Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 заданияс кратким ответом повышенного уровня сложности и 7 заданий с развернутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8 . 10 -0,8 Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

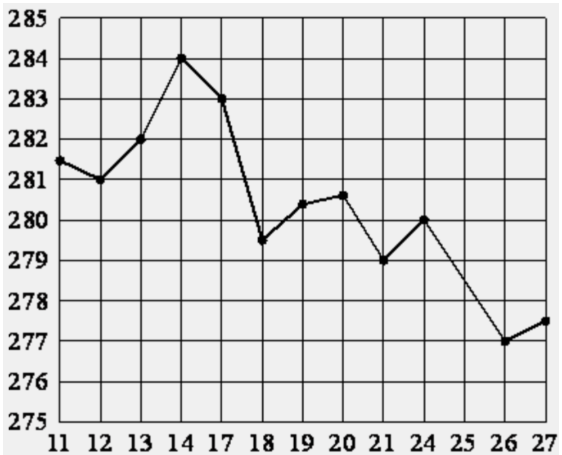
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 В летнем лагере 246 детей и 29 воспитателей. В автобус помещается не более 45 пассажиров. Какое наименьшее количество автобусов понадобиться, чтобы за один раз перевезти всех из лагеря в город?

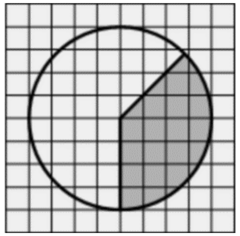
Ответ: ___________________________.

2 На рисунке жирными точками показана цена унции золота на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 11 по 27 июля 2000 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – цена унции золота в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена унции золота на момент закрытия торгов была наибольшей за указанный период.



Ответ: ___________________________.

3 Площадь круга, изображённого на клетчатой бумаге, равна 16. Найдите площадь заштрихованного кругового сектора.



Ответ: ___________________________.

4 В группе туристов 8 человек. С помощью жребия они выбирают шестерых человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что турист Д., входящий в состав группы, пойдёт в магазин?

Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения

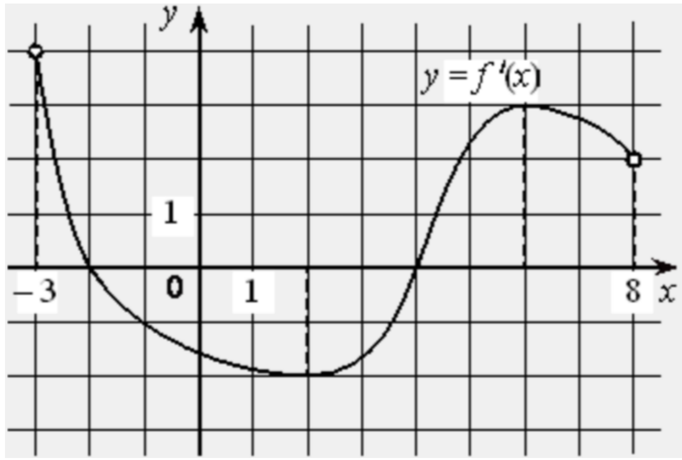
$$\frac{1}{5x+8}=\frac{1}{3}.$$

Ответ: ___________________________.

6 В треугольнике $ABCAB = BC$, $AC = 20$, высота CHравна 16. Найдите синус угла ACB.

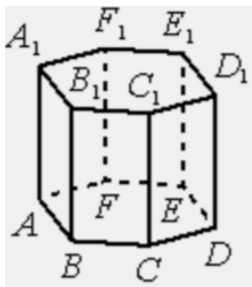
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y = f`(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 8)$. Найдите точку минимума функции $f(x)$.



Ответ: ___________________________.

8 Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки D, A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 12, а боковое ребро равно 2.



Ответ: ___________________________.

9 Найдите значение выражения $\dfrac{16\sin 98^\circ \cdot \cos 98^\circ}{\sin 196^\circ}$.

Ответ: ___________________________.

10 В розетку электросети подключена электрическая духовка, сопротивление которой составляет $R_1 = 60$Ом. Параллельно с ней в розетку предполагается подключить электрообогреватель, сопротивление которого R_2 (в Ом). При параллельном соединении двух электроприборов с сопротивлениями R_1 и R_2 их общее сопротивление вычисляется по формуле $R_{\text{общ}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. Для нормального функционирования электросети общее сопротивление в неё должно быть не меньше 10 Ом. Определите наименьшее возможное сопротивление R_2 электрообогревателя. Ответ дайте в омах.

Ответ: ___________________________.

11 Имеется два сплава. Первый содержит 10% никеля, второй – 35% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 150 кг, содержащий 25% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава была меньше массы второго?

Ответ: ___________________________.

12 Найдите наибольшее значение функции $y = 4\cos x - \frac{24}{\pi}x + 7$ на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right]$.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$$2\sin^2 x + 4 = 3\sqrt{3}\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right).$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 13. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C.
б) Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α.

15 Решите неравенство

$$\frac{3^x - 1}{3^x - 3} \le 1 + \frac{1}{3^x - 2}.$$

16 В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH. На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.

а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.
б) Найдите отношение BH к ED, если $\angle BCD = 120^\circ$.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 190211

17 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 28 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наибольший годовой платёж составит 9 млн рублей?

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$2^x - a = \sqrt{4^x - a}$
имеет единственный корень.

19 На доске написаны числа 2 и 3. За один ход два числа a и b, записанные на доске, заменяются на два числа: или $a + b$ и $2a - 1$, или $a + b$ и $2b - 1$ (например, из чисел 2 и 3 можно получить либо 3 и 5, либо 5 и 5).

а) Приведите пример последовательности ходов, после которых одно из двух чисел, написанных на доске, окажется числом 19.
б) Может ли после 100 ходов одно из двух чисел, написанных на доске, оказаться числом 200?
в) Сделали 1007 ходов, причём на доске никогда не было написано одновременно двух равных чисел. Какое наименьшее значение может принимать разность большего и меньшего из полученных чисел?

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:

ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	7 лет репетиторской деятельности
Регалии:	Основатель проекта Школа Пифагора
Аккаунт ВК:	https://vk.com/eugene10
Сайт и доп. информация:	https://vk.com/shkolapifagora https://youtube.com/ШколаПифагора

Система оценивания
Ответы к заданиям 1-19

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Верно выполненные задания 13-15 максимум оцениваются в 2 балла, задания 16-17 – в 3 балла, а задания18-19 – в 4 балла.

№ задания	Ответ
1	7
2	14
3	6
4	0,75
5	-1
6	0,8
7	4
8	8
9	8
10	12
11	30
12	21
13	а) $\frac{5\pi}{6}+2\pi n, -\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ n \in Z.$ б)$-\frac{7\pi}{6}$
14	44
15	$(-\infty;0] \cup (\log_3 2\,;1)$
16	$\frac{3}{4}$
17	80,5 млн
18	$(-1;0) \cup (0;1]$
19	а) приведён, б) нет, в) 2

Решения и критерии оценивания заданий13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 а) Решите уравнение

$$2\sin^2 x + 4 = 3\sqrt{3}\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right).$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$$\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right].$$

.

Решение:

$$2\sin^2 x + 4 = -3\sqrt{3}\cos x$$

Основные Тригонометрические формулы

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$2\cdot(1-\cos^2 x) + 4 + 3\sqrt{3}\cos x = 0$$

$$2 - 2\cos^2 x + 4 + 3\sqrt{3}\cos x = 0$$

$$-2\cos^2 x + 3\sqrt{3}\cos x + 6 = 0$$

Пусть $\cos x = t$

$-2t^2 + 3\sqrt{3}t + 6 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 27 + 48 = 75 = \left(5\sqrt{3}\right)^2$

$$t_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-3\sqrt{3} + 5\sqrt{3}}{-4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$t_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-3\sqrt{3} - 5\sqrt{3}}{-4} = 2\sqrt{3} \text{ (нет решений)}$$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_1 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n;\ n \in Z$$

$$x_2 = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n;\ n \in Z$$

б)

Подберём корни для $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n; n \in Z$

Если $n = -2$, то $x = \frac{5\pi}{6} - 4\pi = -\frac{19\pi}{6} \notin \left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$

Если $n = -1$, то $x = \frac{5\pi}{6} - 2\pi = -\frac{7\pi}{6} \in \left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$

Если $n = 0$, то $x = \frac{5\pi}{6} \notin \left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$

Подберём корни для $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; n \in Z$

Если $n = -1$, то $x = -\frac{5\pi}{6} - 2\pi = -\frac{17\pi}{6} \notin \left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$

Если $n = 0$, то $x = -\frac{5\pi}{6} \notin \left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$

Ответ: а) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n;\ n \in Z$. б) $-\frac{7\pi}{6}$

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б* ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

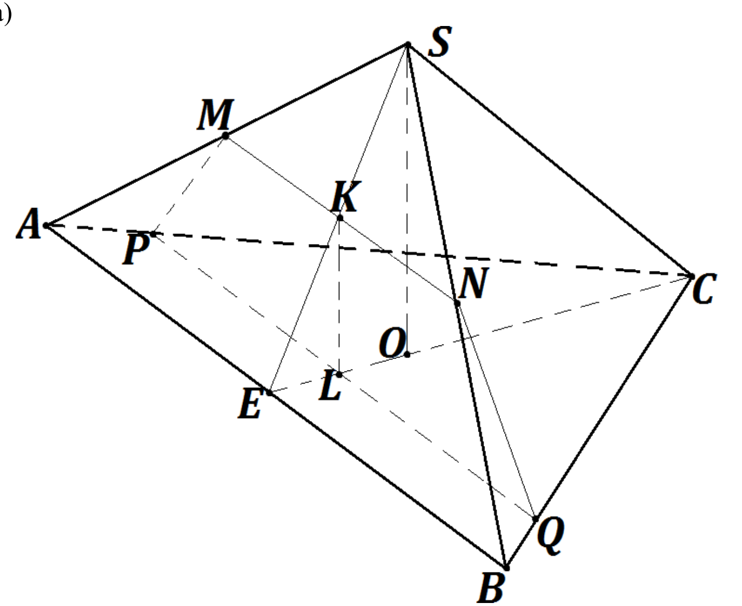
14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 13. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C.

б) Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α.

Решение:

а)



Пусть O – центр основания пирамиды

Рассмотрим $\triangle ABS$ – равнобедренный:

Проведём медиану SE, являющуюся ещё и биссектрисой и высотой

Пусть $(SEC) \cap MN = K$

Построим прямую KL такую, что $KL \parallel SO$

Построим прямую PQ через точку L такую, что $PQ \parallel AB$

Построим прямую NQ, т.к. точки N и Q лежат в одной плоскости
Построим прямую PM, т.к. точки P и M лежат в одной плоскости
$MNQP$ —сечение пирамиды плоскостью α

Рассмотрим $\triangle SOE$ — прямоугольный:
Т.к. K — середина SE и $KL \parallel SO$, то KL — средняя линия $\triangle SOE$
$=> L$ — середина OE
Пусть $EL = OL = x$
Т.к. CE — медиана в $\triangle ABC$, то:

$$\frac{OC}{OE} = 2:1$$

$$=> OC = 2 \cdot OE = 2 \cdot (EL + OL) = 2 \cdot (x + x) = 4x$$

$$=> \frac{CL}{LE} = \frac{OC + OL}{LE} = \frac{4x + x}{x} = 5:1$$

■

б)
Найдём основания и высоту трапеции $MNQP$:

$MN = \frac{1}{2} \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$ (т.к. MN — средняя линия $\triangle ABS$)

$PQ = \frac{5}{6} \cdot AB = \frac{5}{6} \cdot 12 = 10$ (т.к. $\frac{CL}{LE} = 5:1$)

$$OC = \frac{2}{3} \cdot CE = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AB = \frac{12}{\sqrt{3}}$$

$SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{13^2 - \left(\frac{12}{\sqrt{3}}\right)^2} = 11$ (по теореме Пифагора)

$KL = \frac{1}{2} \cdot SO = \frac{1}{2} \cdot 11 = 5{,}5$ (т.к. KL — средняя линия $\triangle SOE$)

$$S = \frac{MN + PQ}{2} \cdot KL = \frac{6 + 10}{2} \cdot 5{,}5 = 44$$

Ответ: б) 44

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство

$$\frac{3^x - 1}{3^x - 3} \le 1 + \frac{1}{3^x - 2}.$$

.

Решение:
Пусть $3^x = t$

$$\frac{t-1}{t-3} \le 1 + \frac{1}{t-2}$$

$$\frac{t-1}{t-3} - \frac{1}{t-2} - 1 \le 0$$

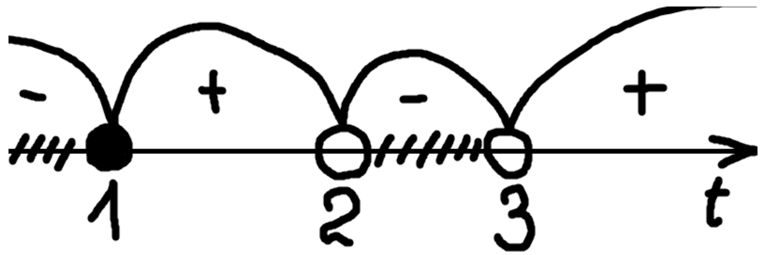
$$\frac{(t-1)(t-2) - 1 \cdot (t-3) - 1 \cdot (t-3)(t-2)}{(t-3)(t-2)} \le 0$$

$$\frac{t^2 - 3t + 2 - t + 3 - (t^2 - 5t + 6)}{(t-3)(t-2)} \le 0$$

$$\frac{t^2 - 3t + 2 - t + 3 - t^2 + 5t - 6}{(t-3)(t-2)} \le 0$$

$$\frac{t-1}{(t-3)(t-2)} \le 0$$

$t - 1 = 0$ $t = 1$	$(t-3)(t-2) \ne 0$ $t \ne 3$ $t \ne 2$



$t \le 1$ $3^x \le 1$ $3^x \le 3^0$ $x \le 0$	$2 < t < 3$ $3^{\log_3 2} < 3^x < 3^1$ $\log_3 2 < x < 1$

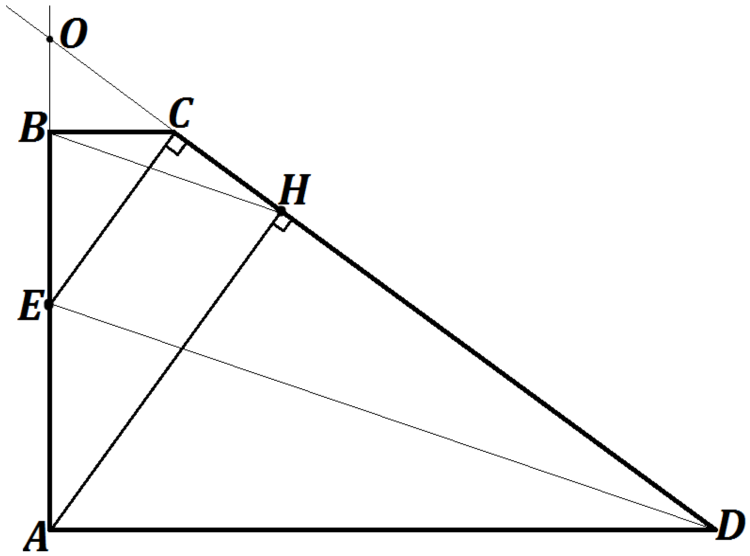
Ответ: $(-\infty; 0] \cup (\log_3 2\,; 1)$

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH. На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.

а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.
б) Найдите отношение BH к ED, если $\angle BCD = 120°$.

Решение:
а)



Пусть $AB \cap CD = O$

BHбудет параллельна ED, если треугольник OBH будет подобен треугольнику OED
У этих треугольников есть общий угол, поэтому для второго признака подобия осталось получить тождество:
$$\frac{OD}{OH} = \frac{OE}{OB}$$

$\triangle\, BCO \sim \triangle\, CEO \sim \triangle\, AOH \sim \triangle\, AOD$по двум углам
$$\begin{pmatrix} 90° \\ \angle O - \text{общий} \end{pmatrix}$$

Запишем отношение прилежащего к углу O катета к гипотенузе в каждом из треугольников:

$$\frac{OB}{OC} = \frac{OC}{OE} = \frac{OH}{AO} = \frac{OA}{OD}$$

$$\frac{OB}{OC} = \frac{OA}{OD}$$
=>
$$OC \cdot OA = OB \cdot OD$$

$$\frac{OC}{OE}=\frac{OH}{AO}$$
=>
$$OC\cdot OA=OE\cdot OH$$

=>
$$OB\cdot OD=OE\cdot OH \qquad \Big|:OB$$

$$OD=\frac{OE\cdot OH}{OB} \qquad \Big|:OH$$

$$\frac{OD}{OH}=\frac{OE}{OB}$$

=>
$\triangle OBH \sim \triangle OED$ по двум пропорциональным сторонам и углу между ними
$$\left(\begin{matrix}\dfrac{OD}{OH}=\dfrac{OE}{OB}\\ \angle O - \text{общий}\end{matrix}\right)$$

=>
$BH \parallel ED$
■

б)
Искомое отношение BH к ED – это коэффициент подобия треугольников OBH и OED

$\angle BCE=\angle BCD-\angle ECD=120-90=30°$
$\angle OCB=\angle OCE-\angle BCE=90-30=60°$
$\angle BOC=180-\angle OBC-\angle OCB=180-90-60=30°$
$\angle OEC=180-\angle OCE-\angle EOC=180-90-30=60°$

$$\frac{BH}{ED}=\frac{OB}{OE}$$

Выразим OB и BE через BC
$$\operatorname{tg}\angle OCB=\frac{OB}{BC}$$
$$\operatorname{tg}60°=\frac{OB}{BC}$$
=>
$$OB=BC\cdot\sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg}\angle BEC=\frac{BC}{BE}$$
$$\operatorname{tg}60°=\frac{BC}{BE}$$
=>
$$BE=\frac{BC}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{OB}{OE}=\frac{OB}{OB+BE}=\frac{BC\cdot\sqrt{3}}{BC\cdot\sqrt{3}+\frac{BC}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{3}{4}$$
=>
$$\frac{BH}{ED}=\frac{3}{4}$$

Ответ: б) $\frac{3}{4}$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 28 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наибольший годовой платёж составит 9 млн рублей?

Решение:
Пусть n − срок кредита

Составим таблицу:

Год	Долг на начало года	Основной платёж	Дополнительный платёж
1	28	$\frac{28}{n}$	$\frac{25}{100} \cdot 28 = 7$
…			
n	$\frac{28}{n}$	$\frac{28}{n}$	$\frac{25}{100} \cdot \frac{28}{n} = \frac{7}{n}$

Очевидно, что наибольший годовой платёж будет в первом году (потому что платежи равномерно уменьшаются в течение n лет)
=>
Наибольший годовой платёж = 9 млн

$$\frac{28}{n} + 7 = 9$$

$$\frac{28}{n} = 2$$

$$n = 14$$

=>

В таблице все значения становятся известными:

Год	Долг на начало года	Основной платёж	Дополнительный платёж
1	28	$\frac{28}{14} = 2$	7
…			
14	2	2	$\frac{7}{14} = 0,5$

Общая сумма выплат (ОСВ) – это все основные платежи и все дополнительные платежи (сумму всех дополнительных платежей найдём с помощью формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии)

Сумма первых n членов арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$\text{ОСВ} = 14 \cdot 2 + \frac{7 + 0,5}{2} \cdot 14$$

$$\text{ОСВ} = 28 + 7,5 \cdot 7 = 80,5$$

Ответ: 80,5 млн

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$2^x - a = \sqrt{4^x - a}$
имеет единственный корень.

Решение:
Пусть $2^x = t$
=>
$t > 0$

Каждому конкретному положительному значению t будет соответствовать единственное значение x

$t - a = \sqrt{t^2 - a}$

Если $t - a < 0$, то решений нет (т.к. корень не может быть равен отрицательному числу)
=>
$\begin{cases} t - a \geq 0 \\ (t-a)^2 = t^2 - a \end{cases}$

$\begin{cases} t \geq a \\ t^2 - 2at + a^2 = t^2 - a \end{cases}$

$\begin{cases} t \geq a \\ a^2 - 2at + a = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} t \geq a \\ 2at = a^2 + a \end{cases}$

Если $a = 0$, то
$2 \cdot 0 \cdot t = 0^2 + 0$
=>
t —любое положительное число
=>
$a \neq 0$
(т.к. мы ищем единственное решение)

Выразим t из уравнения $2at = a^2 + a$
$t = \dfrac{a^2 + a}{2a} = \dfrac{a+1}{2}$

Для t должно выполняться два условия:
$\begin{cases} t > 0 \\ t \geq a \end{cases}$

$\begin{cases} \dfrac{a+1}{2} > 0 \\ \dfrac{a+1}{2} \geq a \end{cases}$

$\begin{cases} a + 1 > 0 \\ a + 1 \geq 2a \end{cases}$

$\begin{cases} a > -1 \\ a \leq 1 \end{cases}$

И не забываем, что $a \neq 0$

Ответ: $a \in (-1; 0) \cup (0; 1]$

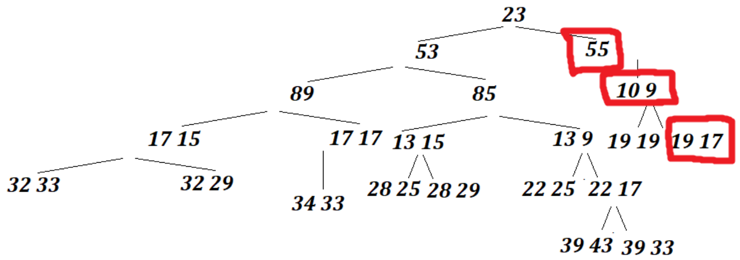
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений а, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений а	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений а	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 На доске написаны числа 2 и 3. За один ход два числа a и b, записанные на доске, заменяются на два числа: или $a + b$ и $2a - 1$, или $a + b$ и $2b - 1$ (например, из чисел 2 и 3 можно получить либо 3 и 5, либо 5 и 5).

а) Приведите пример последовательности ходов, после которых одно из двух чисел, написанных на доске, окажется числом 19.

б) Может ли после 100 ходов одно из двух чисел, написанных на доске, оказаться числом 200?
в) Сделали 1007 ходов, причём на доске никогда не было написано одновременно двух равных чисел. Какое наименьшее значение может принимать разность большего и меньшего из полученных чисел?

Решение:
а)



$(2;3) \to (5;5) \to (10;9) \to (19;17)$

б)
Сумма чисел $a+b$ после первого хода равна 5

Сумма увеличивается на 3 или больше (она не может увеличиваться на 2, 1 или не изменяться)

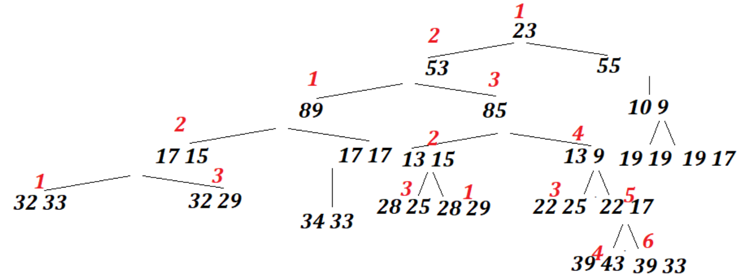
Число 200 может получиться одним из трёх вариантов:

$a+b=200$ Даже если брать минимально возможное увеличение суммы на 3 (хотя очевидно, что сумма будет увеличиваться быстрее), то: $S_{min}=5+99\cdot 3$ $S_{min}=302$ => $S_{min}>200$ => $a+b\neq 200$	$2a-1=200$ $2a=201$ $a=100{,}5$ Но a – целое число => $2a-1\neq 200$	$2b-1=200$ $2b=201$ $b=100{,}5$ Но b – целое число => $2b-1\neq 200$

в)
Найдём разность чисел после совершения хода:

$(a+b)-(2a-1)=$ $=a+b-2a+1=$ $=(b-a)+1$	$(a+b)-(2b-1)=$ $=a+b-2b+1=$ $=(a-b)+1$

=>
Модуль разность всегда меняется на 1 после каждого хода, можно это заметить и по подбору в пункте а)



Левая ветка данного подбора – это, очевидно, то, что мы ищем, но попробуем доказать более формально

Изначально у чисел 23 модуль разности равен 1, через ход модуль разности станет чётным, ещё через ход станет нечётным и т.д.
=>
Через 1007 ходов модуль разности точно будет чётным
=>
Через 1007 ходов модуль разности будет как минимум равен 2

Приведём пример ситуации, когда модуль разности после 1007 ходов равен 2:
Первым ходом выберем пару 53 (т.к. пара 55 не удовлетворяет требованиям пункта в)
Затем получаем последовательность, которая даёт разность «1» после каждого чётного номера хода и разность «2» после каждого нечётного номера хода:

Начальное положение	23	Разность 1
1-й ход	53 или $x+2 \quad x$	Разность 2
2-й ход	$2x+2 \quad 2x+3$	Разность 1

3-й ход	$4x+5 \quad 4x+3$	Разность 2
4-й ход	$8x+8 \quad 8x+9$	Разность 1
5-й ход	$16x+17 \quad 16x+15$	Разность 2
…		
1006-й ход		Разность 1
1007-й ход		Разность 2

Ответ: а) приведён, б) нет, в) 2

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: - обоснованное решение п. а; - обоснованное решение п. б; - искомая оценка в п. в; - пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4