Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания с кратким ответом повышенного уровня сложности и 7 заданий с развернутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

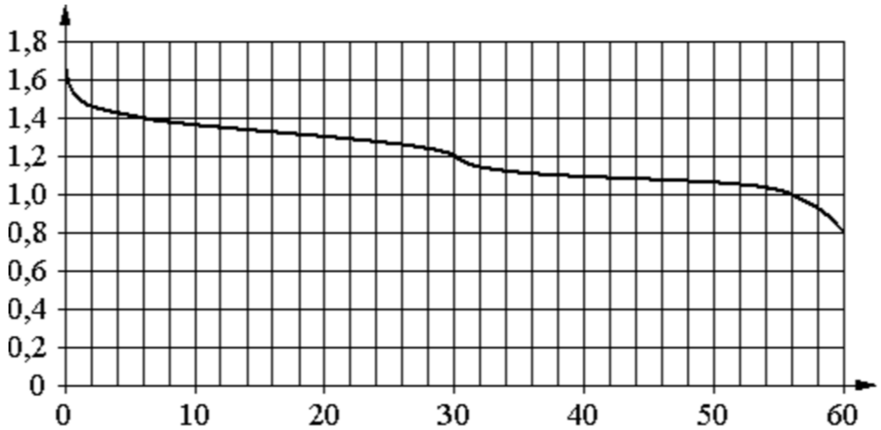
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Футболка стоила 500 рублей. После снижения цены она стала стоит 395 рублей. На сколько процентов была снижена цена на футболку?

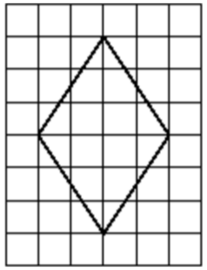
Ответ: ___________________________.

2 При работе фонарика батарейка постепенно разряжается и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На графике показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси отмечено время работы фонарика в часах, на вертикальной оси – напряжение в вольтах. Определите по графику, какое напряжение будет в цепи через 56 часов работы фонарика. Ответ дайте в вольтах.



Ответ: ___________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён ромб. Найдите его площадь.



Ответ: ___________________________.

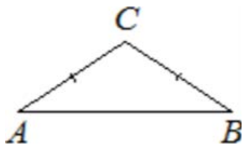
4 Фабрика выпускает сумки. В среднем 19 сумок из 160 имеют скрытые дефекты. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется без дефектов. Результат округлите до сотых.

Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения
$\lg(x + 11) = 1.$

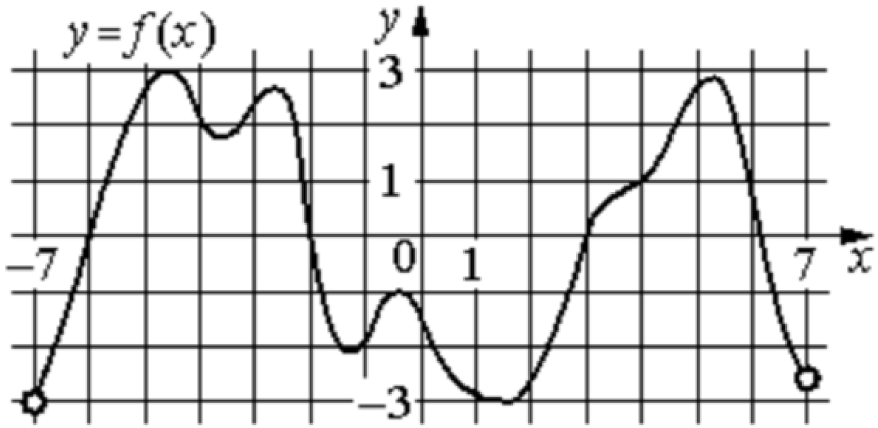
Ответ: ___________________________.

6 В треугольнике ABC угол C равен 102°, стороны AC и BC равны. Найдите угол A. Ответ дайте в градусах.



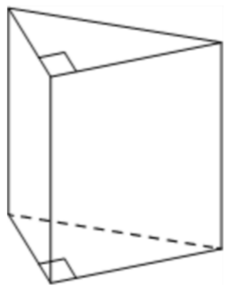
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-7; 7)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна.



Ответ: ___________________________.

8 Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 4 и 7, объём призмы равен 56. Найдите боковое ребро призмы.



Ответ: ___________________________.

9 Найдите значение выражения

$$\frac{\sqrt[3]{36}\cdot\sqrt[5]{36}}{\sqrt[30]{36}}.$$

Ответ: ___________________________.

10 Сила тока в цепи I (в А) определяется напряжением в цепи и сопротивлением электроприбора по закону Ома: $I=\frac{U}{R}$, где U — напряжение (в В), R — сопротивление электроприбора (в Ом). В электросеть включен предохранитель, который плавится, если сила тока превышает 2,5 А. Определите, какое наименьшее сопротивление может быть у электроприбора, подключаемого к сети в 220 В, чтобы сеть продолжала работать. Ответ дайте в омах.

Ответ: ___________________________.

11 В сосуд, содержащий 10 литров 24-процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 5 литров воды. Сколько процентов составит концентрация получившегося раствора?

Ответ: ___________________________.

12 Найдите наибольшее значение функции
$y=(x+10)^2x+2$на отрезке $[-11;-4]$.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$$\sin 2x=\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right).$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$.

14 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$все рёбра равны 5. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB=3$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что $A_1P:PB_1=1:2$, где P —точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1.
б) Найдите объём большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью α.

15 Решите неравенство

$$9\log_{12}(x^2-3x-4)\le 10+\log_{12}\frac{(x+1)^9}{x-4}.$$

16 К окружности, вписанной в квадрат $ABCD$, проведена касательная, пересекающая стороны AB и AD в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что периметр треугольника AMN равен стороне квадрата.
б) Прямая MN пересекает прямую CD в точке P. В каком отношении делит сторону BC прямая, проходящая через точку P и центр окружности, если $AM:MB=1:2$?

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 190128

17 Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят t^2 тыс. рублей в конце года $t (t = 1; 2; \dots)$. В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счёт в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счёте будет увеличиваться в $1 + r$ раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счёте была наибольшей. Расчёты показали, что для этого ценные бумаги нужно продавать строго в конце двадцать первого года. При каких положительных значениях r это возможно?

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$x^2 + (2 - a)^2 = |x - 2 + a| + |x - a + 2|$
имеет единственный корень.

19 Имеются каменные глыбы: 50 штук по 800 кг, 60 штук по 1000 кг и 60 штук по 1500 кг (раскалывать глыбы нельзя).

а) Можно ли увезти все эти глыбы одновременно на 60 грузовиках, грузоподъёмностью 5 тонн каждый, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?
б) Можно ли увезти все эти глыбы одновременно на 38 грузовиках, грузоподъёмностью 5 тонн каждый, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?
в) Какое наименьшее количество грузовиков, грузоподъёмностью 5 тонн каждый, понадобится, чтобы вывезти все эти глыбы одновременно, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:

ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	7 лет репетиторской деятельности
Регалии:	Основатель проекта Школа Пифагора
Аккаунт ВК:	https://vk.com/eugene10
Сайт и доп. информация:	https://vk.com/shkolapifagora https://youtube.com/ШколаПифагора

Система оценивания
Ответы к заданиям 1-19

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Верно выполненные задания 13-15 максимум оцениваются в 2 балла, задания 16-17 – в 3 балла, а задания18-19 – в 4 балла.

№ задания	Ответ
1	21
2	1
3	12
4	0,88
5	-1
6	39
7	5
8	4
9	6
10	88
11	16
12	2
13	а) $\pi n, \frac{\pi}{3}+2\pi n, -\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ n \in Z.$ б)$2\pi; \frac{7\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}$
14	$\frac{1075}{9}$
15	$[-8;-1) \cup (4;16]$
16	$\frac{1}{2}$
17	$\left(\frac{43}{441};\frac{41}{400}\right)$
18	$a=0; a=4$
19	а) Можно, б) Нельзя, в) 39

Решения и критерии оценивания заданий13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 а) Решите уравнение

$$\sin 2x = \cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right).$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение:

а)

$$\sin 2x = \cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$$

$$\sin 2x = \sin x$$

Синус двойного угла

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$2\sin x\cdot\cos x - \sin x = 0$$

$$\sin x\cdot(2\cos x - 1) = 0$$

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 190128

$\sin x = 0$ $x = \pi n; n \in Z$	$2\cos x - 1 = 0$ $2\cos x = 1$ $\cos x = \frac{1}{2}$ $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ n \in Z$ $x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ n \in Z$

б)
Подберём корни для $x = \pi n; n \in Z$

Если $n = 1$, то $x = \pi \notin \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$

Если $n = 2$, то $x = 2\pi \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$

Если $n = 3$, то $x = 3\pi \notin \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$

Подберём корни для $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n; n \in Z$

Если $n = 0$, то $x = \frac{\pi}{3} \notin \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$

Если $n = 1$, то $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3} \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$

Если $n = 2$, то $x = \frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{13\pi}{3} \notin \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$

Подберём корни для $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n; n \in Z$

Если $n = 0$, то $x = -\frac{\pi}{3} \notin \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$

Если $n = 1$, то $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3} \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$

Если $n = 2$, то $x = -\frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{11\pi}{3} \notin \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$

Ответ: а) $\pi n, \frac{\pi}{3} + 2\pi n, -\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ n \in Z$. б) $2\pi; \frac{7\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}$

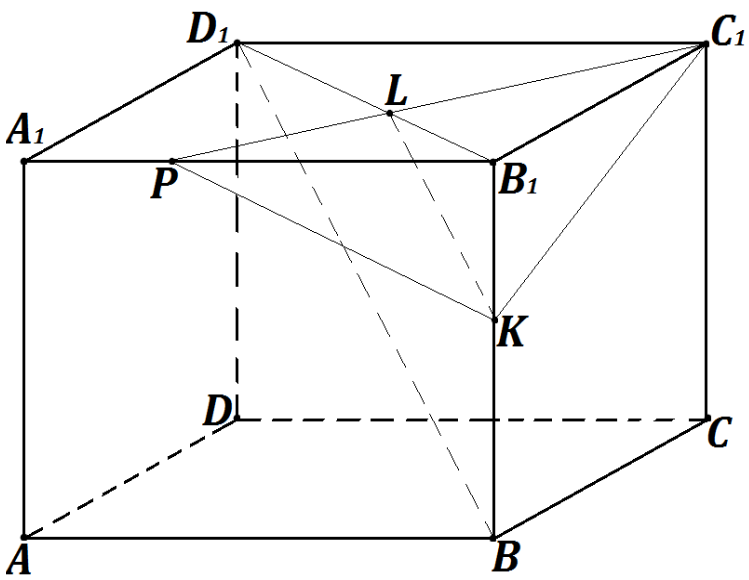
Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б* ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 5. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 3$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что $A_1P : PB_1 = 1 : 2$, где P – точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1.
б) Найдите объём большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью α.

Решение:
а)
$KB = 4$
=>
$KB_1 = BB_1 - KB = 5 - 3 = 2$

Построение плоскости α:



Построим прямую KC_1, т.к. точки K и C_1 лежат в одной плоскости

Построим вспомогательную прямую B_1D_1, которая является проекцией BD_1 на «потолок», т.е. на $(A_1B_1C_1)$
В $\triangle BB_1D_1$ построим KL такую, что $KL \parallel BD_1$
Построим C_1L, т.к. точки C_1 и L лежат в одной плоскости
Продлим C_1L до пересечения с ребром A_1B_1 в точке P
Построим прямую PK, т.к. точки P и K лежат в одной плоскости
=>$\triangle C_1PK$ —сечение куба плоскостью α

Распишем отношение сходственных сторон в подобных треугольниках B_1KL и BB_1D_1

$$\frac{B_1K}{BB_1} = \frac{B_1L}{B_1D_1}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{B_1L}{B_1D_1}$$

Пусть

$B_1L = 2x$

$B_1D_1 = 5x$

$=> D_1L = B_1D_1 - B_1L = 5x - 2x = 3x$

Распишем отношение сходственных сторон в подобных треугольниках PB_1L и C_1D_1L

$$\frac{B_1L}{D_1L} = \frac{B_1P}{C_1D_1}$$

$$\frac{2x}{3x} = \frac{B_1P}{C_1D_1}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{B_1P}{C_1D_1}$$

Пусть

$B_1P = 2y$

$C_1D_1 = 3y$

$=> A_1P = C_1D_1 - B_1P = 3y - 2y = y$

$$\frac{A_1P}{PB_1} = \frac{y}{2y}$$

$$\frac{A_1P}{PB_1} = \frac{1}{2}$$

■

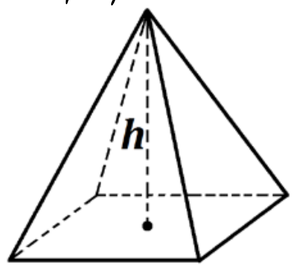
б)

$$PB_1 = \frac{2}{3} \cdot A_1B_1 = \frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{10}{3}$$

$$V_{\text{искомой части куба}} = V_{\text{куба}} - V_{PB_1C_1K}$$

$$V_{\text{куба}} = 5^3 = 125$$

Объём пирамиды



$$V = \frac{1}{3} S_{\text{основания}} \cdot h$$

$$V_{PB_1C_1K} = \frac{1}{3} \cdot S_{PB_1C_1} \cdot B_1K = \frac{1}{3} \cdot \frac{PB_1 \cdot B_1C_1}{2} \cdot B_1K =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{10}{3} \cdot 5}{2} \cdot 2 = \frac{50}{9}$$

$$V_{\text{искомой части куба}} = 125 - \frac{50}{9} = \frac{1125 - 50}{9} = \frac{1075}{9}$$

Ответ: б) $\frac{1075}{9}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство

$$9\log_{12}(x^2-3x-4) \le 10 + \log_{12}\frac{(x+1)^9}{x-4}.$$

.

Решение:

ОДЗ:

1.

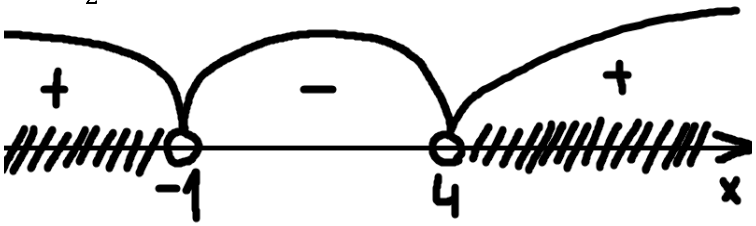
$x^2-3x-4>0$

$x^2-3x-4=0$

$D=(-3)^2-4\cdot1\cdot(-4)=25$

$t_1=\dfrac{3+5}{2}=4$

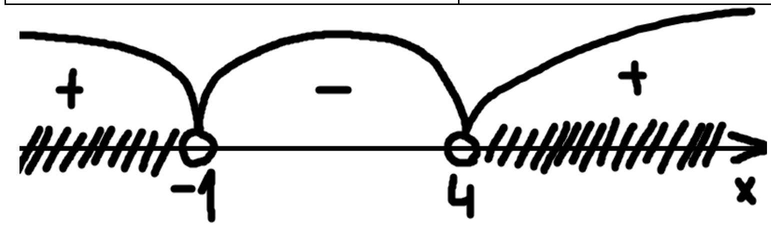
$t_2=\dfrac{3-5}{2}=-1$



2.

$\dfrac{(x+1)^9}{x-4}>0$

$x+1=0$ $x=-1$	$x-4\neq0$ $x\neq4$



Разложение квадратного трёхчлена на множители

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

$$9\log_{12}(x+1)(x-4) \le 10 + \log_{12}\frac{(x+1)^9}{x-4}$$

Свойство логарифмов

$\log_a b^m = m\cdot\log_a b$

$$\log_{12}(x+1)^9(x-4)^9 \le 10 + \log_{12}\frac{(x+1)^9}{x-4}$$

Сложение логарифмов с одинаковыми основаниями

$\log_a b + \log_a c = \log_a b\cdot c$

Вычитание логарифмов с одинаковыми основаниями

$\log_a b - \log_a c = \log_a \dfrac{b}{c}$

$\log_{12}(x+1)^9 + \log_{12}(x-4)^9 \le 10 + \log_{12}(x+1)^9 - \log_{12}(x-4)$

$\log_{12}(x-4)^9 \le 10 - \log_{12}(x-4)$

$\log_{12}(x-4)^9 + \log_{12}(x-4) \le 10$

$\log_{12}(x-4)^{10} \le \log_{12}12^{10}$

$(x-4)^{10} \le 12^{10}$

=>

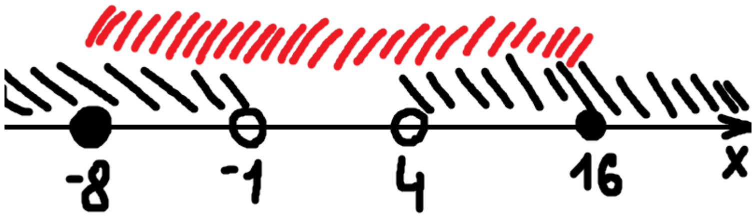
$|x-4| \le 12$

=>

$-12 \le x-4 \le 12$

$-8 \le x \le 16$

Объединим все найденные корни и промежутки на числовой прямой



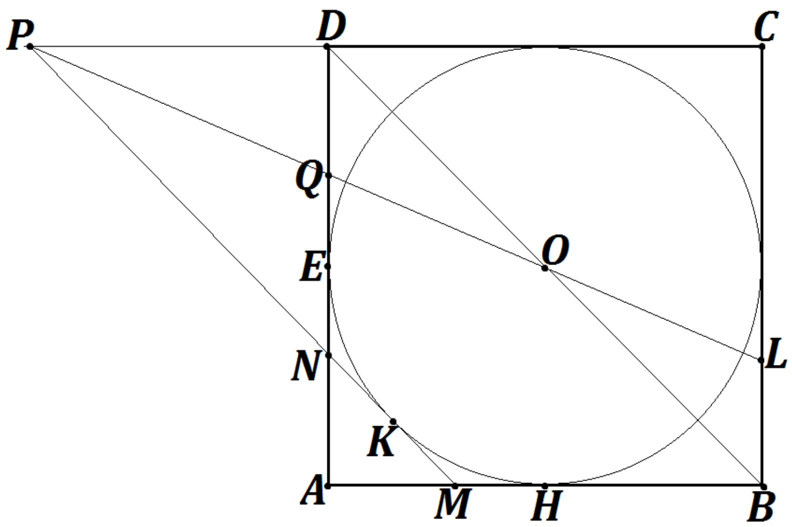
Ответ: $[-8;-1)\cup(4;16]$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 К окружности, вписанной в квадрат $ABCD$, проведена касательная, пересекающая стороны AB и AD в точках M и N соотвественно.

а) Докажите, что периметр треугольника AMN равен стороне квадрата.
б) Прямая MN пересекает прямую CD в точке P. В каком отношении делит сторону BC прямая, проходящая через точку P и центр окружности, если $AM:MB=1:2$?

Решение:
а)



Пусть
E —точка касанияAD и окружности
K —точка касанияMN и окружности
H —точка касанияAB и окружности

$EN=NK$
$KM=MH$
(по свойству касательных)

$P_{AMN}=AM+MN+AN$
$P_{AMN}=AM+(NK+KM)+AN$
$P_{AMN}=AM+(EN+MH)+AN$
$P_{AMN}=(AM+MH)+(AN+EN)=AH+AE$
$P_{AMN}=\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}(AB+AD)=\frac{1}{2}\cdot 2AB=AB$
■

б)
Пусть
O —центр вписанной в квадрат окружности
$PO\cap BC=L$
$PO\cap AD=Q$

$\frac{BL}{CL}-?$

$AM:MB = 1:2$
Пусть
$AM = 2x$
$MB = 4x$
$AD = AM + MB = 2x + 4x = 6x$
$AE = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}\cdot 6x = 3x = AH$
$EN = y = NK$

Рассмотрим $\triangle AMN$ – прямоугольный
$AM = 2x$
$AN = AE - EN = 3x - y$
$MH = AH - AM = 3x - 2x = x = KM$
$MN = NK + KM = x + y$

По теореме Пифагора:
$MN^2 = AN^2 + AM^2$
$(x+y)^2 = (3x-y)^2 + (2x)^2$
$x^2 + 2xy + y^2 = 9x^2 - 6xy + y^2 + 4x^2$
$12x^2 - 8xy = 0$
$4x(3x - 2y) = 0$

$4x = 0$ $x = 0$ (посторонний корень)	$3x - 2y = 0$ $3x = 2y$ $y = \frac{3}{2}x$

=>
$EN = \frac{3}{2}x$
$AN = 3x - y = 3x - \frac{3}{2}x = \frac{3}{2}x$
$MN = x + y = x + \frac{3}{2}x = \frac{5}{2}x$

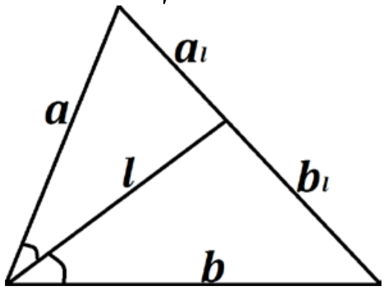
Проведём BD – диаметр квадрата

$\triangle ODQ = \triangle OBL$по двум сторонам и углу между ними
$$\begin{pmatrix} DO = BO \\ QO = LO \\ \angle DOQ = \angle BOL - \text{вертикальные} \end{pmatrix}$$

=>
$BL = DQ$

PO –биссектриса угла P
(по свойству касательных, проведённых из одной точки)

Свойство биссектрисы



$\frac{a_l}{b_l} = \frac{a}{b}$

Воспользуемся свойством биссектрисы для $\triangle DPN$
$\frac{QD}{QN} = \frac{PD}{PN}$

$\triangle PDN \sim \triangle AMN$по двум углам
$\frac{PD}{AM} = \frac{PN}{MN}$

$\frac{PD}{2x} = \frac{PN}{\frac{5}{2}x}$

$\frac{5}{2}PD = 2PN \quad \Big|: 10PN$

$\frac{PD}{4PN} = \frac{1}{5} \quad \Big|\cdot 4$

$\frac{PD}{PN} = \frac{4}{5} = \frac{QD}{QN}$

$DN = AD - AN = 6x - \frac{3}{2}x = \frac{9}{2}x$

=>

$QD = \frac{4}{9} \cdot \frac{9}{2}x = 2x = BL$

=>

$CL = BC - BL = 6x - 2x = 4x$

$\frac{BL}{CL} = \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2}$

Ответ: $\frac{1}{2}$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят t^2 тыс. рублей в конце года $t (t = 1; 2; \dots)$. В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счёт в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счёте будет увеличиваться в $1 + r$ раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счёте была наибольшей. Расчёты показали, что для этого ценные бумаги нужно продавать строго в конце двадцать первого года. При каких положительных значениях r это возможно?

Решение:

В конце 1-го года бумаги стоят 1 тыс.
В конце 2-го года бумаги стоят 4 тыс.
В конце 3-го года бумаги стоят 9 тыс.
В конце 4-го года бумаги стоят 16 тыс.
…

В конце 2-го года бумаги в 4 раза дороже, чем в конце 1-го
В конце 3-го года бумаги в $\frac{9}{4}$ раза дороже, чем в конце 1-го
В конце 4-го года бумаги в $\frac{16}{9}$ раза дороже, чем в конце 1-го

Каждый год стоимость бумаг увеличивается всё в меньшее и в меньшее количество раз

Рассмотрим функцию $f(t)$

$$f(t) = \frac{t^2}{(t-1)^2}$$

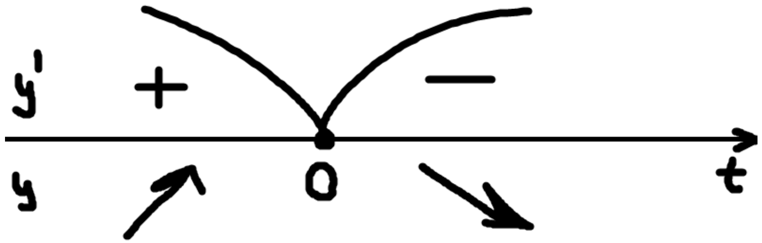
Докажем, что функция убывающая

$$f'(t) = \frac{2t \cdot (t^2 - 2t + 1) - 2t^2(t-1)}{(t-1)^4}$$

$$f'(t) = \frac{2t^3 - 4t^2 + 2t - 2t^3 + 2t^2}{(t-1)^4} = \frac{-2t^2 + 2t}{(t-1)^4}$$

$$f'(t) = \frac{-2t(t-1)}{(t-1)^4} = 0$$

$t = 0$



=>при $t > 0$ функция $f(t)$ убывает
=> продать ценные бумаги в конце 21-го года выгоднее, чем в конце 20-го и в конце 22-го

Если продать бумаги в конце 20-го года, то за оставшиеся 5 лет сумма на счёте будет:$400 \cdot (1 + r)^5$
Если продать бумаги в конце 21-го года, то за оставшиеся 4 года сумма на счёте будет:$441 \cdot (1 + r)^4$
Если продать бумаги в конце 22-го года, то за оставшиеся 3 года сумма на счёте будет:$484 \cdot (1 + r)^3$

получаем систему двух неравенств:

$$\begin{cases} 441 \cdot (1 + r)^4 > 400 \cdot (1 + r)^5 \\ 441 \cdot (1 + r)^4 > 484 \cdot (1 + r)^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 441 > 400 \cdot (1 + r) \\ 441 \cdot (1 + r) > 484 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 441 > 400 + 400r \\ 441 + 441r > 484 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 400r < 41 \\ 441r > 43 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r < \frac{41}{400} \\ r > \frac{43}{441} \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{43}{441}; \frac{41}{400}\right)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$x^2 + (2 - a)^2 = |x - 2 + a| + |x - a + 2|$
имеет единственный корень.

Решение:
$x^2 + (2 - a)^2 - |x - 2 + a| - |x - a + 2| = 0$

Рассмотрим функцию
$f(x) = x^2 + (2 - a)^2 - |x - 2 + a| - |x - a + 2|$

Заметим, что $f(x)$ – чётная, т.к. $f(-x) = f(x)$
$f(-x) = (-x)^2 + (2 - a)^2 - |-x - 2 + a| - |-x - a + 2|$
$f(-x) = x^2 + (2 - a)^2 - |x + 2 - a| - |x + a - 2|$

=>
$x = 0$ (для выполнения единственности решения)
Подставим в уравнение $x = 0$:

$0^2 + (2 - a)^2 - |0 - 2 + a| - |0 - a + 2| = 0$

$(2 - a)^2 - |a - 2| - |-a + 2| = 0$

$(2 - a)^2 - |a - 2| - |a - 2| = 0$

$(2 - a)^2 - 2|a - 2| = 0$

$|a - 2|^2 - 2|a - 2| = 0$

$|a - 2| \cdot (|a - 2| - 2) = 0$

$a = 2$	$a = 4$	$a = 0$

Проверим, получается ли единственное решение при подстановке данных значений a

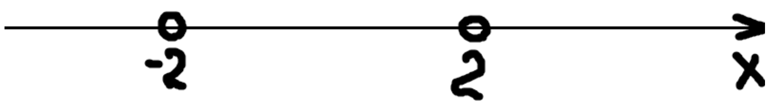
Если $a = 2$

$x^2+(2-a)^2=|x-2+a|+|x-a+2|$
$x^2+(2-2)^2=|x-2+2|+|x-2+2|$
$x^2=|x|+|x|$
$x^2=2|x|$
$x^2-2|x|=0$
$|x|^2-2|x|=0$
$|x|\cdot(|x|-2)=0$

$x=0$	$x=2$	$x=-2$

=>
$a=2$ не подходит

Если $a=4$
$x^2+(2-a)^2=|x-2+a|+|x-a+2|$
$x^2+(2-4)^2=|x-2+4|+|x-4+2|$
$x^2+4=|x+2|+|x-2|$
Найдём при каких x модули обращаются в нули:



Если $x<-2$, то
$x^2+4=-x-2-x+2$
$x^2+2x+4=0$
$x^2+2x+1+3=0$
$(x+1)^2+3=0$
Нет корней

Если $-2<x<2$, то
$x^2+4=x+2-x+2$
$x^2=0$
$x=0$
1 корень

Если $x>2$, то
$x^2+4=x+2+x-2$
$x^2-2x+4=0$
$x^2-2x+1+3=0$
$(x-1)^2+3=0$
Нет корней
=>
$a=4$ подходит

Если $a=0$
$x^2+(2-a)^2=|x-2+a|+|x-a+2|$
$x^2+(2-0)^2=|x-2+0|+|x-0+2|$
$x^2+4=|x-2|+|x+2|$
Получаем такое же уравнение, как и при $a=4$
=>
$a=0$ подходит

Ответ: $a=0$; $a=4$

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Имеются каменные глыбы: 50 штук по 800 кг, 60 штук по 1000 кг и 60 штук по 1500 кг (раскалывать глыбы нельзя).

а) Можно ли увезти все эти глыбы одновременно на 60 грузовиках, грузоподъёмностью 5 тонн каждый, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?
б) Можно ли увезти все эти глыбы одновременно на 38 грузовиках, грузоподъёмностью 5 тонн каждый, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?

в) Какое наименьшее количество грузовиков, грузоподъёмностью 5 тонн каждый, понадобится, чтобы вывезти все эти глыбы одновременно, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?

Решение:
а)
Если поместить в грузовик глыбы только одного типа, то:
1
$5000\colon 800 = 6{,}25$
=>
6 (800 килограммовых глыб) поместится в один грузовик
=>
Для перевозки 50 штук таких глыб потребуется 9 грузовиков
2
$5000\colon 1000 = 5$
=>
5 (1000 килограммовых глыб) поместится в один грузовик
=>
Для перевозки 60 штук таких глыб потребуется 12 грузовиков
3
$5000\colon 1500 \approx 3{,}33\ldots$
=>
3 (1500 килограммовые глыбы) поместится в один грузовик
=>
Для перевозки 60 штук таких глыб потребуется 20 грузовиков

Итого:
Для перевозки всех глыб в указанном примере потребовалось:
$9 + 12 + 20 = 41$ (грузовик)
=>
Можно

б)
Найдём суммарную массу глыб:
$50 \cdot 800 + 60 \cdot 1000 + 60 \cdot 1500 = 190000$ (кг)

Найдём суммарную грузоподъёмность грузовиков:
$38 \cdot 5000 = 190000$ (кг)

=>
Чтобы все глыбы было возможно увезти требуется, чтобы все 38 грузовиков были загружены полностью

Если помещать по одной 1500 килограммовой глыбе в грузовик, то грузовик невозможно будет загрузить полностью
Если помещать по три 1500 килограммовых глыбы в грузовик, то грузовик невозможно будет загрузить полностью
=>
Для перевозки 1500 килограммовых глыб нужно в каждый грузовик положить две такие глыбы, только тогда их будет возможно загрузить полностью

=>
30 грузовиков будут заполнены на $\frac{3000}{5000}$ и в каждый из тридцати грузовиков нужно добавить по две 1000 килограммовые глыбы, чтобы загрузить полностью эти 30 грузовиков

Итак, 30 грузовиков заполнены полностью, причём израсходованы все 1000 килограммовые и все 1500 килограммовые глыбы

Оставшиеся 8 грузовиков нужно загрузить полностью 800 килограммовыми глыбами, а это сделать невозможно, не разрезая их
=>
Нельзя

в)
В предыдущем пункте доказано, что в 38 грузовиков все глыбы не уместить.
Попробуем уместить все глыбы в 39 грузовиков:

Стараемся загружать грузовики полностью пока это возможно

10 грузовиков, каждый из которых заполнен:
пятью 800 килограммовыми и одной 1000 килограммовой
=>
Осталось разместить 50 1000 килограммовых и 60 1500 килограммовых по 29 грузовикам

25 грузовиков, каждый из которых заполнен:
двумя 1500 килограммовыми и двумя 1000 килограммовыми
=>
Осталось разместить 10 1500 килограммовых по 4 грузовикам

3 грузовика, каждый из которых заполнен:

тремя 1500 килограммовыми
=>
Осталось разместить 1 1500 килограммовую в 1 грузовик, делаем это

=>
39 - наименьшее количество грузовиков, которое потребуется для заданной цели

Ответ: а) Можно, б) Нельзя, в) 39

Содержание критерия	**Баллы**
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: - обоснованное решение п. а; - обоснованное решение п. б; - искомая оценка в п. в; - пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4