Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания с кратким ответом повышенного уровня сложности и 7 заданий с развернутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

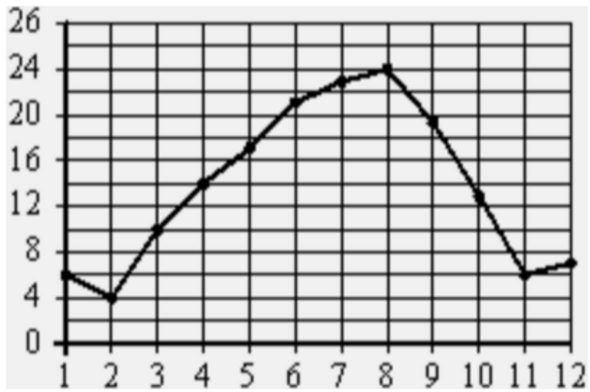
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 В городе Nживёт 150 000 жителей. Среди них 15% детей и подростков. Среди взрослых 45% не работают (пенсионеры, студенты, домохозяйки и т.п.). Сколько взрослых жителей работает?

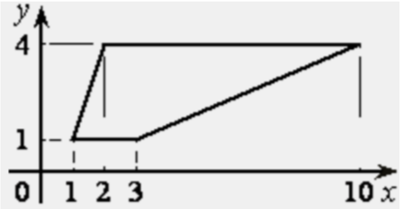
Ответ: ___________________________.

2 На рисунке жирными точками показана среднемесячная температура воздуха в Сочи за каждый месяц 1920 года. По горизонтали указываются номера месяцев, по вертикали – температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите по рисунку, какой была наибольшая среднемесячная температура в Сочи в 1920 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: ___________________________.

3 Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.



Ответ: ___________________________.

4 Дима, Марат, Петя, Надя и Света бросили жребий – кому начинать игру. Найдите вероятность того, что начинать игру должен будет мальчик.

Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения

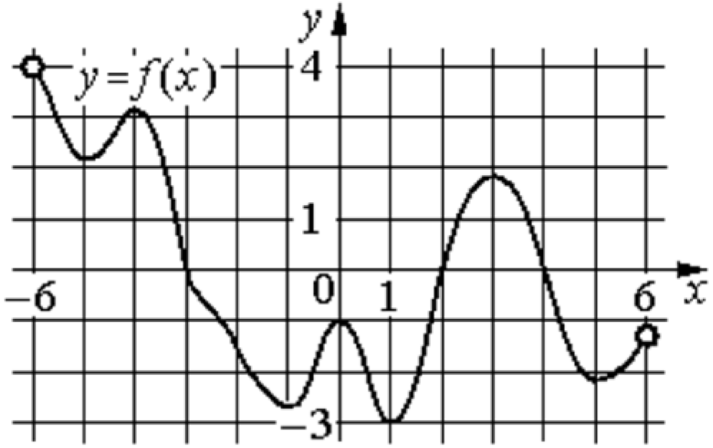
$\frac{2}{9}x = -3\frac{7}{9}$.

Ответ: ___________________________.

6 В треугольнике ABC $AC = BC = 20$, $AB = 28$. Найдите $\cos A$.

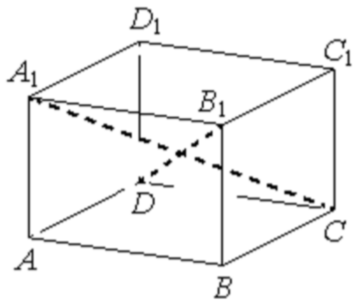
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-6; 6)$. Найдите количество решений уравнения $f`(x) = 0$ на отрезке $[-4{,}5; 2{,}5]$.



Ответ: ___________________________.

8 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $BD_1 = 2AD$. Найдите угол между диагоналями DB_1 и CA_1. Ответ дайте в градусах.



Ответ: ___________________________.

9 Найдите значение выражения $\dfrac{-6\sin 374^\circ}{\sin 14^\circ}$.

Ответ: ___________________________.

10 Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением a(в км/ч^2). Скорость v (в км/ч) вычисляется по формуле $v=\sqrt{2la}$, где $l-$ пройденный автомобилем путь (в км). Найдите ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 1,1 км, приобрести скорость 110 км/ч. Ответ дайте в км/ч^2.

Ответ: ___________________________.

11 Из городов А и В навстречу друг другу одновременно выехали мотоциклист и велосипедист. Мотоциклист приехал в город В на 12 часов раньше, чем велосипедист приехал в город А, а встретились они через 2 часа 30 минут после выезда. Сколько часов затратил на путь из города Вв город А велосипедист?

Ответ: ___________________________.

12 Найдите наибольшее значение функции
$y=33x-30\sin x+29$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)+\sin x=0.$$
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2};-\frac{\pi}{2}\right]$.

14 В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=4$ и $BC=3$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA=\sqrt{11}$, $SB=3\sqrt{3}$, $SD=2\sqrt{5}$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды.
б) Найдите угол между прямой SC и плоскостью ASB.

15 Решите неравенство
$$\frac{\log_x 2x^{-1}\cdot\log_x 2x^2}{\log_{2x} x\cdot\log_{2x^{-2}} x}<40.$$

16 Точка M лежит на стороне BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$, причём B и C — вершины равнобедренных треугольников с основаниями AM и DM соответственно, а прямые AM и MDперпендикулярны.

а) Докажите, что биссектрисы углов при вершинах B и C четырёхугольника $ABCD$ пересекаются на стороне AD.
б) Пусть $N-$ точка пересечения этих биссектрис. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $BM:MC=1:3$, а площадь четырёхугольника, стороны которого лежат на прямых AM, DM, BN и CN, равна 18.

17 15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r **–целое** число;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0

Найдите наименьшее значение r, при котором общая сумма выплат будет больше 1,2 млн рублей.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$a^2-5a+5\sqrt{2x^2+25}=3|x-5a|-6|x|$$

имеет хотя бы один корень.

19 Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 720, и

а) пять;
б) четыре;
в) три
из них образуют геометрическую прогрессию?

О проекте «Пробный ЕГЭ каждую неделю»
Данный ким составлен командой всероссийского волонтёрского проекта «ЕГЭ 100 баллов» https://vk.com/ege100ballov и безвозмездно распространяется для любых некоммерческих образовательных целей.

Нашли ошибку в варианте?
Напишите нам, пожалуйста, и мы обязательно её исправим!
Для замечаний и пожеланий: https://vk.com/topic-10175642_39008096
(также доступны другие варианты для скачивания)

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:

ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	7 лет репетиторской деятельности
Регалии:	Основатель проекта Школа Пифагора
Аккаунт ВК:	https://vk.com/eugene10
Сайт и доп. информация:	https://vk.com/shkolapifagora https://youtube.com/ШколаПифагора

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 190204

Система оценивания
Ответы к заданиям 1-19

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Верно выполненные задания 13-15 максимум оцениваются в 2 балла, задания 16-17 – в 3 балла, а задания18-19 – в 4 балла.

№ задания	Ответ
1	70125
2	24
3	15
4	0,6
5	-17
6	0,7
7	4
8	60
9	-6
10	5500
11	15
12	29
13	а) $\pi n, \frac{2\pi}{3}+2\pi n, -\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\ n\in Z.$ б) $-\pi; -\frac{4\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3}$
14	30
15	$\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)\cup\left(\sqrt[3]{2};\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right)$
16	96
17	5
18	$\{-5\}\cup\left[-5\sqrt{3}+10;5\sqrt{3}+10\right]$
19	а) нет, б) нет, в) да

Решения и критерии оценивания заданий13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависитот полноты решения и правильности ответа.
Общие требования к выполнению заданий с развёрнутымответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможныеслучаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записиформы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0баллов.
Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.
При выполнении задания могут использоватьсябездоказательстваи ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общегообразования.

13 а) Решите уравнение

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)+\sin x=0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2};-\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение:

а)

$\sin 2x+\sin x=0$

Синус двойного угла

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

$2\sin x\cdot\cos x+\sin x=0$

$\sin x\cdot(2\cos x+1)=0$

$\sin x=0$ $x=\pi n; n\in Z$	$2\cos x+1=0$ $2\cos x=-1$ $\cos x=-\frac{1}{2}$

	$x_1 = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n;\ n \in Z$ $x_2 = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n;\ n \in Z$

б)
Подберём корни для $x = \pi n; n \in Z$
Если $n = -2$, то $x = -2\pi \notin \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$
Если $n = -1$, то $x = -\pi \in \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$
Если $n = 0$, то $x = 0 \notin \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$

Подберём корни для $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n; n \in Z$
Если $n = -2$, то $x = \frac{2\pi}{3} - 4\pi = -\frac{10\pi}{3} \notin \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$
Если $n = -1$, то $x = \frac{2\pi}{3} - 2\pi = -\frac{4\pi}{3} \in \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$
Если $n = 0$, то $x = \frac{2\pi}{3} \notin \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$

Подберём корни для $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; n \in Z$
Если $n = -1$, то $x = -\frac{2\pi}{3} - 2\pi = -\frac{8\pi}{3} \notin \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$
Если $n = 0$, то $x = -\frac{2\pi}{3} \in \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$
Если $n = 1$, то $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{4\pi}{3} \notin \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$

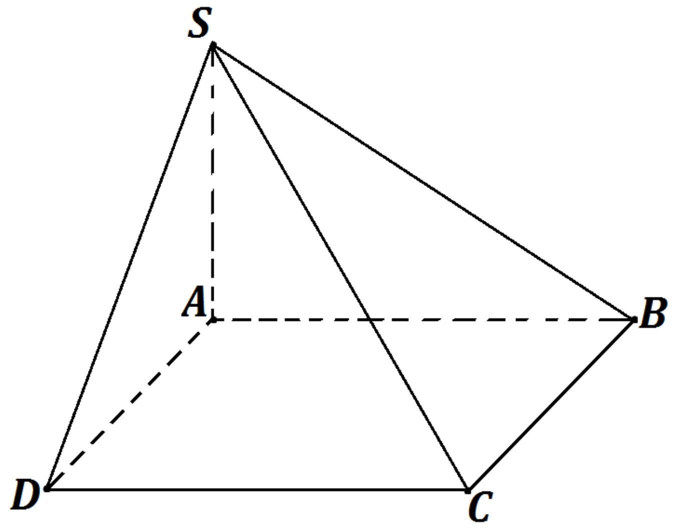
Ответ: а) $\pi n, \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n;\ n \in Z$. б) $-\pi; -\frac{4\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3}$

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б* ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = 3$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{11}$, $SB = 3\sqrt{3}$, $SD = 2\sqrt{5}$.

а) Докажите, что SA – высота пирамиды.
б) Найдите угол между прямой SC и плоскостью ASB.

Решение:
а)

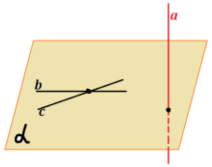


Заметим, что в $\triangle ABS$ выполняется теорема Пифагора:
$SB^2 = SA^2 + AB^2$
$(3\sqrt{3})^2 = \sqrt{11}^2 + 4^2$
$27 = 11 + 16$
$27 = 27$
$=> \triangle ABS$ – прямоугольный и $\angle SAB = 90°$ по теореме, обратной теореме Пифагора

Заметим, что в $\triangle ADS$ выполняется теорема Пифагора:
$SD^2 = SA^2 + AD^2$
$(2\sqrt{5})^2 = \sqrt{11}^2 + 3^2$

$20 = 11 + 9$
$20 = 20$
$=> \triangle\, ADS$ – прямоугольный и $\angle SAD = 90°$ по теореме, обратной теореме Пифагора

Признак перпендикулярности прямой и плоскости



Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости

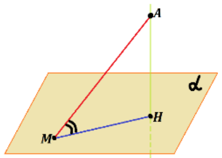
$\begin{matrix} SA \perp AB \\ SA \perp AD \end{matrix}$ (т.к. $\triangle\, ABS$ и $\triangle\, ADS$ – прямоугольные)
$AB \cap AD = A$
$=> SA \perp (ABC)$
$=> SA$ – высота пирамиды
■

б)
$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$ (по теореме Пифагора)

$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{\sqrt{11}^2 + 5^2} = \sqrt{36} = 6$ (по теореме Пифагора)

Заметим, что в $\triangle\, SBC$ выполняется теорема Пифагора:
$SC^2 = SB^2 + BC^2$
$6^2 = \left(3\sqrt{3}\right)^2 + 3^2$
$36 = 27 + 9$
$36 = 36$
$=> \triangle\, SBC$ – прямоугольный и $\angle SBC = 90°$ по теореме, обратной теореме Пифагора

Угол между прямой и плоскостью



Угол между прямой и плоскостью – это угол между прямой и её проекцией на плоскость

SB – это проекция SC на «дальнюю стену», т.е. на плоскость ABS
$=>$
$\angle BSC$ –искомый угол между прямой SC и плоскостью ASB

$$\operatorname{tg} \angle BSC = \frac{BC}{SB} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\angle BSC = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = 30°$$

Ответ: 30

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство

$$\frac{\log_x 2x^{-1} \cdot \log_x 2x^2}{\log_{2x} x \cdot \log_{2x^{-2}} x} < 40.$$

.

Решение:
ОДЗ:
1.
$x > 0$

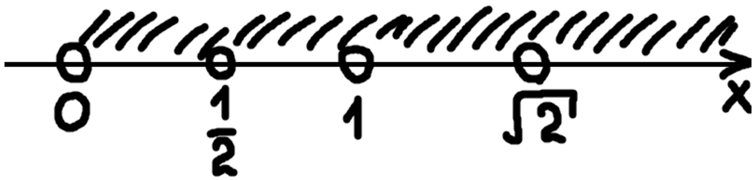
2.
$x \neq 1$

3.
$2x \neq 1$

$x \neq \frac{1}{2}$

4.
$2x^{-2} \neq 1$
$x^{-2} \neq \frac{1}{2}$
$\frac{1}{x^2} \neq \frac{1}{2}$
$x^2 \neq 2$
$x \neq \pm\sqrt{2}$

Объединим ОДЗ:



$$\frac{\log_x 2\,x^{-1} \cdot \log_x 2\,x^2}{\log_{2x} x \cdot \log_{2x^{-2}} x} < 40$$

Задача: привести каждый логарифм к основанию x

Свойство логарифмов

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\frac{\log_x 2\,x^{-1} \cdot \log_x 2\,x^2}{\frac{1}{\log_x 2x} \cdot \frac{1}{\log_x 2x^{-2}}} < 40$$

Сложение логарифмов с одинаковыми основаниями

$$\log_a b + \log_a c = \log_a b \cdot c$$

$$\frac{(\log_x 2 + \log_x x^{-1}) \cdot (\log_x 2 + \log_x x^2)}{\frac{1}{(\log_x 2 + \log_x x)} \cdot \frac{1}{(\log_x 2 + \log_x x^{-2})}} < 40$$

$$\frac{(\log_x 2 - 1) \cdot (\log_x 2 + 2)}{\frac{1}{(\log_x 2+1)} \cdot \frac{1}{(\log_x 2-2)}} < 40$$

$(\log_x 2 - 1)(\log_x 2 + 1) \cdot (\log_x 2 + 2)(\log_x 2 - 2) < 40$

Пусть $\log_x 2 = t$

$(t-1)(t+1) \cdot (t+2)(t-2) < 40$

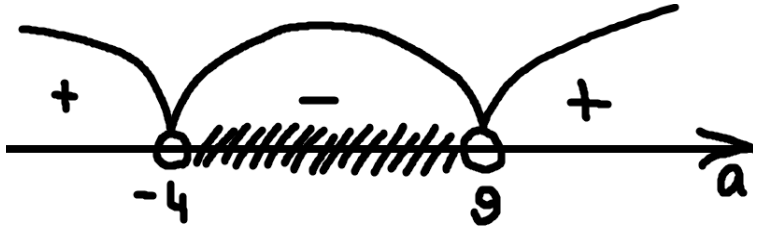
$(t^2 - 1) \cdot (t^2 - 4) - 40 < 0$

$t^4 - 5t^2 + 4 - 40 < 0$

$t^4 - 5t^2 - 36 < 0$

Пусть $t^2 = a$

$a^2 - 5a - 36 < 0$
$a^2 - 5a - 36 = 0$
$D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-36) = 169$
$a_1 = \frac{5+13}{2} = 9$
$a_2 = \frac{5-13}{2} = -4$



$-4 < a < 9$
$-4 < t^2 < 9$
=>
$t^2 < 9$
$t^2 - 9 < 0$
$(t-3)(t+3) < 0$

$-3 < t < 3$
$-3 < \log_x 2 < 3$

$\begin{cases} \log_x 2 > -3 \\ \log_x 2 < 3 \end{cases}$

$\begin{cases} \log_x 2 > \log_x x^{-3} \\ \log_x 2 < \log_x x^3 \end{cases}$

Решим каждое неравенство, а потом объединим решения:
1.
$\log_x 2 > \log_x x^{-3}$

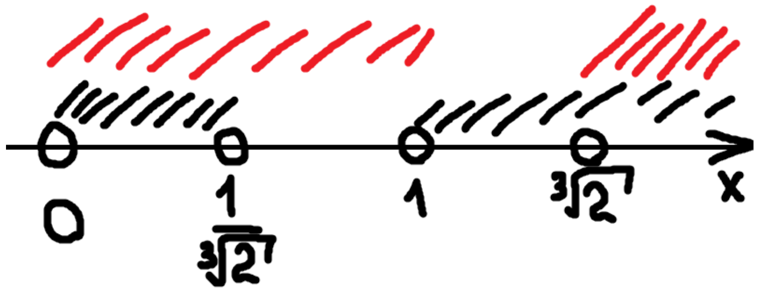
$\begin{cases} x > 1 \\ 2 > x^{-3} \end{cases}$ $\begin{cases} x > 1 \\ \frac{1}{x^3} < \frac{2}{1} \end{cases}$ $\begin{cases} x > 1 \\ 1 < 2x^3 \end{cases}$ $\begin{cases} x > 1 \\ x^3 > \frac{1}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x > 1 \\ x > \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{cases}$ =>	$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 2 < x^{-3} \end{cases}$ $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ \frac{1}{x^3} > \frac{2}{1} \end{cases}$ $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ x < \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{cases}$ => $0 < x < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$x > 1$	

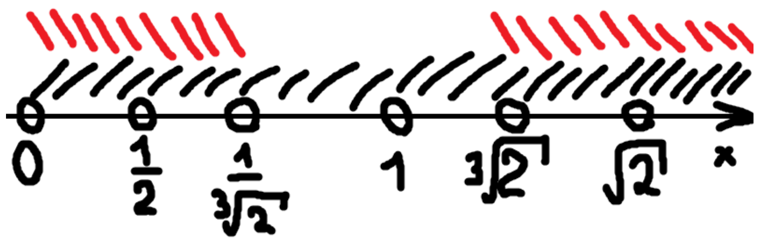
2.
$\log_x 2 < \log_x x^3$

$\begin{cases} x > 1 \\ 2 < x^3 \end{cases}$ $\begin{cases} x > 1 \\ x > \sqrt[3]{2} \end{cases}$ => $x > \sqrt[3]{2}$	$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 2 > x^3 \end{cases}$ $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ x < \sqrt[3]{2} \end{cases}$ => $0 < x < 1$

Оценим значение $\sqrt[3]{2}$
$\sqrt[3]{1{,}728} = 1{,}2$
$\sqrt[3]{2{,}197} = 1{,}3$
=>
$1{,}2 < \sqrt[3]{2} < 1{,}3$



Объединим получившийся ответ с ОДЗ



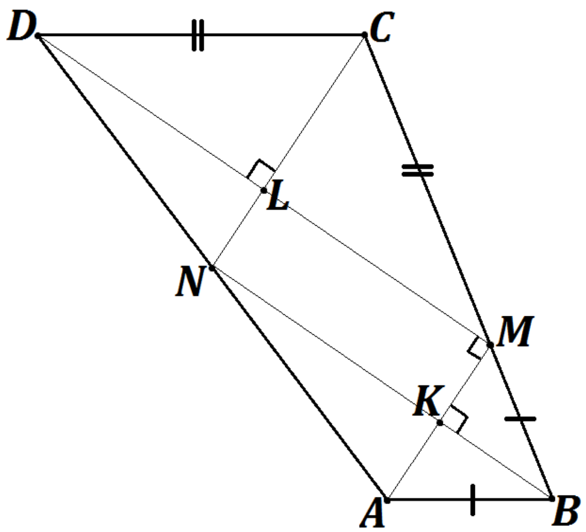
Ответ: $\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)\cup\left(\sqrt[3]{2};\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Точка M лежит на стороне BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$, причём B и C — вершины равнобедренных треугольников с основаниями AM и DM соответственно, а прямые AM и MDперпендикулярны.

а) Докажите, что биссектрисы углов при вершинах B и C четырёхугольника $ABCD$ пересекаются на стороне AD.
б) Пусть N — точка пересечения этих биссектрис. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что
$BM:MC = 1:3$, а площадь четырёхугольника, стороны которого лежат на прямых AM, DM, BN и CN, равна 18.

Решение:
а)



Проведём биссектрису BK в $\triangle ABM$
BK — высота и медиана
(по свойству равнобедренного треугольника)

Пусть $BK \cap AD = N$

$BK \perp AM$
(т.к. BK — высота в $\triangle ABM$)
$MD \perp AM$
(по условию)
=>
$BK \parallel MD$
=>
$BN \parallel MD$
=>
$KN \parallel MD$

K — середина AM
(т.к. BK — медиана в $\triangle ABM$)
=>
KN — средняя линия в $\triangle ADM$
=>
N — середина AD

Аналогично,

Проведём биссектрису CL в $\triangle CDM$
$CL -$ высота и медиана
(по свойству равнобедренного треугольника)

Пусть $CL \cap AD = E$

$CL \perp DM$
(т.к. $CL -$ высота в $\triangle CDM$)
$AM \perp DM$
(по условию)
=>
$CL \parallel AM$
=>
$CE \parallel AM$
=>
$EL \parallel AM$

$L -$ середина DM
(т.к. $CL -$ медиана в $\triangle CDM$)
=>
$EL -$ средняя линия в $\triangle ADM$
=>
$E -$ середина AD

=> точки N иE совпадают в середине стороны AD
■

б)
$KLMN$ −прямоугольник
(т.к. $KN \parallel LM$, $KM \parallel LN$ и $\angle KML = 90°$)

Пусть
$BM = x$
$CM = 3x$
$\angle MBK = \angle CMD$
(т.к. это соответственные углы при параллельных прямых)

Пусть
$\angle MBK = \alpha = \angle CMD$

$\sin\alpha = \frac{MK}{BM} = \frac{MK}{x}$
=>
$MK = x \cdot \sin\alpha$

$\cos\alpha = \frac{ML}{CM} = \frac{ML}{3x}$
=>
$ML = 3x \cdot \cos\alpha$

$MK \cdot ML = 18$
$x \cdot \sin\alpha \cdot 3x \cdot \cos\alpha = 18$
$x^2 \cdot \sin 2\alpha = 12$

$S_{ABCD} = S_{ABM} + S_{CDM} + S_{ADM}$

$S_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BM \cdot \sin\angle ABM$
$S_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot x \cdot \sin 2\alpha = 0{,}5x^2 \cdot \sin 2\alpha$

$S_{CDM} = \frac{1}{2} \cdot CM \cdot DM \cdot \sin\angle CMD$
$S_{CDM} = \frac{1}{2} \cdot CM \cdot 2ML \cdot \sin\angle CMD$
$S_{CDM} = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot 2 \cdot 3x \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha = 4{,}5x^2 \cdot \sin 2\alpha$

$S_{ADM} = \frac{AM \cdot DM}{2}$
$S_{ADM} = \frac{2MK \cdot 2ML}{2}$
$S_{ADM} = \frac{2 \cdot x \cdot \sin\alpha \cdot 2 \cdot 3x \cdot \cos\alpha}{2} = 3x^2 \cdot \sin 2\alpha$

$S_{ABCD} = 0{,}5x^2 \cdot \sin 2\alpha + 4{,}5x^2 \cdot \sin 2\alpha + 3x^2 \cdot \sin 2\alpha$
$S_{ABCD} = 8x^2 \cdot \sin 2\alpha$
$S_{ABCD} = 8 \cdot 12 = 96$

Ответ: 96

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r —**целое** число;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0

Найдите наименьшее значение r, при котором общая сумма выплат будет больше 1,2 млн рублей.

Решение:
Переведём миллионы в тысячи:
1 млн это 1000 тыс.
1,2 млн это 1200 тыс.

Пусть клиент вносил платежи 7 числа каждого месяца

Кредит на 6 месяцев, поэтому будет 6 платежей:
x_1 – первый платёж
x_2 – второй платёж
…
x_6 – шестой платёж

Составим таблицу как изменялась сумма долга:

Число	Сумма долга
15.01	1000
01.02	$1000 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right) = 1000 + 10r$
07.02	$1000 + 10r - x_1$
15.02	900
01.03	$900 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right) = 900 + 9r$
07.03	$900 + 9r - x_2$
15.03	800
01.04	$800 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right) = 800 + 8r$
07.04	$800 + 8r - x_3$
15.04	700
01.05	$700 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right) = 700 + 7r$
07.05	$700 + 7r - x_4$

15.05	600
01.06	$600 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right) = 600 + 6r$
07.06	$600 + 6r - x_5$
15.06	500
01.07	$500 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right) = 500 + 5r$
07.07	$500 + 5r - x_6$
15.07	0

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 1000 + 10r - x_1 = 900 \\ 900 + 9r - x_2 = 800 \\ 800 + 8r - x_3 = 700 \\ 700 + 7r - x_4 = 600 \\ 600 + 6r - x_5 = 500 \\ 500 + 5r - x_6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1000 + 10r - 900 = x_1 \\ 900 + 9r - 800 = x_2 \\ 800 + 8r - 700 = x_3 \\ 700 + 7r - 600 = x_4 \\ 600 + 6r - 500 = x_5 \\ 500 + 5r = x_6 \end{cases}$$

Сложим левые и правые участи уравнений:
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 1000 + 45r$

Общая сумма выплат должна быть больше 1,2 млн рублей (по условию)
=>
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 > 1200$тыс.

$1000 + 45r > 1200$
$45r > 200$

$r > \frac{200}{45}$
$r > \frac{40}{9}$
$r > 4\frac{4}{9}$

Требуется найти наименьшее подходящее целое r
=>
$r = 5$

Ответ: 5

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$a^2 - 5a + 5\sqrt{2x^2 + 25} = 3|x - 5a| - 6|x|$
имеет хотя бы один корень.

Решение:
Пусть
$f(x) = a^2 - 5a + 5\sqrt{2x^2 + 25}$
$g(x) = 3|x - 5a| - 6|x|$

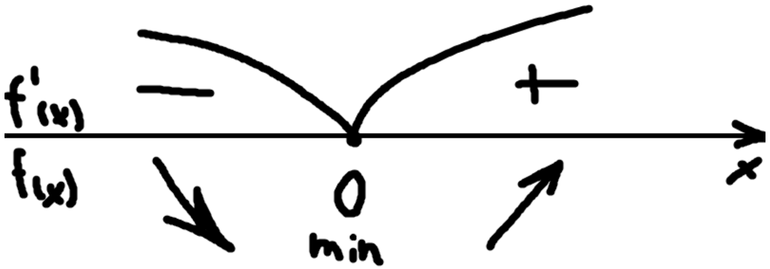
Исследуем функцию $f(x)$ на предмет чётности и возрастание/убывание

$f(-x) = a^2 - 5a + 5\sqrt{2(-x)^2 + 25} = a^2 - 5a + 5\sqrt{2x^2 + 25}$

=>
$f(x)$ —чётная

$$f'(x)=\frac{5\cdot 4x}{2\sqrt{2x^2+25}}=\frac{10x}{\sqrt{2x^2+25}}$$
$$\frac{10x}{\sqrt{2x^2+25}}=0$$

$10x=0$
$x=0$



=>
$x=0$ —это точка минимума
=>
$f(x)$ принимает наименьшее значение в этой точке

$f(0)=a^2-5a+5\sqrt{2\cdot 0^2+25}$
$f(0)=a^2-5a+25$ – наименьшее значение функции

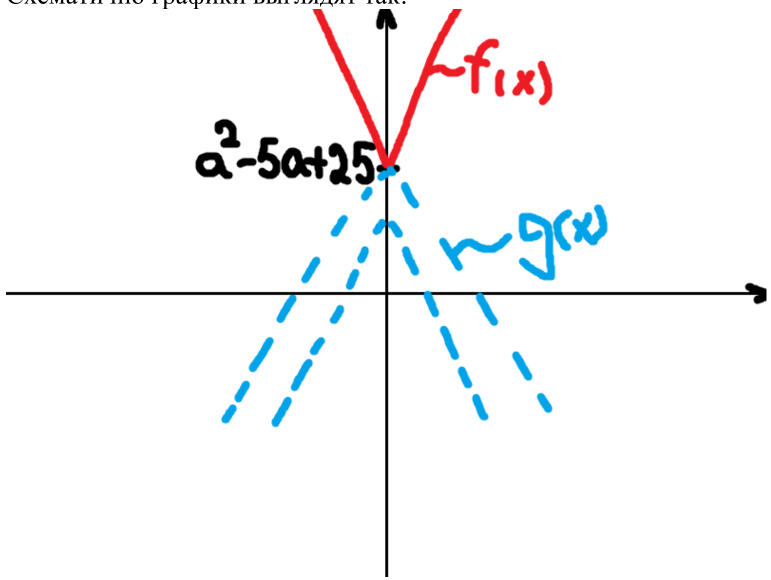
Исследуем функцию $g(x)$ на возрастание/убывание
$g(x)=3|x-5a|-6|x|$

Если $x\ge 0$
$g(x)=\pm 3(x-5a)-6x$
$g(x)=\pm 3x-6x\mp 15a$
=>
$k=-9$ или $k=-3$
=>
$g(x)$ убывает при $x\ge 0$

Если $x<0$
$g(x)=\pm 3(x-5a)+6x$
$g(x)=\pm 3x+6x\mp 15a$

=>
$k=9$ или $k=3$
=>
$g(x)$ возрастает при $x<0$

Схематично графики выглядят так:



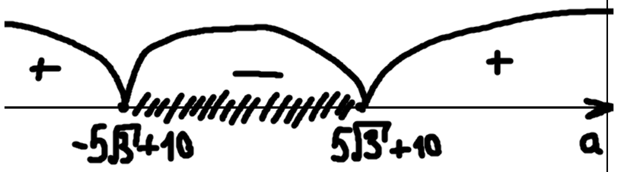
Чтобы корень был 1 или больше нужно, чтобы выполнялось условие:
$g(0)\ge f(0)$

$g(0)=3|0-5a|-6|0|=15|a|$
$f(0)=a^2-5a+25$

$15|a|\ge a^2-5a+25$

$\begin{cases} a\ge 0 \\ 15a\ge a^2-5a+25\end{cases}$ $\begin{cases} a\ge 0 \\ a^2-20a+25\le 0\end{cases}$ $a^2-20a+25\le 0$ $a^2-20a+25=0$ $D=300$	$\begin{cases} a<0 \\ -15a\ge a^2-5a+25\end{cases}$ $\begin{cases} a<0 \\ a^2+10a+25\le 0\end{cases}$ $\begin{cases} a<0 \\ (a+5)^2\le 0\end{cases}$

$$a_1 = \frac{20 + 10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} + 10$$
$$a_2 = \frac{20 - 10\sqrt{3}}{2} = -5\sqrt{3} + 10$$



Объединим оба решения системы:

$$\begin{cases} a < 0 \\ a = -5 \end{cases}$$
=>
$a = -5$

Ответ: $a \in \{-5\} \cup \left[-5\sqrt{3} + 10; 5\sqrt{3} + 10\right]$

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений а, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений а	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений а	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 720, и

а) пять;
б) четыре;
в) три
из них образуют геометрическую прогрессию?

Решение:
Разложим 720 на простые множители:

720	2
360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 1$

а)
Пусть
b_1 −первый член геометрической прогрессии
q −знаменатель геометрической прогрессии ($q \neq 1$)

Тогда
$b_1 \cdot b_1 q \cdot b_1 q^2 \cdot b_1 q^3 \cdot b_1 q^4 = 720$

${b_1}^5 q^{10} = 720$

Пусть
${b_1}^5 = 1^5$
=>
$b_1 = 1$

Но q^{10} мы подобрать не сможем, используя делители числа 720, т.к. среди этих делителей нет десятой степени какого-либо числа
=>
Нет

б)
Пусть

k –число, не входящее в геометрическую прогрессию

Тогда
$b_1 \cdot b_1 q \cdot b_1 q^2 \cdot b_1 q^3 \cdot k = 720$

${b_1}^4 q^6 \cdot k = 720$

Пусть
${b_1}^4 = 1^4$
=>
$b_1 = 1$

Но q^6 мы подобрать не сможем, используя делители числа 720, т.к. среди этих делителей нет шестой степени какого-либо числа
=>
Нет

в)
Пусть
k –первое число, не входящее в геометрическую прогрессию
m –второе число, не входящее в геометрическую прогрессию

Тогда
$b_1 \cdot b_1 q \cdot b_1 q^2 \cdot k \cdot m = 720$

${b_1}^3 q^3 \cdot k \cdot m = 720$

Пусть
${b_1}^3 = 1^3$
=>
$b_1 = 1$

$q^3 = 2^3$
=>
$q = 2$

$k = 2 \cdot 3^2 = 18$
$m = 5$

Получаем пять различных натуральных чисел, произведение которых равно 720 и первые три образуют геометрическую прогрессию:

$1 \quad 2 \quad 4 \quad 18 \quad 5$

=>
Да

Ответ: а) нет, б) нет, в) да

Содержание критерия	**Баллы**
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: - обоснованное решение п. а; - обоснованное решение п. б; - искомая оценка в п. в; - пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4