоугольника $(n-2)\cdot 180°$ n-кол-во сторон или углов

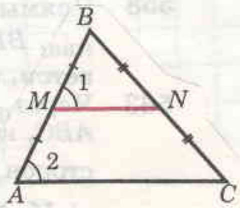
62 Средняя линия треугольника

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон. Докажем теорему о средней линии треугольника.

Теорема

Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.

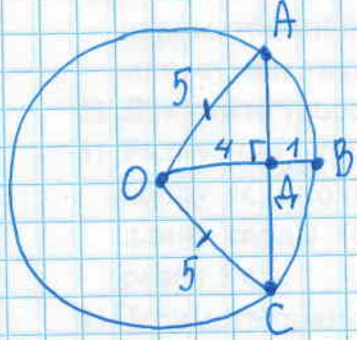
Доказательство



Пусть MN — средняя линия треугольника ABC (рис. 195). Докажем, что $MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2}AC$.

Треугольники BMN и BAC подобны по второму признаку подобия треугольников ($\angle B$ — общий, $\frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{2}$), поэтому $\angle 1 = \angle 2$ и $\frac{MN}{AC} = \frac{1}{2}$. Из равенства $\angle 1 = \angle 2$ следует, что $MN \parallel AC$ (объясните почему), а из второго равенства, — что $MN = \frac{1}{2}AC$. Теорема доказана.

№3



Найти: AC - ?

Решение: 1) $OB = 5$, $OB = OD + DB$

$5 = OD + 1$

$OD = 4$ см

2) Р/м $\triangle AOD$ - прямоугольный т.к. $OB \perp AC$

$AO = 5$ см, $OD = 4$ см, $AD = 3$ $\triangle AOD$ египетский

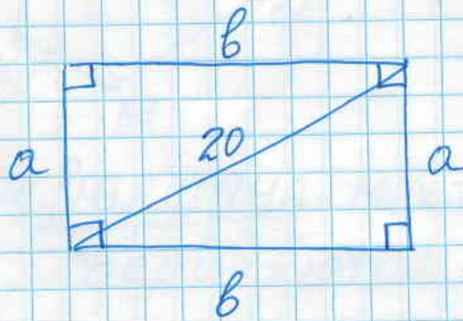
3) Р/м $\triangle AOD = \triangle ODC$ (по катету и гипотен.): а) OD - общая

б) $OA = OC = 5$ т.к. радиусы окружности

4) $AC = AD + DC = 3 + 3 = 6$ см

Ответ: 6 см

№4



Найти: $S_{\square}$ - ?

Решение: 1) $P_{\square} = 56$

$P_{\square} = (a+b) \cdot 2 = 56$

2) По т. Пифагора

$a^2 + b^2 = 20^2$

$$\begin{cases} (a+b)\cdot 2 = 56 \quad |:2 \\ a^2 + b^2 = 20^2 \end{cases} \quad \begin{cases} a+b = 28 \\ a^2+b^2 = 400 \end{cases} \quad \begin{cases} a = (28-b) \\ (28-b)^2 + b^2 = 400 \end{cases}$$

$784 + b^2 - 56b + b^2 - 400 = 0$

$2b^2 - 56b + 384 = 0 \quad |:2$

$b^2 - 28b + 192 = 0$

$b_1 + b_2 = 28$

$b_1 \cdot b_2 = 192 \begin{smallmatrix} \nearrow 12 \\ \searrow 16 \end{smallmatrix}$

$b_1 = 12 \quad b_2 = 16$

$a = 28 - b$

$a_1 = 28 - 12$

$a_1 = 16$

$a_2 = 28 - 16$

$a_2 = 12$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a_1 = 16 \\ b_1 = 12 \end{cases} \\ \begin{cases} a_2 = 12 \\ b_2 = 16 \end{cases} \end{array}\right.$$

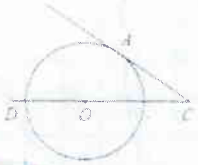
$S_{\square} = 12 \cdot 16 = 192$ ед^2

Ответ: 192.

Билет №2

1) Дайте определение и свойства параллелограмма.
2) Докажите свойство медиан треугольника
3) Проектор полностью освещает экран A высотой 80 см, расположенный на расстоянии 250 см от проектора. На каком наименьшем расстоянии (в сантиметрах) от проектора нужно расположить экран B высотой 160 см, чтобы он был полностью освещён, если настройки проектора остаются неизменными?

4) Найдите угол ACO, если его сторона CA касается окружности, O – центр окружности, а дуга AD окружности, заключённая внутри этого угла, равна 100°.



№1

О: Параллелограмм – это 4х угольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

$ABCD$ – параллелограмм

$AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$.

Св/ва: 1)/2) В п/ме противоположные стороны и углы равны ($AB = CD$, $BC = AD$, $\angle A = \angle C$, $\angle D = \angle B$)

3) Диагонали п/ма в точке пересечения делятся пополам ($AC \cap BD$ в (.) O и $BO = OD$, $AO = OC$)

4) Диагональ п/ма делит его на два равных Δ-ка

5) Биссектриса угла п/ма отсекает от него равнобедренный Δк

6) Сумма углов, прилежащих к одной стороне равна 180° ($\angle A + \angle B = 180°$, $\angle C + \angle D = 180°$ и т.д.)

№2 Свойство медиан треугольника:

Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2 : 1 считая от вершины

Решение

Рассмотрим произвольный треугольник ABC. Обозначим буквой O точку пересечения его медиан AA_1 и BB_1 и проведем среднюю линию A_1B_1 этого треугольника (рис. 196). Отрезок A_1B_1 параллелен стороне AB, поэтому углы 1 и 2, а также углы 3 и 4 равны как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых AB и A_1B_1 секущими AA_1 и BB_1. Следовательно, треугольники AOB и A_1OB_1 подобны по двум углам, и, значит, их стороны пропорциональны:

$$\frac{AO}{A_1O} = \frac{BO}{B_1O} = \frac{AB}{A_1B_1}.$$

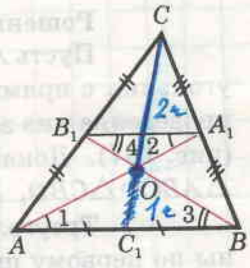


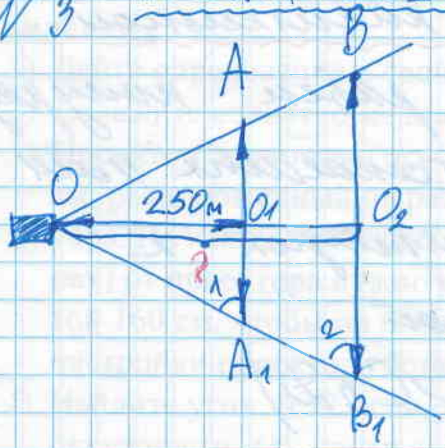
Рис. 196

Но $AB = 2A_1B_1$, поэтому $AO = 2A_1O$ и $BO = 2B_1O$. Таким образом, точка O пересечения медиан AA_1 и BB_1 делит каждую из них в отношении $2:1$, считая от вершины.

Аналогично доказывается, что точка пересечения медиан BB_1 и CC_1 делит каждую из них в отношении $2:1$, считая от вершины, и, следовательно, совпадает с точкой O.

Итак, все три медианы треугольника ABC пересекаются в точке O и делятся ею в отношении $2:1$, считая от вершины.

№3 Найти: OO_2 - ? 1) способ



Р/м ΔAA_1O и ΔOBB_1 они подобны
/1) $\angle O$ общий ; 2) $\angle 1 = \angle 2$ соответвенные/
$AA_1 \parallel BB_1$, A_1B_1 секущая
$AA_1 = 80м$ $BB_1 = 160м$
Найдём k подобие $k = 160:80 = 2$
(коэффициент)

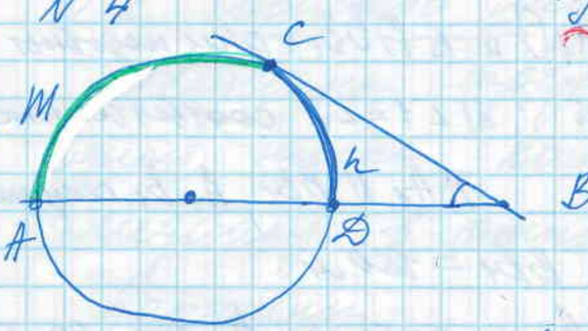
Тогда искомое расстояние $OO_2 = OO_1 \cdot 2 = 250 \cdot 2 = 500м$

Ответ: 500м

2 способ Р/м ΔAA_1O и ΔOBB_1 Д/м что они подобны
1) $\angle O$ общий 2) $\angle 1 = \angle 2$ соответвенные $AA_1 \parallel BB_1$
A_1B_1 секущая по условию, значит $\Delta AA_1O \sim \Delta OBB_1$,
тогда $\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{OO_1}{OO_2}$ $\frac{80}{160} = \frac{250}{x}$ $x = \frac{\overset{2}{\cancel{160}} \cdot 250}{\underset{1}{\cancel{80}}} = 500м$

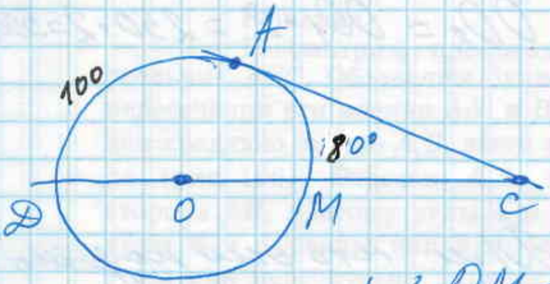
Ответ: 500м

№4



Угол между касательной и секущей равен полуразности отсекаемых ими дуг, прилежащих к касательной

$\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot (\smile AmC - \smile CnD)$



Найти: $\angle ACO$ - ?

Решение: Секущая DC проходит через диаметр DM, значит

$\smile DM = 180°$ $\smile AM = 180° - 100° = 80°$

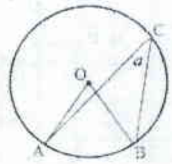
$\angle ACO = \frac{1}{2} \cdot (\smile AD - \smile AM) = \frac{1}{2} \cdot (100° - 80°) = 10°$

20°

Ответ: 10°

Билет №3

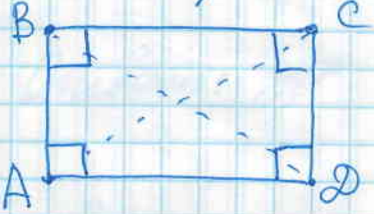
1) Дайте определение и назовите свойства прямоугольника.
2) Докажите теорему Пифагора.
3) Найдите величину (в градусах) вписанного угла α, опирающегося на хорду AB, равную радиусу окружности.



4) Прямая, параллельная основаниям MP и NK трапеции $MNKP$, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции и пересекает её боковые стороны MN и KP в точках A и B соответственно. Найдите длину отрезка AB, если $MP = 40$см, $NK = 24$см.

№1

О: Прямоугольник это параллелограмм, у которого все углы прямые.



ABCD – прямоугольник – параллелог/м

$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$

Св/ва: Прямоугольник обладает всеми св/ми паралл/ма. /6шт/

В прямоугольнике диагонали равны.
($AC = BD$)

№2

Теорема

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Доказательство

Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c (рис. 186, *а*). Докажем, что $c^2 = a^2 + b^2$.

Достроим треугольник до квадрата со стороной $a + b$ так, как показано на рисунке 186, *б*. Площадь S этого квадрата равна $(a + b)^2$. С другой стороны, этот квадрат составлен из четырех равных прямоугольных треугольников, площадь каждого из которых равна $\frac{1}{2}ab$, и квадрата со стороной c, поэтому

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2}ab + c^2 = 2ab + c^2.$$

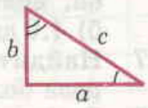
Таким образом,

$$(a + b)^2 = 2ab + c^2,$$

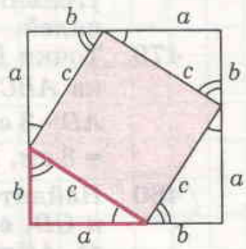
откуда

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Теорема доказана.



а)

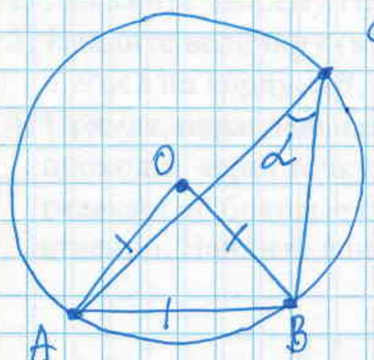


$(a+b)^2 = 4\left(\frac{1}{2}ab\right) + c^2$

б)

Рис. 186

№3 Найти: $\angle\alpha$ -?



Решение: AB = хорда = радиус значит $\triangle AOB$ – равносторонний значит все углы по $60°$

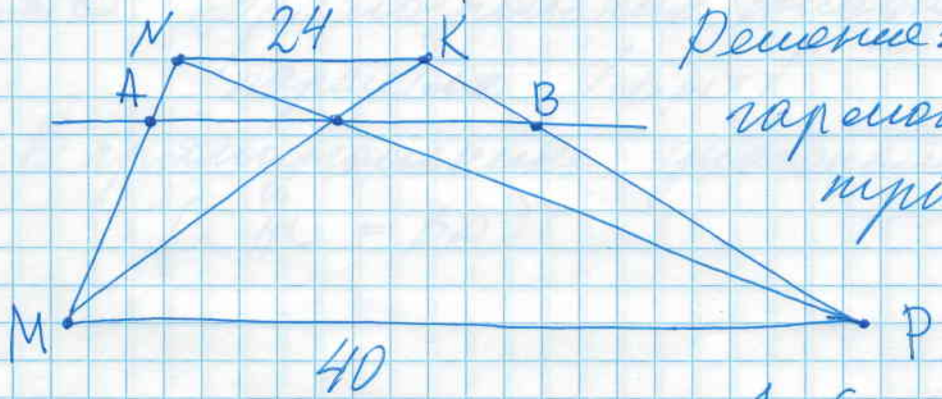
$\angle AOB$ – центральный $= 60°$, тогда $\smile AB = 60°$

$\angle\alpha$ - вписанный равен половине дуги на которую опирается

$$\angle\alpha = \frac{1}{2}\smile AB = \frac{1}{2}\cdot 60° = 30°$$

Ответ: $30°$

№4 Найти: AB -?



Решение: AB – среднее гармоническое трапеции

$$AB = \frac{2\cdot a\cdot b}{a+b}$$

$$AB = \frac{2\cdot 24\cdot 40}{24+40} = \frac{\cancel{2}^{1}\cdot\cancel{24}^{6}\cdot\cancel{40}^{5}}{\cancel{64}_{\cancel{32}_{\cancel{4}_{1}}}} = 30$$

Ответ: 30 см.

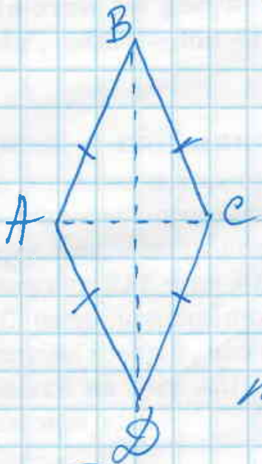
<u>Среднее гармоническое трапеции</u> – это отрезок параллельный основаниям и проходящий через точку пересечения диагоналей трапеции.

Билет №4

1) Дайте определение и назовите свойства ромба.
2) Докажите теорему о вписанном угле (любой частный случай).
3) Два парохода вышли из порта, следуя один на север, другой на запад. Скорости их равны соответственно 15 км/ч и 20 км/ч. Какое расстояние (в километрах) будет между ними через 2 часа?
4) В треугольнике ABC углы A и C равны 20° и 60° соответственно. Найдите угол между высотой BH и биссектрисой BD.

№1

О: Ромб это параллелограмм, у которого все стороны равны.



ABCD – ромб – параллелограмм, где AB = BC = DC = AD.

Св/ва: Ромб обладает всеми свойствами параллелограмма.

1) Диагонали ромба взаимноперпендикулярны $AC \perp BD$
2) Диагонали ромба делят углы пополам (яв/ся биссектрисами углов)

71 Теорема о вписанном угле

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность, называется **вписанным углом**.

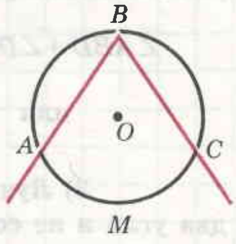


Рис. 217

На рисунке 217 угол ABC вписанный, дуга AMC расположена внутри этого угла. В таком случае говорят, что вписанный угол ABC **опирается на дугу** AMC. Докажем теорему о вписанном угле.

Теорема

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.

Доказательство

Пусть $\angle ABC$ — вписанный угол окружности с центром O, опирающийся на дугу AC (рис. 218). Докажем, что $\angle ABC = \frac{1}{2}\smile AC$. Рассмотрим три возможных случая расположения луча BO относительно угла ABC.

1) **Луч BO совпадает с одной из сторон угла ABC**, например со стороной BC (рис. 218, *а*). В этом случае дуга AC меньше полуокружности, поэтому $\angle AOC = \smile AC$. Так как угол AOC — внешний угол равнобедренного треугольника ABO, а углы 1 и 2 при основании равнобедренного треугольника равны, то

$$\angle AOC = \angle 1 + \angle 2 = 2\angle 1.$$

Отсюда следует, что

$$2\angle 1 = \smile AC \text{ или } \angle ABC = \angle 1 = \frac{1}{2}\smile AC.$$

2) **Луч BO делит угол ABC на два угла.** В этом случае луч BO пересекает дугу AC в некоторой точке D (рис. 218, *б*). Точка D разделяет дугу AC на две дуги: $\smile AD$ и $\smile DC$. По доказанному в п. 1 $\angle ABD = \frac{1}{2}\smile AD$ и $\angle DBC = \frac{1}{2}\smile DC$. Складывая эти равенства попарно, получаем:

$$\angle ABD + \angle DBC = \frac{1}{2}\smile AD + \frac{1}{2}\smile DC,$$

$$\text{или } \angle ABC = \frac{1}{2}\smile AC.$$

3) **Луч BO не делит угол ABC на два угла и не совпадает со стороной этого угла.** Для этого случая, пользуясь рисунком 218, *в*, проведите доказательство самостоятельно.

Рис. 218

Следствие 1

Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны (рис. 219).

Следствие 2

Вписанный угол, опирающийся на полуокружность, — прямой (рис. 220).

Используя следствие 1, докажем теорему о произведении отрезков пересекающихся хорд.

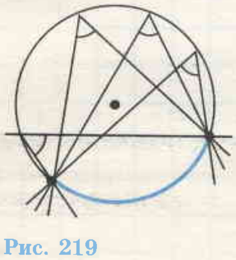


Рис. 219

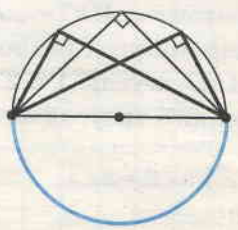
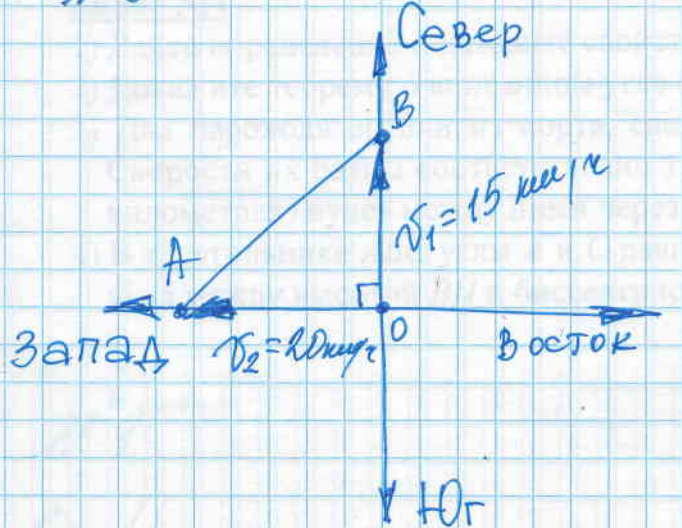


Рис. 220

№3



Найти: S через 2 часа-?

Решение: Найдём S между пароходами через 1 час по т. Пифагора

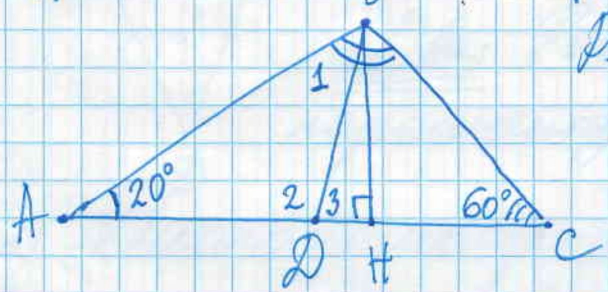
$AB = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{225 + 400}$

$= \sqrt{625} = 25$ км - через 1ч

через 2ч $25 \cdot 2 = 50$ км

Ответ: 50 км

№4



Найти $\angle DBH$-?

Решение: Р/м $\triangle ABC$

$\angle B = 180° - \angle A - \angle C =$

$= 180° - 20° - 60° = 100°$

$\angle B = 100°$

BD - биссектриса $\angle B$, значит $\angle 1 = \frac{1}{2}\angle B = \frac{1}{2} \cdot 100° = 50°$

Р/м $\triangle ABD$ $\angle 2 = 180° - \angle A - \angle 1 = 180° - 20° - 50° = 110°$

$\angle ADB$ и $\angle BDH$ - смежные углы

$\angle BDH = 180° - 110° = 70°$

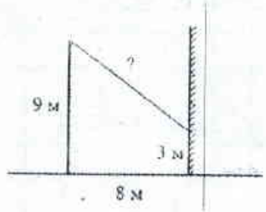
Р/м $\triangle BDH$ - прямоугольный, т.к BH - высота

$\angle DBH = 90° - 70° = 20°$

Ответ: 20°

Билет №5

1) Дайте определение трапеции. Назовите виды трапеций.
2) Докажите свойство отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки.
3) От столба высотой 9 м к дому натянут провод, который крепится на высоте 3 м от земли (см. рисунок). Расстояние от дома до столба 8 м. Вычислите длину провода.



4) Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M. Найдите MC, если $AB = 16$, $DC = 24$, $AC = 25$.

№1

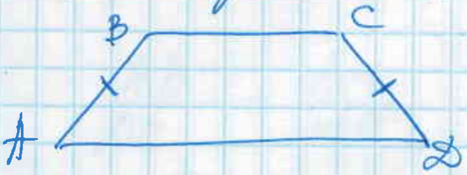
О: ~~Трапеция~~ Трапеция это 4х угольник, у которого две стороны параллельны, а две не параллельны.

AB и CD – боковые стороны

BC ∥ AD – основание

Виды трапеций

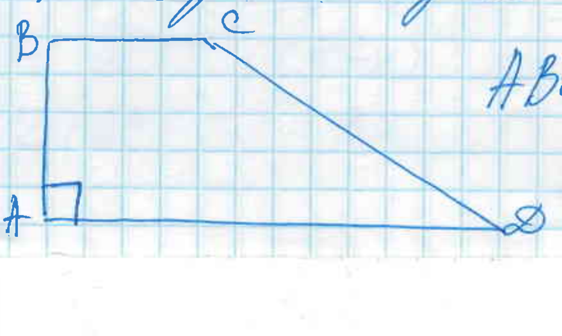
О: Равнобедренная трапеция – трапеция у которой боковые стороны равны



ABCD – равнобедренная трапеция

BC ∥ AD, AB = CD

О: Прямоугольная трапеция – трапеция у которой один угол прямой.



ABCD – прямоугольная трапеция

∠A прямой.

69 Касательная к окружности

Мы доказали, что прямая и окружность могут иметь одну или две общие точки и могут **не иметь ни одной общей точки.**

Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется касательной к окружности, а их общая точка называется точкой касания прямой и окружности. На рисунке 212 прямая p — касательная к окружности с центром O, A — точка касания.

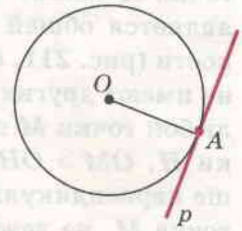


Рис. 212

Докажем теорему о свойстве касательной к окружности.

Теорема

Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.

Рассмотрим две касательные к окружности с центром O, проходящие через точку A и касающиеся окружности в точках B и C (рис. 213). Отрезки AB и AC назовем **отрезками касательных, проведенными из точки** A. Они обладают следующим свойством:

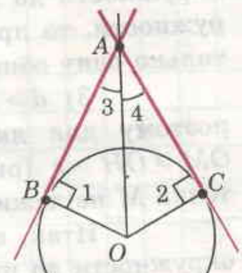
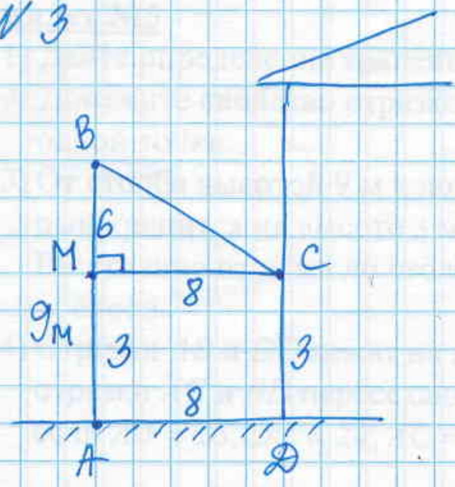


Рис. 213

Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

Для доказательства этого утверждения обратимся к рисунку 213. По теореме о свойстве касательной углы 1 и 2 прямые, поэтому треугольники ABO и ACO прямоугольные. Они равны, так как имеют общую гипотенузу OA и равные катеты OB и OC. Следовательно, $AB=AC$ и $\angle 3=\angle 4$, что и требовалось доказать.

№3



Найти: BC-?

Решение: Построим MC ∥ AD

$AB = 9$, $BM = AB - AM = 9 - 3 = 6$

Р/м △MBC – прямоугольный

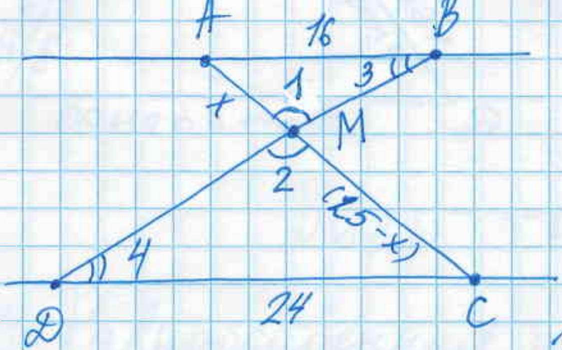
по т. Пифагора

$BC = \sqrt{6^2+8^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$м

$BC = 10$м

Ответ: 10м

№4



Найти: MC –?

Решение: Д/м что △AMB ∾ △DMC

1) ∠1 = ∠2 т.к вертикальные

2) ∠3 = ∠4 – они накрест лежащие AB ∥ DC, AB – секущая,

значит △AMB ∾ △DMC.

Пусть $AM = x$, $MC = (25-x)$, тогда

$$\frac{AB}{DC} = \frac{AM}{MC}$$

$$\frac{\cancel{16}^{2}}{\cancel{24}_{3}} = \frac{x}{(25-x)}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{x}{(25-x)}$$

$2\cdot(25-x) = 3x$

$50 - 2x = 3x$

$-2x - 3x = -50$

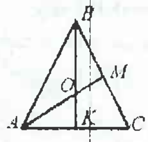
$-5x = -50 \quad |:(-5)$

$x = 10$

$MC = 25 - 10 = 15$ Ответ: 15.

Билет №6

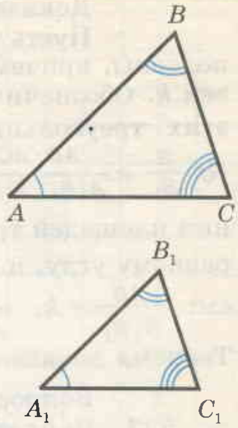
1) Дайте определение подобных треугольников. Назовите признаки подобия треугольников.
2) Докажите признак параллелограмма (по точке пересечения диагоналей).
3) В равностороннем треугольнике ABC медианы BK и AM пересекаются в точке O. Найдите $\angle AOK$.



4) Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите AC, если диаметр окружности равен 7,5, а AB = 2.

№1

Пусть у двух треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ углы соответственно равны: $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C_1$. В этом случае стороны AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CA и C_1A_1 называются **сходственными** (рис. 188).



AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CA и C_1A_1 – сходственные стороны

Рис. 188

Определение

Два треугольника называются **подобными**, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого.

Другими словами, два треугольника подобны, если для них можно ввести обозначения ABC и $A_1B_1C_1$ так, что

$$\angle A=\angle A_1,\ \angle B=\angle B_1,\ \angle C=\angle C_1, \quad (1)$$

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CA}{C_1A_1}=k. \quad (2)$$

Число k, равное отношению сходственных сторон подобных треугольников, называется **коэффициентом подобия**.

Подобие треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ обозначается так: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. На рисунке 188 изображены подобные треугольники.

1 признак

Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны.

Если $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$

2 признак

Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

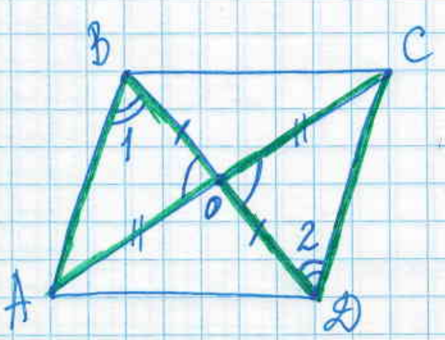
Если $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$ $\angle A=\angle A_1$, то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$

3 признак

Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого, то такие треугольники подобны.

Если $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{BC}{B_1C_1}$, то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$

№2

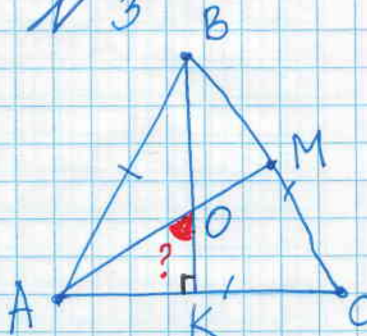


3^0. Если в четырехугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм.

Рассмотрим четырехугольник $ABCD$, в котором диагонали AC и BD пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам (см. рис. 159). Треугольники AOB и COD равны по первому признаку равенства треугольников ($AO=OC$, $BO=OD$ по условию, $\angle AOB=\angle COD$ как вертикальные углы), поэтому $AB=CD$ и $\angle 1=\angle 2$. Из равенства углов 1 и 2 следует, что $AB \parallel CD$.

Итак, в четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны и параллельны, значит, по признаку 1^0 четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

№3



Найти: ∠AOK – ?

Решение: ΔABC – равносторонний значит медианы, биссектрисы и высоты проведённые к сторонам будут равны

AM – биссектриса ∠A, тогда ∠OAK = 60°:2 = 30°

BK – высота к AC, тогда ∠AKO = 90°

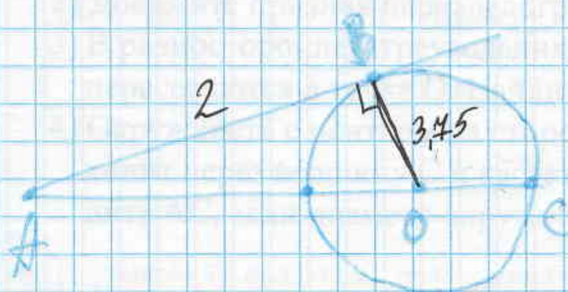
Р/см ΔAOK – прямоугольный

∠AOK = 90° – 30° = 60°

Ответ: 60°

№ 4

Найти: AC, е $d = 7{,}5$, $AB = 2$



Решение: $AC = AO + OC$

$OC = d : 2 = 7{,}5 : 2 = 3{,}75$

$AB \perp BO$, значит $\triangle ABO$ прямоугольный

По т. Пифагора $AO = \sqrt{2^2 + 3{,}75^2} =$

$= \sqrt{4 + 14{,}0625} = \sqrt{18{,}0625} = \sqrt{25 \cdot 25 \cdot 17 \cdot 17 \cdot 0{,}0001} =$

$= \overset{425}{25 \cdot 17} \cdot 0{,}01 = 4{,}25$

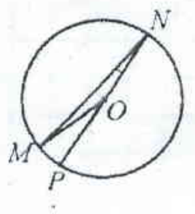
$AO = 4{,}25$

$AC = 3{,}75 + 4{,}25 = 8$

Ответ: 8

Билет №7

1) Дайте определение синуса, косинуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника.
2) Докажите свойство диагоналей параллелограмма.
3) Найдите градусную меру ∠MON, если известно, NP – диаметр, а градусная мера ∠MNP равна 18°.
4) В треугольнике ABC отмечены середины M и N сторон BC и AC соответственно. Площадь треугольника CNM равна 57. Найдите площадь четырёхугольника $ABMN$.



№1

66 Синус, косинус и тангенс острого угла прямоугольного треугольника

Sin = $\dfrac{\text{противолежащего катета}}{\text{гипотенузе}}$

Cos = $\dfrac{\text{прилежащего катета}}{\text{гипотенузе}}$

tg = $\dfrac{\text{противолежащего катета}}{\text{прилежащему катету}}$

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C (рис. 206). Катет BC этого треугольника является противолежащим углу A, а катет AC — прилежащим к этому углу.

Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему катету.

Синус, косинус и тангенс угла равного α, обозначаются символами $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ (читается: «синус альфа», «косинус альфа» и «тангенс альфа»). На рисунке 206

$$\sin A = \frac{BC}{AB}, \qquad (1)$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB}, \qquad (2)$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}. \qquad (3)$$

Из формул (1) и (2) получаем: $\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{BC}{AB} \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{BC}{AC}$. Сравнивая с формулой (3), находим:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A}, \qquad (4)$$

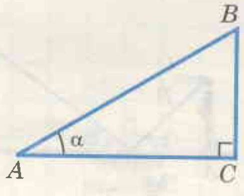


Рис. 206

№2

2^0. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

Пусть O — точка пересечения диагоналей AC и BD параллелограмма $ABCD$ (рис. 159). Треугольники AOB и COD равны по стороне и двум прилежащим углам ($AB=CD$ как противоположные стороны параллелограмма, $\angle 1=\angle 2$ и $\angle 3=\angle 4$ как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых AB и CD секущими AC и BD соответственно). Поэтому $AO=OC$ и $OB=OD$, что и требовалось доказать.

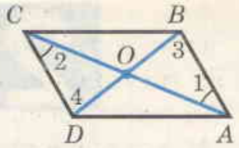
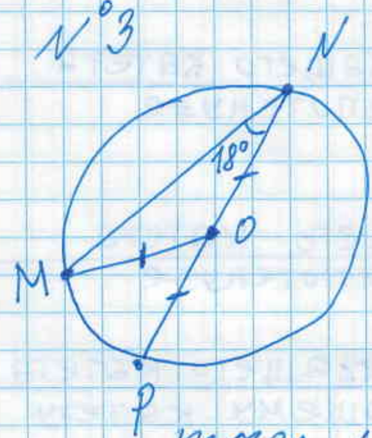


Рис. 159

№3



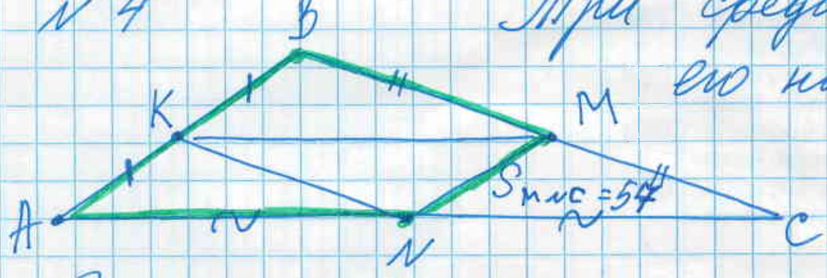
Найти: $\angle MON$-?

Решение: Р/м ΔMON - равнобедренный, тк $MO=ON$ - радиусы
$\angle MNO=\angle NMO=18°$, как углы при основании.

тогда $\angle MON = 180° - \overset{36°}{18° \cdot 2} = 144°$

Ответ: 144°

№4



Три средние линии Δ делят его на 4 равных треугольника

Найти: S_{ABMN} -?

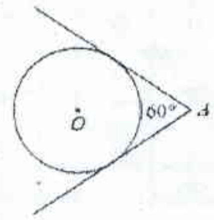
Решение: Проведем средние линии ΔABC KM, MN, KN, получим $S_{\Delta AKN} = S_{\Delta KNM} = S_{\Delta KBM} =$
$= S_{\Delta MNC} = 57$

$S_{ABMN} = 57 \cdot 3 = 171$ ед^2

Ответ: 171 ед^2

Билет №8

1) Назовите значение синуса, косинуса и тангенса углов 30°,45°,60°.
2) Докажите свойства противоположных сторон и углов параллелограмма.
3) У треугольника со сторонами 16 и 2 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведённая к первой стороне, равна 1. Чему равна высота, проведённая ко второй стороне?
4) Из точки *A* проведены две касательные к окружности с центром в точке *O*. Найдите радиус окружности, если угол между касательными равен 60°, а расстояние от точки *A* до точки *O* равно 8.



№1

$\sin 30° = \frac{1}{2}$ $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $tg\, 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $tg\, 45° = 1$

$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos 60° = \frac{1}{2}$ $tg\, 60° = \sqrt{3}$

№2

1°. В параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны.

Рассмотрим параллелограмм *ABCD* (рис. 158). Диагональ *AC* разделяет его на два треугольника: *ABC* и *ADC*. Эти треугольники равны по стороне и двум прилежащим углам (*AC* — общая сторона, $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$ как накрест лежащие углы при пересечении секущей *AC* параллельных прямых *AB* и *CD*, *AD* и *BC* соответственно). Поэтому

$$AB = CD,\ AD = BC \text{ и } \angle B = \angle D.$$

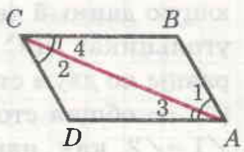


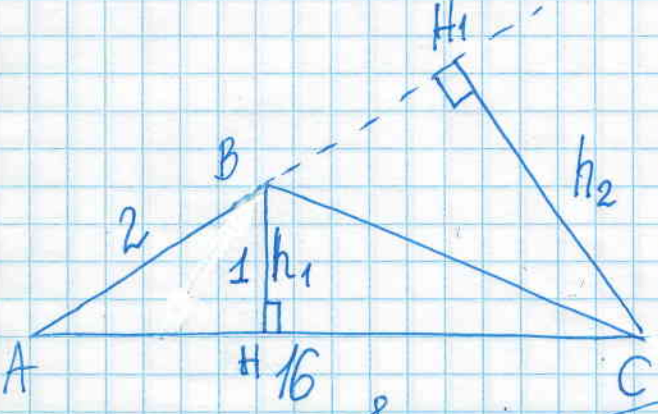
Рис. 158

Далее, пользуясь равенствами углов 1 и 2, 3 и 4, получаем

$$\angle A = \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4 = \angle C.$$

№ 3

Найти: h_2 - ?



Решение: $S_\Delta = \frac{a \cdot h_a}{2}$

$S_{\Delta ABC} = \frac{AC \cdot h_1}{2} = \frac{AB \cdot h_2}{2}$

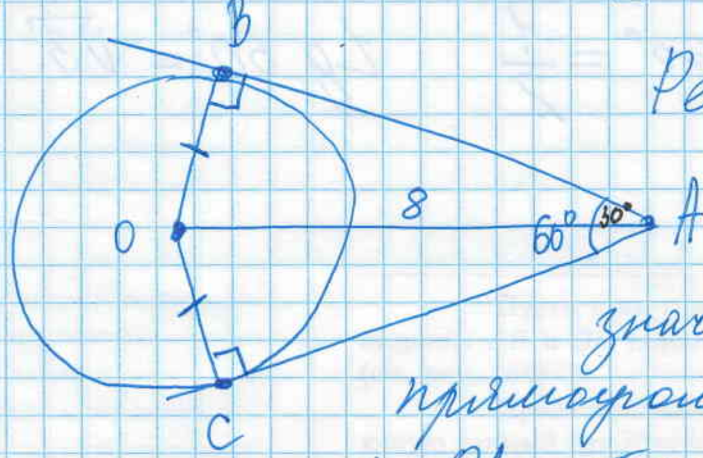
$S_{\Delta ABC} = \frac{\cancel{16}^{8} \cdot 1}{\cancel{2}_1} = 8$ ед^2 $\quad S_{\Delta ABC} = \frac{1\cancel{2} \cdot h_2}{\cancel{2}_1} = 8$ ед^2

$h_2 = 8$

Ответ: 8

№ 4

Найти: радиус окружности



Решение: Докажем что $\Delta AOB = \Delta AOC$

$OB \perp AB$, $OC \perp AC$

значит ΔAOB и ΔAOC — прямоугольные

1) OA – общая сторона этих Δков

2) $AB = AC$ по свойству касательных к окружности

значить $\Delta AOB = \Delta AOC$ по гипотенузе и катету

$\angle BAO = \angle CAO = 60° : 2 = 30°$

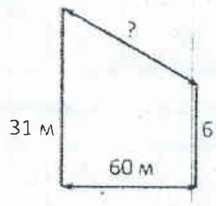
Р/м Δ AOB – прямоугольный $\angle BAO = 30°$,

значит $OB = AO : 2 = 8 : 2 = 4$

Ответ: 4

Билет №9

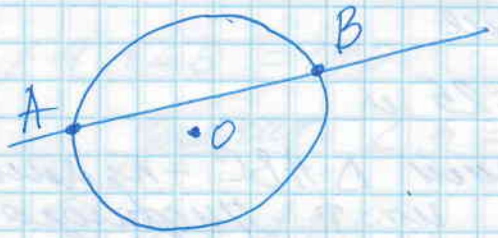
1) Дайте определение секущей и касательной к окружности.
2) Докажите свойство диагоналей прямоугольника.
3) В 60 м одна от другой растут две сосны. Высота одной 31 м, а другой – 6 м. Найдите расстояние (в метрах) между их верхушками.



4) Окружность пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках K и P соответственно и проходит через вершины B и C. Найдите длину отрезка KP, если $AK = 18$, а сторона AC в 1,2 раза больше стороны BC.

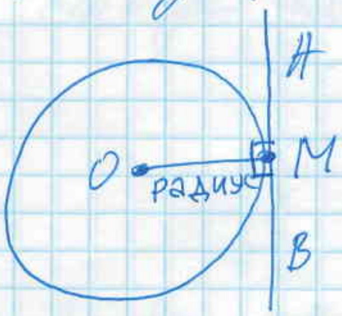
№1

О: Секущая к окружности это прямая, которая имеет с окружностью две общие точки



ω окружность с центром O
AB – секущая
AB ∩ ω

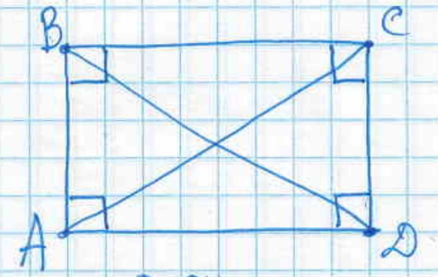
О: Касательная к окружности это прямая которая имеет с окружностью одну общую точку (точка касания)



AB – касательная
OM ⊥ AB

Т: Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.

№2

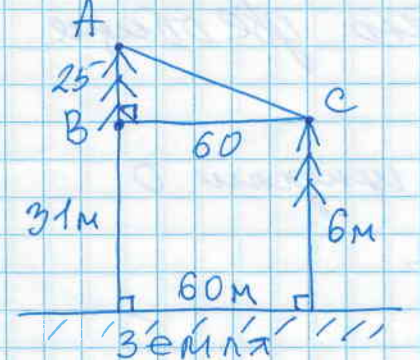


РИСУНОК

Диагонали прямоугольника равны.

Действительно, обратимся к рисунку , на котором изображен прямоугольник $ABCD$ с диагоналями AC и BD. Прямоугольные треугольники ACD и DBA равны по двум катетам ($CD=BA$, AD — общий катет). Отсюда следует, что гипотенузы этих треугольников равны, т. е. $AC=BD$, что и требовалось доказать.

№3



Найти: расстояние между верхушками АС

Решение: Проведём ВС параллельно земле

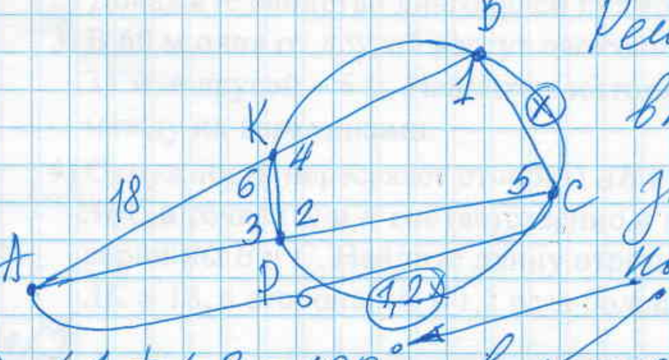
$AB = 31 - 6 = 25$ м

Рассмотрим $\triangle ABC$ - прямоугольный по т. Пифагора

$AC = \sqrt{25^2 + 60^2} = \sqrt{625 + 3600} = \sqrt{4225} = 65$ м

Ответ: 65 м.

№4 Найти: KP-?



Решение: Четырёхугольник KPBC- вписанный в окружность, значит сумма противоположных углов равна 180°

а) $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, в тоже время $\angle 2 + \angle 3 = 180°$ тк смежнные углы

$\angle 3 + \angle 2 = 180°$

значит $\angle 1 = \angle 3$

б) $\angle 4 + \angle 5 = 180°$, в тоже время $\angle 4 + \angle 6 = 180°$ тк. смежные углы

$\angle 4 + \angle 6 = 180$

значит $\angle 5 = \angle 6$

Рсм ΔABC и ΔAKP

$\left.\begin{array}{l} 1)\ \angle A \text{ общий} \\ 2)\ \angle 1 = \angle 3,\ \angle 4 = \angle 6 \end{array}\right\}$ значит $\Delta ABC \sim \Delta AKP$ по 2м углам

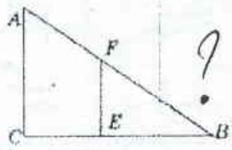
Тогда $\frac{KP}{BC} = \frac{AK}{AC}$ Пусть $BC = x$, $AC = 1{,}2x$

$\frac{KP}{x} = \frac{18}{1{,}2x}$ $KP = \frac{18 \cdot \cancel{x}}{1{,}2 \cdot \cancel{x}} = \frac{18 \cdot 10}{1{,}2 \cdot 10} = \frac{180}{12} = 15$

Ответ: 15.

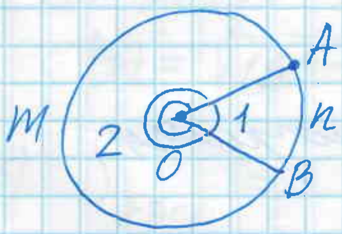
Билет №10

1) Дайте определение вписанного и центрального углов окружности.
2) Докажите признак параллелограмма по двум противоположным сторонам, которые равны и параллельны.
3) Человек ростом 1,7 м стоит на расстоянии 8 шагов от столба, на котором висит фонарь. Тень человека равна четырем шагам. На какой высоте (в метрах) расположен фонарь?
4) Основания равнобедренной трапеции равны 8 и 18, а периметр равен 56. Найдите площадь трапеции.



№1

О: Центральный угол - это угол, вершина которого лежит в центре окружности

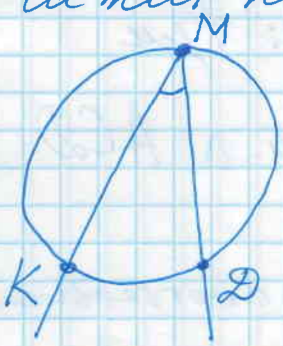


$\angle 1$ и $\angle 2$ центральные углы

Т: Центральный угол, равен дуге, на которую он опирается

$\angle 1 = \smile AnB$, $\angle 2 = \smile AmB$

О: Вписанный угол - это угол вершина которого лежит на окружности



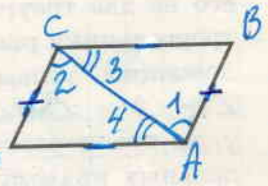
Т: Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается

$\angle M = \frac{1}{2} \smile KD = \frac{\smile KD}{2}$

№2

Если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник — параллелограмм.

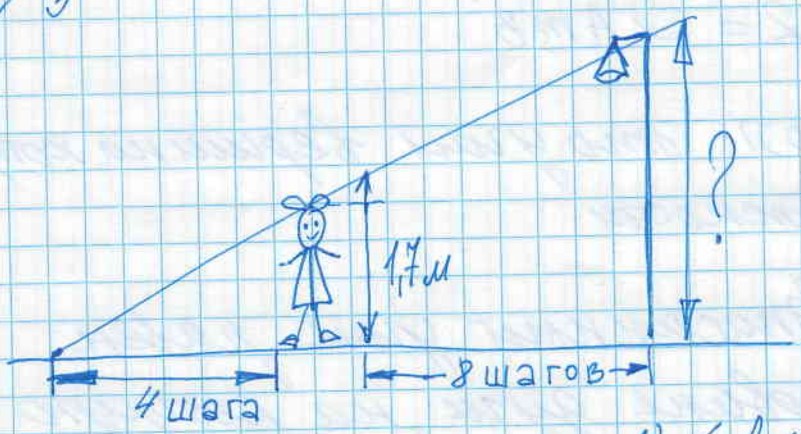
Пусть в четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD параллельны и $AB = CD$ (см. рис.).



Проведем диагональ AC, разделяющую данный четырехугольник на два треугольника: ABC и CDA. Эти треугольники равны по двум сторонам и углу между ними (AC — общая сторона, $AB = CD$ по условию, $\angle 1 = \angle 2$ как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых AB и CD секущей AC), поэтому $\angle 3 = \angle 4$. Но углы 3 и 4 накрест лежащие при пересечении прямых AD и BC секущей AC, следовательно, $AD \parallel BC$.

Таким образом, в четырехугольнике $ABCD$ противоположные стороны попарно параллельны, а значит, 4х угольник ABCD — параллелограмм

№3



Найти: высоту столба CD-?

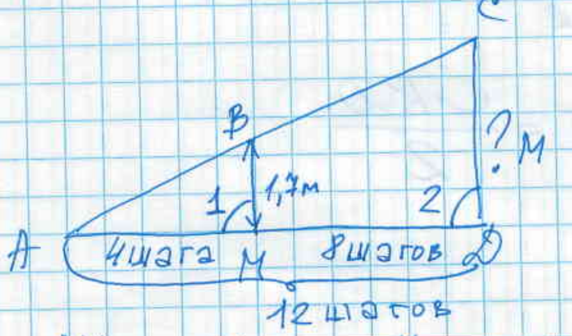
Решение: Р/см

ΔABM и ΔACD

1) $\angle A$ общий

2) $\angle 1 = \angle 2$ они соответвенны $BM \parallel CD$, AD — секущая по условию, значит

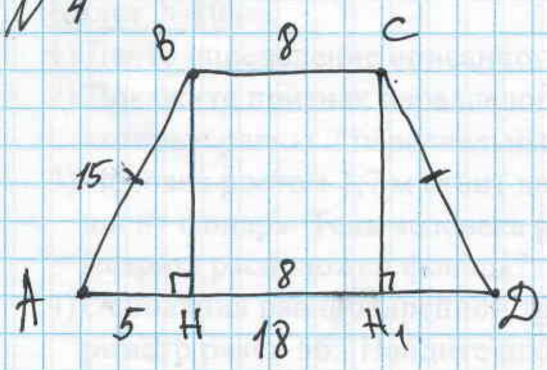
$\Delta ABM \sim \Delta ACD$



$\frac{AM}{AD} = \frac{BM}{CD}$ $\frac{4ш}{12ш} = \frac{1,7м}{CDм}$ $CD = \frac{\overset{3}{\cancel{12}} \cdot 1,7}{\underset{1}{\cancel{4}}} = 3 \cdot 1,7 = 5,1м$

Ответ: 5,1м

№4



Найти: S_{ABCD}, е. $P_{ABCD} = 56$

Решение: $S_{ABCD} = \frac{BC+AD}{2} \cdot BH$

1) Найдём боковые стороны трапеции ABCD

$AB = CD = (56 \overset{30}{-} (8 \overset{26}{+} 18)) : 2 = 15$

2) Опустим высоты BH и CH_1, $HH_1 = 8$

3) $AH = H_1D = (18 - 8) : 2 = 5$

4) Р/см $\triangle ABH$ - прямоугольный по т. Пифагора

$BH = \sqrt{15^2 - 5^2} = \sqrt{225 - 25} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$

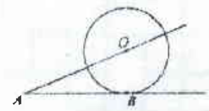
$\cancel{26}$ 13 $\qquad$ $2 \cdot 100$

5) $S_{ABCD} = \frac{8+18}{\cancel{2}_1} \cdot 10\sqrt{2} = 13 \cdot 10\sqrt{2} = 130\sqrt{2}$ ед^2

Ответ: $130\sqrt{2}$ ед^2

Билет №11

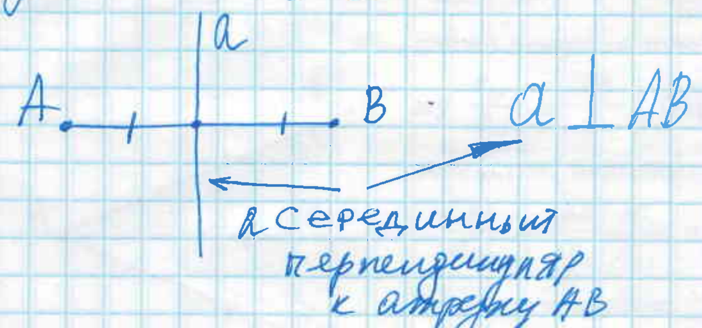
1) Дайте определение серединного перпендикуляра к отрезку. Назовите свойство серединного перпендикуляра.
2) Запишите вывод формулы площади треугольника, следствия, формулу Герона (без доказательства).
3) К окружности с центром в точке O проведены касательная AB и секущая AO. Найдите радиус окружности, если AB = 12 см, AO = 13 см.



4) На сторонах угла BAC и на его биссектрисе отложены равные отрезки AB, AC и AD. Величина угла BDC равна 160°. Определите величину угла BAC.

№1

О: Серединный перпендикуляр к отрезку это прямая, проходящая через середину данного отрезка и перпендикулярная ему.



Св/ва: Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов это отрезка

№2

52 Площадь треугольника

Одну из сторон треугольника часто называют его **основанием**. Если основание выбрано, то под словом «высота» подразумевают высоту треугольника, проведенную к основанию.

Теорема

Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту.

Доказательство

Пусть S — площадь треугольника ABC (рис. 183). Примем сторону AB за основание треугольника и проведем высоту CH. Докажем, что

$$S = \frac{1}{2}AB \cdot CH.$$

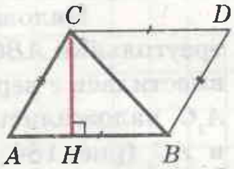


Рис. 183

Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABDC$ так, как показано на рисунке 183. Треугольники ABC и DCB равны по трем сторонам (BC — их общая сторона, $AB=CD$ и $AC=BD$ как противоположные стороны параллелограмма $ABDC$), поэтому их площади равны. Следовательно, площадь S треугольника ABC равна половине площади параллелограмма $ABDC$, т. е. $S = \frac{1}{2}AB \cdot CH$. Теорема доказана.

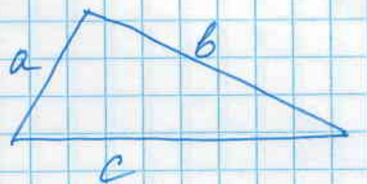
Следствие 1

Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.

Следствие 2

Если высоты двух треугольников равны, то их площади относятся как основания.

Площадь Δ-ка по Герону:

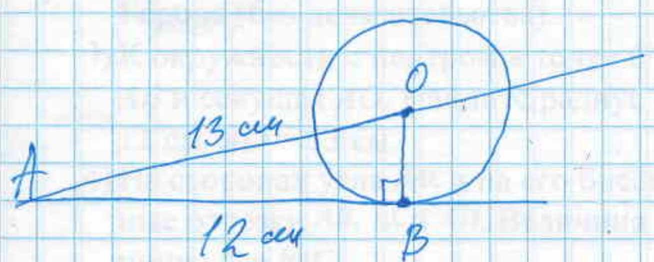


Площадь $S_{\Delta\text{-ка}}$ со сторонами a, b, c выражается формулой

$$S = \sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$$

где P /полупериметр/ Δ-ка $\quad p = \frac{a+b+c}{2}$

№ 3 Найти: радиус OB - ?



Решение: $OB \perp AB$

(тк радиус всегда перпендикулярен к касательной в точке касания)

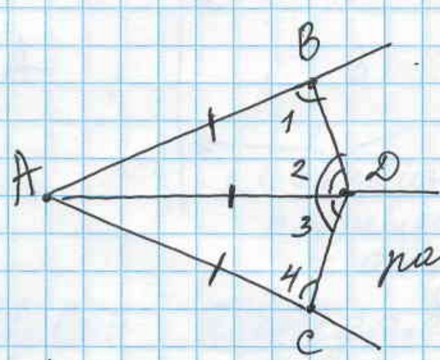
Р/см $\triangle AOB$ - прямоугольный, по т. Пифагора

$OB = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5$ см

Ответ: 5 см

№ 4 Найти: $\angle BAC$, если $\angle BDC = 160°$

$AB = AD = AC$ AD - биссектриса



Решение: $\triangle ABD$ и $\triangle ADC$ - равнобедренные, углы при основании равны $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = 4 = 160° : 2 = 80°$

тк. AD - продолжение биссектрисы

Р/см $\triangle ABD$ $\angle BAD = 180° - 80 \cdot 2 = 20°$

$\angle A = 20° \cdot 2 = 40°$ тк AD биссектриса $\angle A$

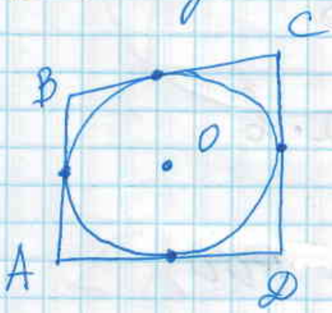
Ответ: 40°

Билет №12

1) Дайте определение: окружности, вписанной в многоугольник; многоугольника, описанного около окружности. Назовите свойство описанного четырехугольника.
2) Докажите свойства диагоналей ромба.
3) Найдите периметр прямоугольного участка земли, площадь которого равна 800 $м^2$ и одна сторона в 2 раза больше другой. Ответ дайте в метрах.
4) Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC и пересекает его стороны AB и BC в точках K и E соответственно. Отрезки AE и CK перпендикулярны. Найдите $\angle KCB$, если $\angle ABC = 20°$.

№1

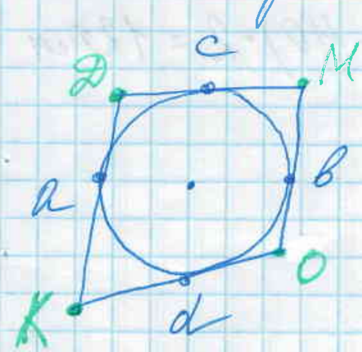
О: Окружность, вписанная в многоугольник — это окружность касающаяся всех сторон многоугольника



Окружность вписанная
многоугольник описанный

* В любой $\Delta_к$ можно вписать окружность
* Не в любой 4^х угольник можно вписать окружность

Св/во: В любом описанном 4^х угольнике суммы противоположных сторон равны



$a+b = c+d$

$KD+MO = DM+KD$

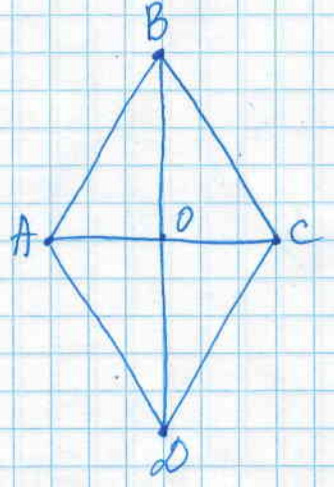
Обратное утверждение: Если суммы противоположных сторон выпуклого 4^х угольника равны, то в него можно вписать окружность.

№2

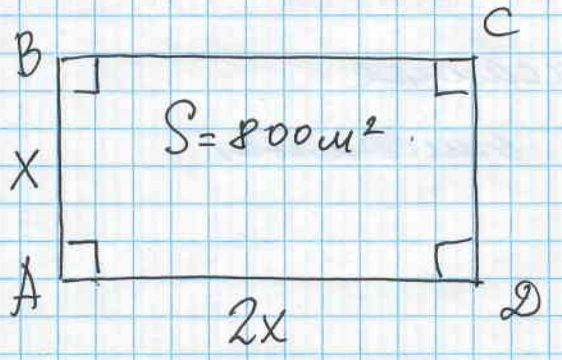
Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам.

Рассмотрим ромб $ABCD$ (рис. 169). Требуется доказать, что $AC \perp BD$ и каждая диагональ делит соответствующие углы ромба пополам. Докажем, например, что $\angle BAC = \angle DAC$.

По определению ромба $AB = AD$, поэтому треугольник BAD равнобедренный. Так как ромб — параллелограмм, то его диагонали точкой O пересечения делятся пополам. Следовательно, AO — медиана равнобедренного треугольника BAD, а значит, высота и биссектриса этого треугольника. Поэтому $AC \perp BD$ и $\angle BAC = \angle DAC$, что и требовалось доказать.



№3



Найти: P_{ABCD}

Решение: $S_{\square} = a \cdot b$

$S_{ABCD} = X \cdot 2X = 800$

$2X^2 = 800 \quad | : 2$

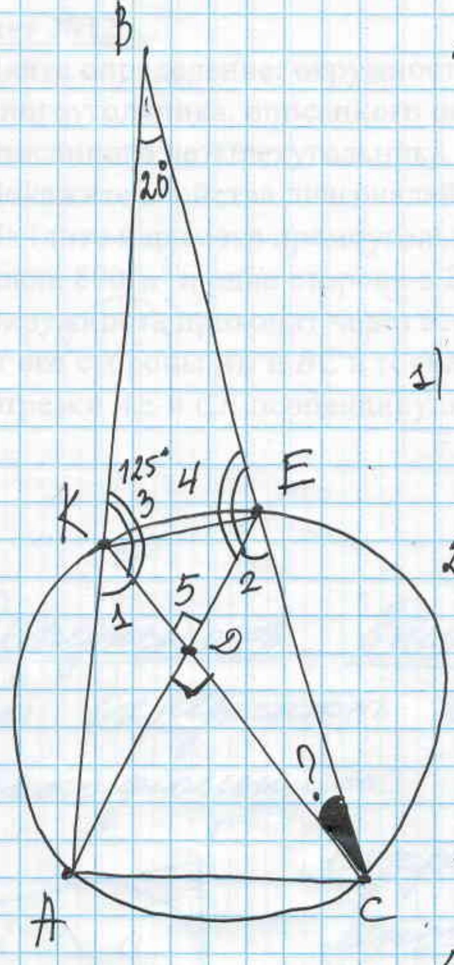
$X^2 = 400$

$X = 20$ – AB

$AD = 2 \cdot 20 = 40$

$P_{ABCD} = (20 + 40) \cdot 2 = 120$ м

Ответ: 120 м



Дано: ΔABC, $\angle B = 20^\circ$

$\omega \cap \Delta ABC$, $AE \perp KC$

Найти: $\angle KCB$ - ?

1) $\angle 1 = \angle 2$ т.к. вписанные углы опирающиеся на одну $\smile AC$

2) $\angle 3 = \angle 4$ как смежные с равными углами

3) $AE \perp KC$ значит $\angle 5 = 90^\circ$

Р/м. 4х угольник $BKOE$

4) $\angle BKC = (360^\circ - 20^\circ - 90^\circ) : 2 = 125^\circ$

5) Р/м ΔBKC

$\angle KCB = 180^\circ - 20^\circ - 125^\circ = 35^\circ$

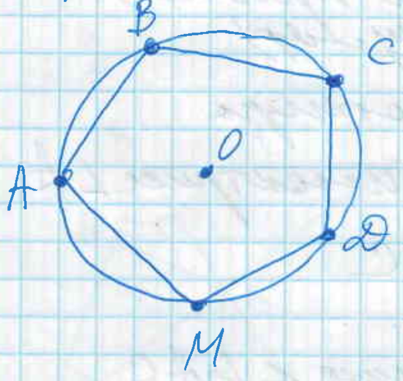
Ответ: 35°

Билет №13

1) Дайте определение окружности, описанной около многоугольника; многоугольника, вписанного в окружность. Назовите свойства четырехугольника, вписанного в окружность.
2) Докажите свойство биссектрисы угла.
3) В прямоугольном треугольнике один из катетов равен 10, а угол, лежащий напротив него, равен 45°. Найдите площадь треугольника.
4) Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K. Найдите площадь параллелограмма, если $BC = 19$, а расстояние от точки K до стороны AB равно 7.

№1.

О: Окружность описанная около многоугольника это окружность, на которой лежат все вершины многоугольника



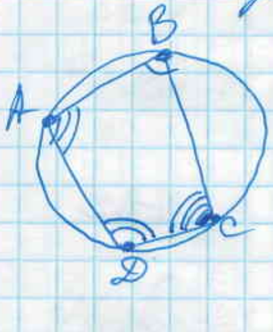
Окружность описанная

Многоугольник вписанный

* Около любого Δ-ка можно описать окружность, притом только одну

* Но около не любого 4х угольника можно описать окружность

Св/во: В любом вписанном 4^{х}угольнике сумма противоположных углов равна 180°



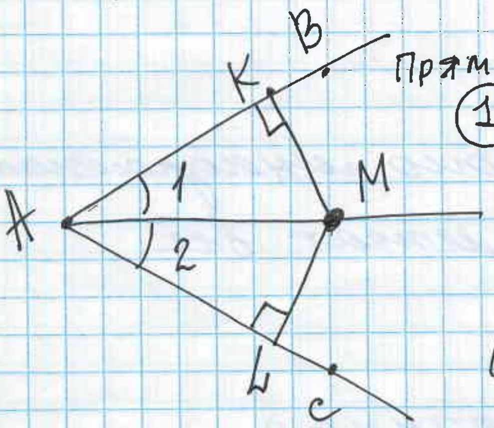
$\angle D + \angle B = 180°$, $\angle A + \angle C = 180°$

Обратное утверждение: Если сумма противоположных углов 4^{х}угольника равна 180°, то около него можно описать окружность.

№2 Свойство биссектрисы угла

Т: Каждая точка биссектрисы неразвёрнутого угла равноудалена от его сторон.

Обратная т: Каждая точка, лежащая внутри угла и равноудалена от сторон угла лежит на его биссектрисе



прямая Д/ть: KM = LC

1) Д/во: Р/см △AKM и △AML — прямоугольные

т.к. AB⊥KM, AC⊥ML

(расстояние от (·) до прямой — перпендикуляр)

1) AM — общая гипотенуза

2) ∠1 = ∠2 т.к. AM биссектриса ∠A

значит △AKM = △AML => KM = LC

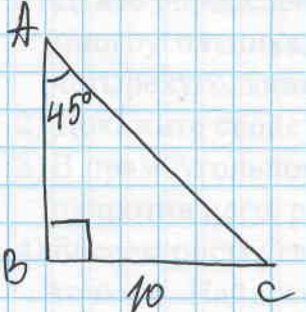
2) Обратная Д/ть: AM — биссектриса ∠BAC

Д/во: Р/см △AKM и △ALM

1) AM — общая гипотенуза
2) MK = ML (по условию)

} △AKM = △ALM => ∠1 = ∠2 значит AM — биссектриса ∠BAC

№3



Найти: $S_{\triangle ABC}$ – ?

Решение: Р/м $\triangle ABC$ – прямоугольный

$\angle B$ – прямой $\angle A = 45^\circ$, значит

$\angle C = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$, тогда

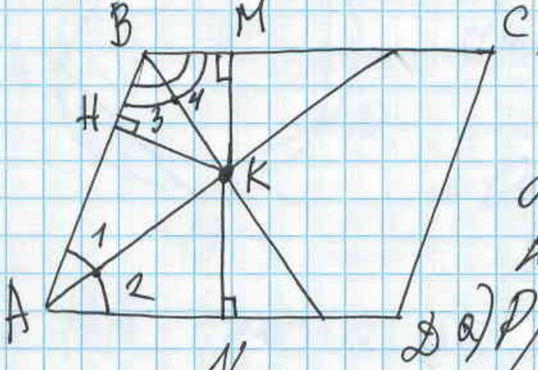
$\triangle ABC$ – равнобедренный $BC = AB = 10$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{\cancel{10}^{5}\cdot 10}{\cancel{2}_{1}} = 50 \text{ ед}^2$$

Ответ: 50 ед^2.

№4

Найти: S_{ABCD} – ?



Решение: $S_{ABCD} = AD \cdot MN$

Проведём через точку пересечения биссектрис высоту MN.

а) Р/м $\triangle AHK$ и $\triangle AKN$ – прямоугольные: 1) $\angle 1 = \angle 2$ т.к. AK биссектриса 2) AK – общая сторона

значит $\triangle AHK = \triangle AKN$, тогда $HK = KH = 7$

б) Р/м $\triangle HBK$ и $\triangle BMK$ – прямоугольные:

1) $\angle 3 = \angle 4$ т.к. BK биссектриса 2) BK общая сторона

значит $\triangle HBK = \triangle BMK$, тогда $HK = BM = 7$

Если $MK = 7$, $KN = 7 \Rightarrow MN = 7 + 7 = 14$

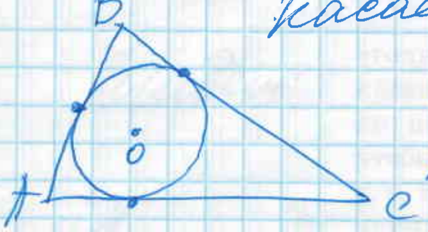
$S_{ABCD} = AD \cdot MN = 19 \cdot 14 = 266$ ед^2

Ответ: 266 ед^2

Билет №14

1) Дайте определение: окружности, вписанной в треугольник; окружности, описанной около треугольника, нахождение центров этих окружностей.
2) Докажите свойство углов при основании равнобедренной трапеции.
3) В выпуклом четырехугольнике ABCD $AB = BC$, $AD = CD$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle D = 110^\circ$. Найдите угол A. Ответ дайте в градусах.
4) Найдите отношение двух сторон треугольника, если его медиана, выходящая из их общей вершины, образует с этими сторонами углы в 30° и 90°.

№1. О: Окружность вписанная в Δк, если она касается трёх сторон Δка.



Окружность вписанная ω (·) центр треугольник ABC описанный

Центр вписанной окружности в Δк лежит в точке пересечения биссектрис Δка

В любой треугольник можно вписать окружность.

Доказательство

Рассмотрим произвольный треугольник ABC и обозначим буквой O точку пересечения его биссектрис. Проведем из точки O перпендикуляры OK, OL и OM соответственно к сторонам AB, BC и CA (см. рис. 232). Так как точка O равноудалена от сторон треугольника ABC, то $OK=OL=OM$. Поэтому окружность с центром O радиуса OK проходит через точки K, L и M. Стороны треугольника ABC касаются этой окружности в точках K, L, M, так как они перпендикулярны к радиусам OK, OL и OM. Значит, окружность с центром O радиуса OK является вписанной в треугольник ABC. **Теорема доказана.**

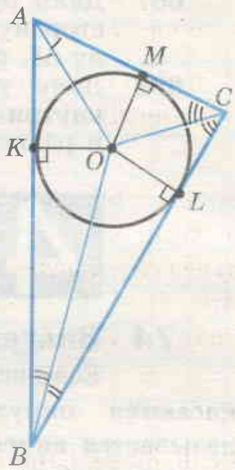


Рис. 232

Замечания

1) Отметим, что **в треугольник можно вписать только одну окружность.**

О: Окружность описанная около Δка если вершины этого Δка лежат на окружности

Центр описаной окружности лежит в точке пересечения серединных перпендикуляров проведёнких к сторонам данного Δка.

Около любого треугольника можно описать окружность.

Доказательство

Рассмотрим произвольный треугольник ABC. Обозначим буквой O точку пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам и проведем отрезки OA, OB и OC (рис. 235). Так как точка O равноудалена от вершин треугольника ABC, то $OA=OB=OC$. Поэтому окружность с центром O радиуса OA проходит через все три вершины треугольника и, значит, является описанной около треугольника ABC. **Теорема доказана.**

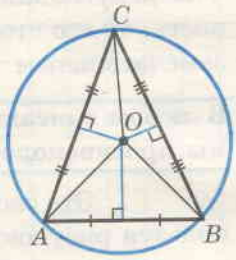
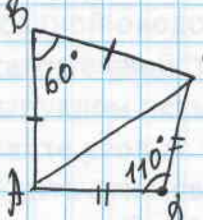


Рис. 235

Замечания

1) Отметим, что **около треугольника можно описать только одну окружность.**

№3 Найти: $\angle A$ – ?



Решение: Проведём AC – диагональ

а) Р/м $\triangle ABC$ – равнобедренный т.к. $AB = BC$ $\angle BAC = (\overset{120^\circ}{180^\circ - 60^\circ}) : 2 = 60^\circ$

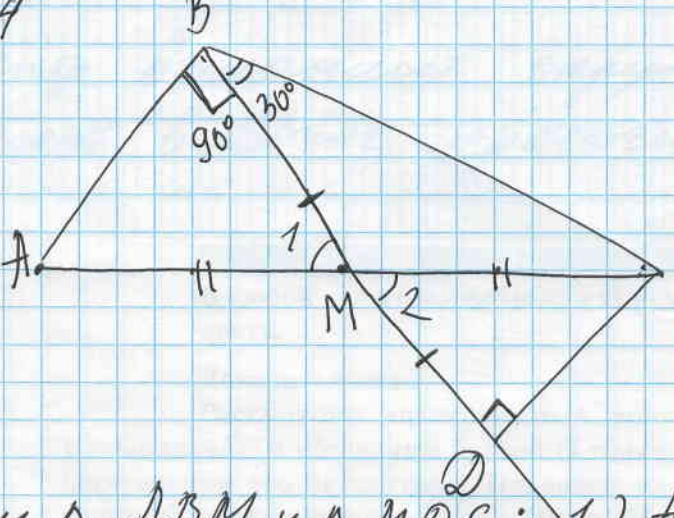
б) Р/м $\triangle ADC$ – равнобедренный $AD = DC$ $\angle CAD = (\overset{70^\circ}{180^\circ - 110^\circ}) : 2 = 35^\circ$

в) $\angle A = \angle BAC + \angle CAD = 60^\circ + 35^\circ = 95^\circ$

Ответ: 95°

Найти: $\dfrac{AB}{BC}$ – ?

№4



Решение: Р/м $\triangle ABC$ BM – медиана

$\angle ABM = 90^\circ$, $\angle MBC = 30^\circ$

Продлим BM так, что $BM = MD$

Р/м $\triangle ABM$ и $\triangle MDC$: 1) $AM = MC$ т.к. BM медиана

2) $BM = MD$ по условию

3) $\angle 1 = \angle 2$ т.к. вертикальные

значит $\triangle ABM = \triangle MDC$, т.к. $\angle ABM = 90^\circ$, тогда $\angle MDC = 90^\circ$

Р/м $\triangle BDC$ – прямоугольн $\angle MDC = 90^\circ$, $\angle CBD = 30^\circ$ Следовательно $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{CD}{BC} = \dfrac{1}{2}$

Значит $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{1}{2}$

Ответ: 1 : 2

Билет №15

1) Сформулируйте теорему Фалеса.
2) Докажите свойство отрезков пересекающихся хорд.
3) Сторона ромба равна 34, а острый угол равен 60°. Высота ромба, опущенная из вершины тупого угла, делит сторону на два отрезка. Каковы длины этих отрезков?
4) Высота треугольника разбивает его основание на два отрезка с длинами 8 и 9. Найдите длину этой высоты, если известно, что другая высота треугольника делит ее пополам

№1. Теорема Фалеса

Если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько равных отрезков и через концы провести параллельные прямые пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой равные между собой отрезки

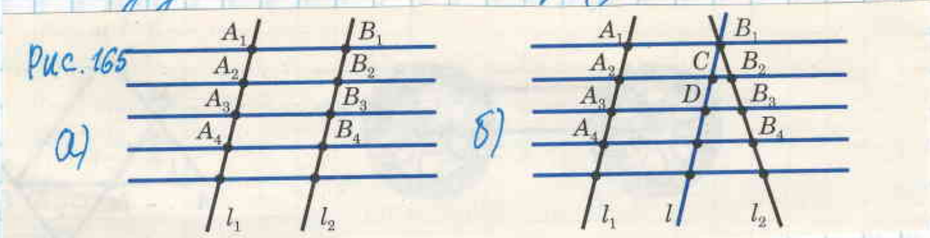


Рис. 165

Пусть на прямой l_1 отложены равные отрезки A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ... и через их концы проведены параллельные прямые, которые пересекают прямую l_2 в точках B_1, B_2, B_3, B_4, ... (рис. 165). Требуется доказать, что отрезки B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, ... равны друг другу. Докажем, например, что $B_1B_2=B_2B_3$.

Рассмотрим сначала случай, когда прямые l_1 и l_2 параллельны (рис. 165, *а*). Тогда $A_1A_2=B_1B_2$ и $A_2A_3=B_2B_3$ как противоположные стороны параллелограммов $A_1B_1B_2A_2$ и $A_2B_2B_3A_3$. Так как $A_1A_2=A_2A_3$, то и $B_1B_2=B_2B_3$. Если прямые l_1 и l_2 не параллельны, то через точку B_1 проведем прямую l, параллельную прямой l_1 (рис. 165, *б*). Она пересечет прямые A_2B_2 и A_3B_3 в некоторых точках C и D. Так как $A_1A_2=A_2A_3$, то по доказанному $B_1C=CD$. Отсюда получаем $B_1B_2=B_2B_3$ (задача 384). Аналогично можно доказать, что $B_2B_3=B_3B_4$ и т. д.

№2 Свойства отрезков пересекающихся хорд

Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.

Доказательство

Пусть хорды AB и CD пересекаются в точке E (рис. 221). Докажем, что

$$AE \cdot BE = CE \cdot DE.$$

Рассмотрим треугольники ADE и CBE. В этих треугольниках углы 1 и 2 равны, так как они вписанные и опираются на одну и ту же дугу BD, а углы 3 и 4 равны как вертикальные. По первому признаку подобия треугольников $\triangle ADE \sim \triangle CBE$. Отсюда следует, что $\frac{AE}{CE} = \frac{DE}{BE}$, или

$$AE \cdot BE = CE \cdot DE.$$

Теорема доказана.

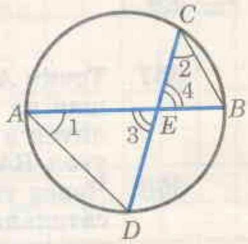
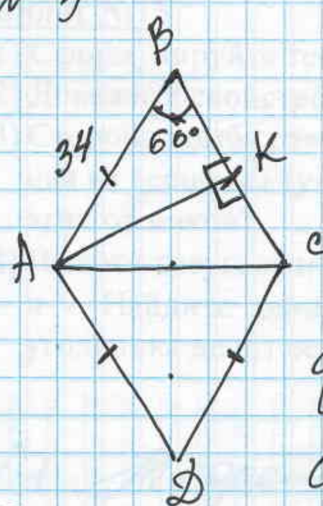


Рис. 221

№3

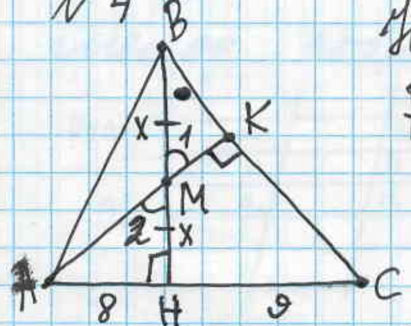
Найти: BK и KC, если $ABCD$ - ромб
$\angle B = 60°$, AB



Решение: Р/м $\triangle ABC$, $AB = BC$
– $\triangle$к равнобедренный $\angle B = 60°$,
значит $\angle BAC = \angle BCA$ углы при
основании $\angle BAC = \angle BCA = (180° - 60°) : 2 = 60°$
следовательно $\triangle ABC$ равносторонний
Тогда AK – высота, является медианой
$BK = KC = 34 : 2 = 17$

Ответ: $BK = 17$, $KC = 17$

№4



Найти: BH-?
Решение: Пусть BH - высота $\triangle ABC$
разбивает AC на отрезки $AH = 8$, $CH = 9$
Высота AK пересекает BH в (.) M,
причём $BM = MH = X$
$\triangle AHM$, $\triangle BKM$, $\triangle BHC$ – подобны т.к $\triangle AMH$ и $\triangle BKM$
прямоугольные, $\angle 1 = \angle 2$ вертикальные,
$\angle HBC$ общий $\angle$ для $\triangle MBK$ и $\triangle HBC$
Тогда $\dfrac{MH}{AH} = \dfrac{CH}{BH}$, т.е $\dfrac{X}{8} = \dfrac{9}{2X}$

$2X^2 = 72 \quad |:2$

$X^2 = 36$

$X = 6 \quad BH = 2X = 12$

Ответ: 12