Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 заданияс кратким ответом повышенного уровня сложности и 7 заданий с развернутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8. 10 -0,8 Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

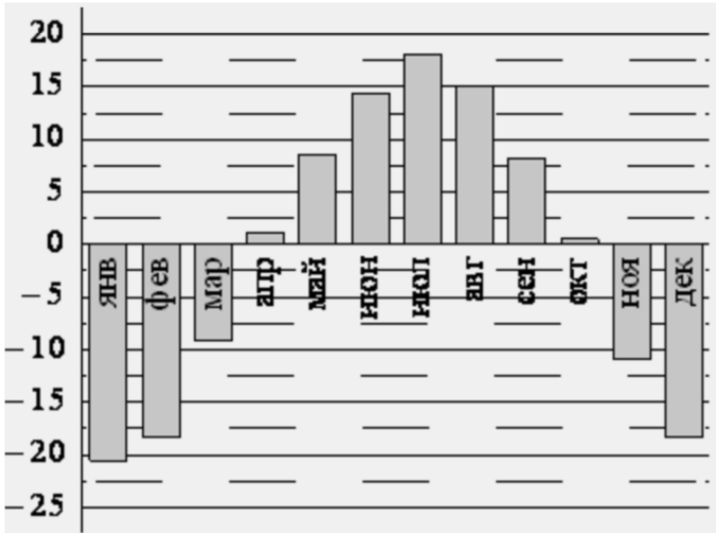
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Пачка сливочного масла стоит 55 рублей. Пенсионерам магазин делает скидку 10%. Сколько рублей заплатит пенсионер за две пачки масла?

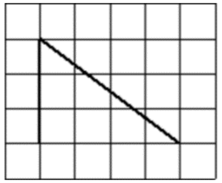
Ответ: ___________________________.

2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха (в градусах Цельсия) в Иркутске по результатам многолетних наблюдений. Найдите по диаграмме количество месяцев с начала февраля по конец августа, когда среднемесячная температура в Иркутске положительна.



Ответ: ___________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён угол. Найдите косинус этого угла.



Ответ: ___________________________.

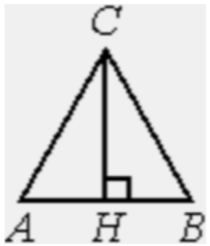
4 Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Биолог» играет три матча с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих матчах команда «Биолог» начнёт игру с мячом все три раза.

Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения
$5^{6+x} = 5.$

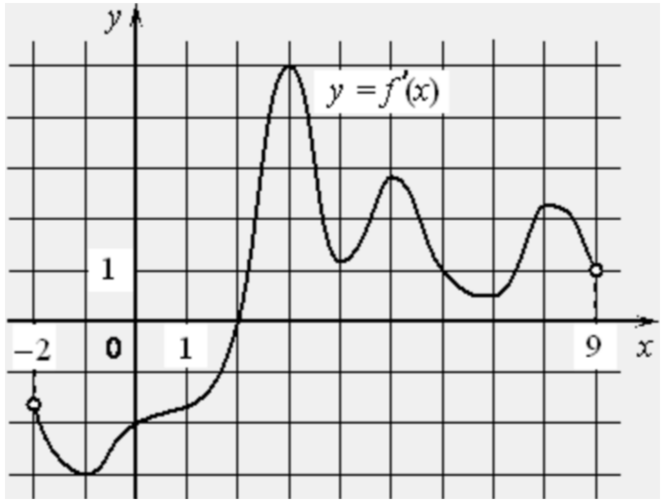
Ответ: ___________________________.

6 В равностороннем треугольнике ABC высота CHравна $45\sqrt{3}$. Найдите AB.



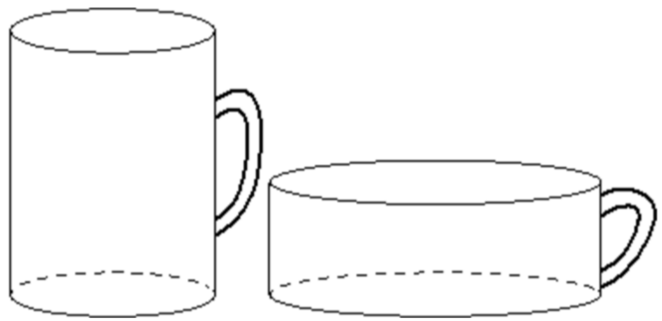
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график $y = f`(x)$ производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 9)$. В какой точке отрезка $[2; 8]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



Ответ: ___________________________.

8 Первая цилиндрическая кружка вдвое выше второй, зато вторая в три раза шире. Найдите отношение объёма второй кружки к объёму первой.



Ответ: ___________________________.

9 Найдите значение выражения

$$\frac{\log_8 14}{\log_{64} 14}.$$

Ответ: ____________________________.

10 Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_п = 25°C$, через радиатор отопления пропускают горячую воду. Расход проходящей через трубу радиатора воды $m = 0{,}3$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x, вода охлаждается от начальной температуры $T_в = 57°C$ до температуры T, причём $x = \alpha \cdot \frac{cm}{\gamma} \cdot \log_2 \frac{T_в - T_п}{T - T_п}$, где $c = 4200 \frac{Вт \cdot с}{кг \cdot °C}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 63 \frac{Вт}{м \cdot °C}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 1{,}4$ — постоянная. Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 56 м.

Ответ: ____________________________.

11 Первая труба наполняет резервуар на 13 минут дольше, чем вторая. Обе трубы, работая одновременно, наполняют этот же резервуар за 42 минуты. За сколько минут наполняет этот резервуар одна вторая труба?

Ответ: ____________________________.

12 Найдите наибольшее значение функции
$y = x^5 + 20x^3 - 65x$на отрезке $[-4; 0]$.

Ответ: ____________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$$2\cos^3 x = \sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right).$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\pi]$.

14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На рёбрах AB и B_1C_1 отмечены точки K и Lсоответственно, причём $AK = B_1L = 2$. Точка M – середина ребра A_1C_1. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ.
б) Найдите объём пирамиды, вершина которой – точка M, а основание – сечение данной призмы плоскостью γ.

15 Решите неравенство

$$\frac{9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + 4}{3^x - 5} + \frac{2 \cdot 3^{x+1} - 51}{3^x - 9} \leq 3^x + 5.$$

16 Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Окружность с центром O, построенная на боковой стороне AB как на диаметре, касается боковой стороны CD и второй раз пересекает большее основание AD в точке H, точка Q – середина CD.

а) Докажите, что четырёхугольник $DQOH$ – параллелограмм.
б) Найдите AD, если $\angle BAD = 60°$ и $BC = 2$.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 181112

17 15-го января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{xy^2 - xy - 5y + 5}{\sqrt{5-y}} = 0, \\ y = ax \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

19 Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 10 раз больше, либо в 10 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 3024.

а) Может ли последовательность состоять из двух членов?
б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?
в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:

ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	7 лет репетиторской деятельности
Регалии:	Основатель проекта Школа Пифагора
Аккаунт ВК:	https://vk.com/eugene10
Сайт и доп. информация:	https://vk.com/shkolapifagora https://youtube.com/ШколаПифагора

Система оценивания
Ответы к заданиям 1-19

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Верно выполненные задания 13-15 максимум оцениваются в 2 балла, задания 16-17 – в 3 балла, а задания18-19 – в 4 балла.

№ задания	Ответ
1	99
2	5
3	0,6
4	0,125
5	-5
6	90
7	2
8	4,5
9	2
10	33
11	78
12	44
13	а) $\frac{\pi}{2}+\pi n, \frac{\pi}{4}+\pi n, -\frac{\pi}{4}+\pi n;\ n \in Z.$ б) $-1{,}5\pi; -\frac{7\pi}{4}; -\frac{5\pi}{4}$
14	$6\sqrt{3}$
15	$(-\infty; 1] \cup (\log_3 5\,; 2)$
16	$8\sqrt{3}+14$
17	3
18	$\left(0;\frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{5};5\right)$
19	а) нет, б) да, например, 252 2520 252, в) 549

Решения и критерии оценивания заданий13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависитот полноты решения и правильности ответа.
Общие требования к выполнению заданий с развёрнутымответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможныеслучаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записииформы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0баллов.
Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.
При выполнении задания могут использоватьсябездоказательстваи ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общегообразования.

13 а) Решите уравнение

$$2\cos^3 x = \sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right).$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\pi]$.

.

Решение:

а)

$2\cos^3 x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
$2\cos^3 x = \cos x$
$2\cos^3 x - \cos x = 0$
$\cos x \cdot (2\cos^2 x - 1) = 0$

$\cos x = 0$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n;\ n \in Z$	$2\cos^2 x - 1 = 0$ $2\cos^2 x = 1$ $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ $\cos x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

	$x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n;\ n \in Z$ $x_2 = -\frac{\pi}{4} + \pi n;\ n \in Z$

б)

Подберём корни для $x = \frac{\pi}{2} + \pi n; n \in Z$

Если $n = -3$, то $x = \frac{\pi}{2} - 3\pi = -2{,}5\pi \notin [-2\pi; -\pi]$

Если $n = -2$, то $x = \frac{\pi}{2} - 2\pi = -1{,}5\pi \in [-2\pi; -\pi]$

Если $n = -1$, то $x = \frac{\pi}{2} - \pi = -0{,}5\pi \notin [-2\pi; -\pi]$

Подберём корни для $x = \frac{\pi}{4} + \pi n; n \in Z$

Если $n = -3$, то $x = \frac{\pi}{4} - 3\pi = -\frac{11\pi}{4} \notin [-2\pi; -\pi]$

Если $n = -2$, то $x = \frac{\pi}{4} - 2\pi = -\frac{7\pi}{4} \in [-2\pi; -\pi]$

Если $n = -1$, то $x = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4} \notin [-2\pi; -\pi]$

Подберём корни для $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n; n \in Z$

Если $n = -2$, то $x = -\frac{\pi}{4} - 2\pi = -\frac{9\pi}{4} \notin [-2\pi; -\pi]$

Если $n = -1$, то $x = -\frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{5\pi}{4} \in [-2\pi; -\pi]$

Если $n = 0$, то $x = -\frac{\pi}{4} \notin [-2\pi; -\pi]$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{4} + \pi n, -\frac{\pi}{4} + \pi n;\ n \in Z$. б)$-1{,}5\pi; -\frac{7\pi}{4}; -\frac{5\pi}{4}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б* ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На рёбрах AB и B_1C_1 отмечены точки K и Lсоответственно, причём $AK = B_1L = 2$. Точка M – середина ребра A_1C_1. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L.

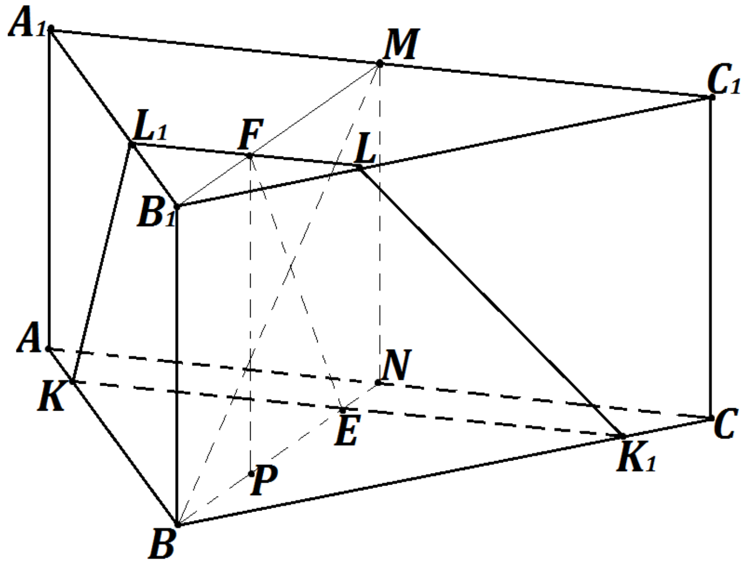
а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой – точка M, а основание – сечение данной призмы плоскостью γ.

.

Решение:

а)



Построим плоскость γ:

Построим прямую KK_1 такую, что $KK_1 \parallel AC$

Построим прямую K_1L, т.к. точки K_1 и L лежат в одной плоскости

Построим прямую LL_1 такую, что $LL_1 \parallel A_1C_1$

Построим прямую KL_1, т.к. точки K и L_1 лежат в одной плоскости

Трапеция KK_1LL_1 – искомое сечение плоскостью γ

Рассмотрим плоскость BB_1M:

Опустим перпендикуляр MN на прямую AC

Пусть $B_1M \cap LL_1 = F$

Пусть $BN \cap KK_1 = E$

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 181112

BB_1MN —прямоугольник

$BB_1 = 3$

$B_1M = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 6 = 3\sqrt{3}$

$NE : BE = AK : BK$

$AK : BK = 2 : 4$

$=> NE : BE = 1 : 2$

$NE = \frac{1}{3} \cdot B_1M = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$

$BE = \frac{2}{3} \cdot B_1M = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

$B_1F : FM = B_1L : LC_1$

$B_1L : LC_1 = 2 : 4$

$=> B_1F : FM = 1 : 2$

$B_1F = \frac{1}{3} \cdot B_1M = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$

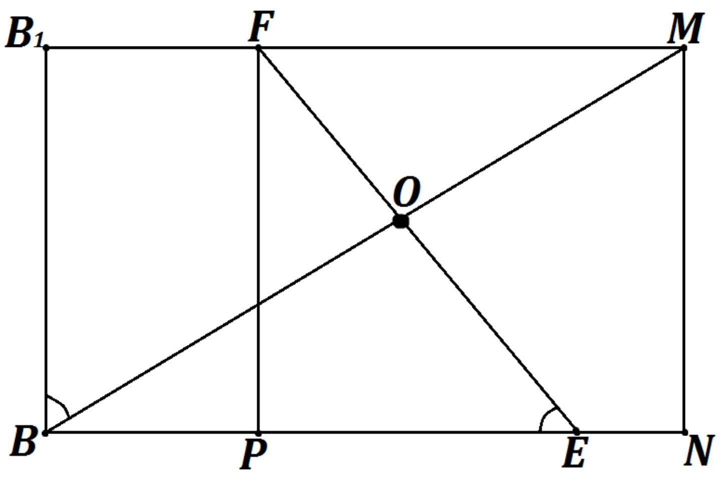
$FM = \frac{2}{3} \cdot B_1M = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

Построим прямую EF

Докажем, что прямые EF и BM перпендикулярны:

$\angle BOE$ – искомый

Рассмотрим BB_1MN – прямоугольник:



Опустим перпендикуляр FP на прямую BN

$PE = FM - NE = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$

$\operatorname{tg}\angle BEF = \frac{FP}{PE} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

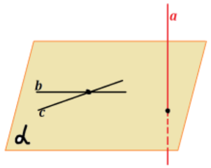
$\operatorname{tg}\angle MBB_1 = \frac{MB_1}{BB_1} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$

$=> \angle BEF = \angle MBB_1 = 60°$

$=> \angle MBN = 90 - 60 = 30°$

$=> BOE = 180 - \angle BEF - \angle MBN = 180 - 60 - 30 = 90°$

Признак перпендикулярности прямой и плоскости



Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости

$BM \perp EF$

$BM \perp KK_1$ (т.к. $KK_1 \perp BN$, являющейся проекцией BM на плоскость ABC по теореме о трёх перпендикулярах)

$=> BM \perp \gamma$

■

б)

$BM \perp EF$

$=> MO$ – высота пирамиды

$BM = \sqrt{BN^2 + MN^2} = \sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2 + 3^2} = 6$ (по теореме Пифагора)

Распишем отношение сходственных сторон в подобных треугольниках FOM и BOE

$$\frac{MO}{BO} = \frac{FM}{BE}$$

$$\frac{MO}{BO} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

=>

$$MO = BO = \frac{1}{2} \cdot BM = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$$

$FE = \sqrt{FP^2 + PE^2} = \sqrt{3^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ (по теореме Пифагора)

$$LL_1 = \frac{1}{3} \cdot AC = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2$$

$$KK_1 = \frac{2}{3} \cdot AC = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$$

$$S_{KL_1LK_1} = \frac{L_1L + KK_1}{2} \cdot FE = \frac{2+4}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

$$V_{MKL_1LK_1} = \frac{1}{3} \cdot S_{KL_1LK_1} \cdot MO = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 3 = 6\sqrt{3}$$

Ответ: б) $6\sqrt{3}$

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство

$$\frac{9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + 4}{3^x - 5} + \frac{2 \cdot 3^{x+1} - 51}{3^x - 9} \le 3^x + 5.$$

.

Решение:

Пусть $3^x = t$

$$\frac{t^2 - 6t + 4}{t - 5} + \frac{6t - 51}{t - 9} \le t + 5$$

Нужно сократить $t - 5$

$(t-5)(t-1) = t^2 - 6t + 5$

=>

$$\frac{t^2 - 6t + 5 - 1}{t - 5} + \frac{6t - 54 + 3}{t - 9} \le t + 5$$

$$\frac{(t-5)(t-1) - 1}{t - 5} + \frac{6t - 54 + 3}{t - 9} \le t + 5$$

$$\frac{(t-5)(t-1)}{t-5} - \frac{1}{t-5} + \frac{6t-54}{t-9} + \frac{3}{t-9} \le t + 5$$

$$t - 1 - \frac{1}{t-5} + 6 + \frac{3}{t-9} \le t + 5$$

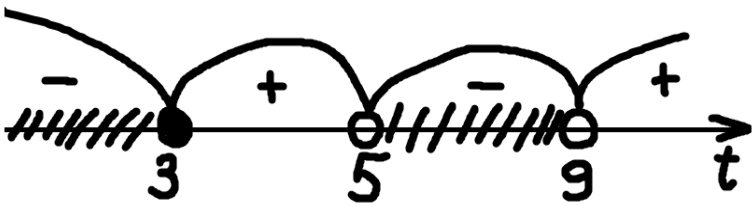
$$\frac{3}{t-9} - \frac{1}{t-5} \le 0$$

$$\frac{3t - 15 - t + 9}{(t-9)(t-5)} \le 0$$

$$\frac{2t - 6}{(t-9)(t-5)} \le 0$$

$2t - 6 = 0$	$(t-9)(t-5) \neq 0$

$t = 3$	$t \neq 9$ $t \neq 5$



$t \leq 3$ $3^x \leq 3$ $3^x \leq 3^1$ $x \leq 1$	$5 < t < 9$ $5 < 3^x < 9$ $3^{\log_3 5} < 3^x < 3^2$ $\log_3 5 < x < 2$

Ответ: $(-\infty; 1] \cup (\log_3 5\,; 2)$

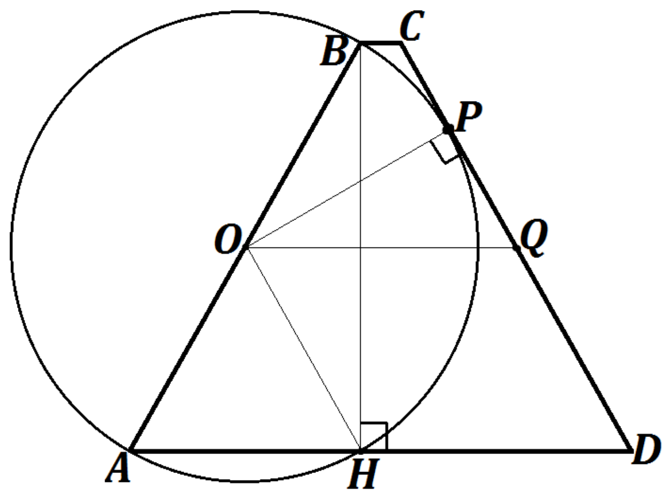
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Окружность с центром O, построенная на боковой стороне AB как на диаметре, касается боковой стороны CD и второй раз пересекает большее основание AD в точке H, точка Q – середина CD.

а) Докажите, что четырёхугольник $DQOH$ – параллелограмм.
б) Найдите AD, если $\angle BAD = 60°$ и $BC = 2$.

.

Решение:
а)



Признаки параллелограмма

Четырёхугольник является параллелограммом:
1) Если две стороны равны и параллельны
2) Если противоположные углы попарно равны
3) Если противоположные стороны попарно равны
4) Если все противоположные стороны попарно параллельны
5) Если диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам
6) Если сумма соседних углов равна 180 градусов
7) Если сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех сторон
8) Если сумма расстояний между серединами противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равна его полупериметру

QO –средняя линия трапеции $ABCD$
(т.к. O – середина AB и Q – середина CD)
=>
$QO \parallel AD$
=>
$QO \parallel DH$

Рассмотрим $\triangle OAH$
$OA = OH$
=>

$\angle OAH = \angle OHA$

$\angle OAH = \angle ADC$
(т.к. трапеция равнобедренная)
=>
$\angle OHA = \angle ADC$ — соотвественные
=>
$OH \parallel DQ$
=>
$DQOH$ — параллелограмм
■

б)
BH — высота трапеции (т.к. $\angle AHB$ — вписанный и опирается на диаметр)

Пусть
R — радиус окружности
$AH = x$
Тогда
$DH = 2 + x$

Выразим AH и DH другим способом:

Рассмотрим $\triangle ABH$ — прямоугольный
$\angle ABH = 180 - \angle AHB - \angle BAH = 180 - 90 - 60 = 30°$
$AH = \frac{1}{2} \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 2R = R$

Пусть
P — точка касания CD и окружности
$\angle OPQ = 90°$
(по свойству касательной)

Рассмотрим $\triangle OPQ$ — прямоугольный
$\angle PQO = \angle ADC = 60°$
(т.к. это соответственные углы при параллельных прямых)
$\sin \angle PQO = \frac{OP}{OQ}$
$\sin 60° = \frac{R}{OQ}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{R}{OQ}$
$OQ = \frac{2R}{\sqrt{3}}$
=>
$DH = \frac{2R}{\sqrt{3}}$

Получаем систему двух уравнений, приравняв значения AH и DH, найденные разными способами :

$$\begin{cases} x = R \\ 2 + x = \frac{2R}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$2 + x = \frac{2x}{\sqrt{3}}$$

$2\sqrt{3} + \sqrt{3}x = 2x$
$2x - \sqrt{3}x = 2\sqrt{3}$
$x(2 - \sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$
$x = \frac{2\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \quad \Big| \cdot (2 + \sqrt{3})$
$x = \frac{2\sqrt{3} \cdot (2 + \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}$
$x = 2\sqrt{3} \cdot (2 + \sqrt{3}) = 4\sqrt{3} + 6$

$AD = AH + DH = x + 2 + x = 2x + 2$
$AD = 2 \cdot (4\sqrt{3} + 6) + 2 = 8\sqrt{3} + 12 + 2 = 8\sqrt{3} + 14$

Ответ: $8\sqrt{3} + 14$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2

Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 15-го января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

Решение:

Пусть x – сумма кредита

Тогда $1{,}3x$ – общая сумма выплат, превышающая сумму кредита на 30%

Составим таблицу:

Месяц	Долг на начало месяца	Основной платёж	Дополнительный платёж
1	x	$\frac{x}{19}$	$\frac{r}{100}\cdot x$
2	$\frac{18x}{19}$	$\frac{x}{19}$	$\frac{r}{100}\cdot\frac{18x}{19}$
…			
19	$\frac{x}{19}$	$\frac{x}{19}$	$\frac{r}{100}\cdot\frac{x}{19}$

Общая сумма выплат (ОСВ) – это все основные платежи и все дополнительные платежи (сумму всех дополнительных платежей найдём с помощью формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии)

Сумма первых n членов арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n$$

$$\text{ОСВ} = 19\cdot\frac{x}{19} + \frac{\frac{r}{100}\cdot x + \frac{r}{100}\cdot\frac{x}{19}}{2}\cdot 19 = 1{,}3x$$

$$19\cdot\frac{x}{19} + \frac{\frac{r}{100}\cdot x + \frac{r}{100}\cdot\frac{x}{19}}{2}\cdot 19 = 1{,}3x$$

$$\frac{\frac{r}{100}\cdot\left(x + \frac{x}{19}\right)}{2}\cdot 19 = 0{,}3x$$

$$\frac{r\cdot\frac{20x}{19}}{200}\cdot 19 = 0{,}3x$$

$$\frac{r\cdot 20x}{200\cdot 19}\cdot 19 = 0{,}3x$$

$$\frac{r\cdot x}{10} = 0{,}3x \qquad \Big|:x$$

$$\frac{r}{10} = 0{,}3 \qquad \Big|\cdot 10$$

$$r = 3$$

Ответ: 3

Содержание критерия	**Баллы**

Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{xy^2 - xy - 5y + 5}{\sqrt{5 - y}} = 0, \\ y = ax \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Решение:

Найдём корни уравнения $xy^2 - xy - 5y + 5 = 0$

$xy(y-1) - 5(y-1) = 0$

$(y-1)(xy-5) = 0$

$y = 1$

$xy = 5$

$y = \dfrac{5}{x}$

Получаем новую систему:

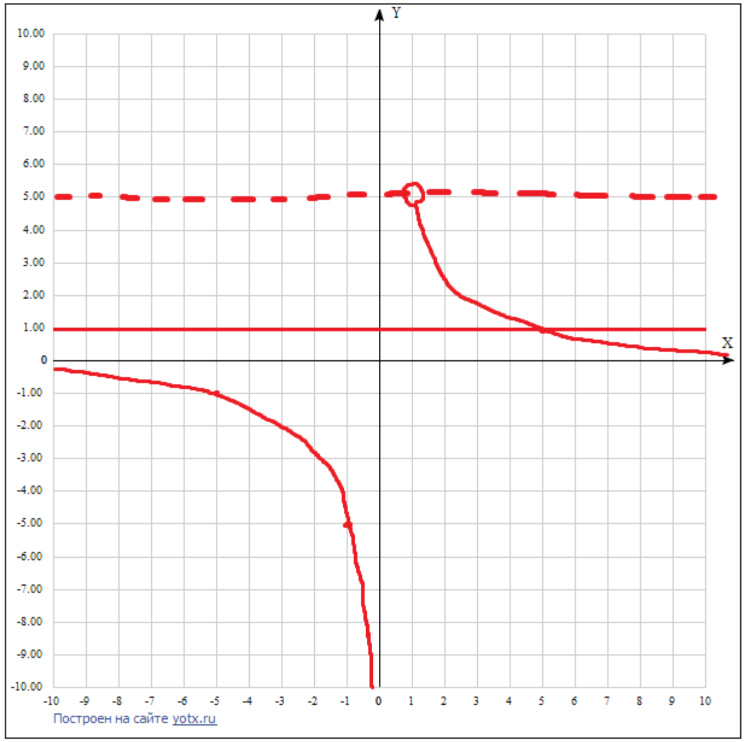
$$\begin{cases} 5 - y > 0 \\ \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = \dfrac{5}{x} \end{array}\right. \\ y = ax \end{cases}$$

$$\begin{cases} y < 5 \\ \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = \dfrac{5}{x} \end{array}\right. \\ y = ax \end{cases}$$

Решим графически:

Сначала построим график системы:

$$\begin{cases} y < 5 \\ \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = \dfrac{5}{x} \end{array}\right. \end{cases}$$



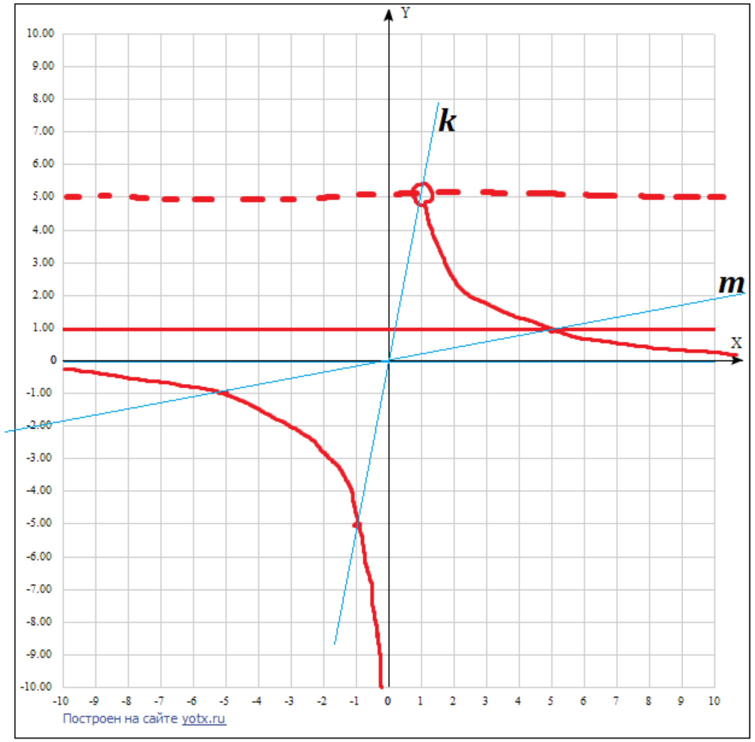
$y = ax$ —пучок прямых проходящих через начало координат

Пусть

m — прямая, проходящая через точку $(5; 1)$ из семейства прямых $y = ax$

k — прямая, проходящая через точку $(1; 5)$ из семейства прямых $y = ax$

Проведём прямые m и k



Найдём значение параметра a, соответствующее прямой m
$y = ax$ проходит через т. $(5; 1)$
$1 = 5a$
$$a = \frac{1}{5}$$

Найдём значение параметра a, соответствующее прямой k
$y = ax$ проходит через т. $(1; 5)$
$a = 5$

Итак,
Если $a < 0$, то 1 пересечение
Если $a = 0$, то 0 пересечений
Если $0 < a < \frac{1}{5}$, то 3 пересечения
Если $a = \frac{1}{5}$, то 2 пересечения
Если $\frac{1}{5} < a < 5$, то 3 пересечения
Если $a = 5$, то 2 пересечения
Если $a > 5$, то 2 пересечения

Ответ: $a \in \left(0; \frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{5}; 5\right)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений а, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений а	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений а	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 10 раз больше, либо в 10 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 3024.

а) Может ли последовательность состоять из двух членов?
б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?
в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

Решение:

а)
Вариант #1
Пусть a – первый член последовательности
Тогда $10a$ – второй член последовательности

$a + 10a = 3024$
$11a = 3024$

$a = 274\frac{10}{11} \notin \mathrm{N}$

Вариант #2

Пусть a – первый член последовательности

Тогда $0{,}1a$ – второй член последовательности

$a + 0{,}1a = 3024$

$1{,}1a = 3024$

$11a = 30240$

$a = 2749\frac{1}{11} \notin \mathrm{N}$

=>

Не может

б)

Вариант #1

$10a$ – второй член последовательности

$100a$ – третий член последовательности

$a + 10a + 100a = 3024$

$111a = 3024$

$a = 27\frac{27}{111} \notin \mathrm{N}$

Вариант #2

$10a$ – второй член последовательности

a – третий член последовательности

$a + 10a + a = 3024$

$12a = 3024$

$a = 252 \in \mathrm{N}$

Варианты 3 и 4 можно не рассматривать, т.к. мы нашли доказательство того, что последовательность может состоять из трёх членов

=>

Может, например,

252 2520 252

в)

Очевидно, что наибольшее количество членов в последовательности будет, если:

- На первых позициях стоят минимальные целые числа
- Не должно быть постоянного возрастания последовательности

Есть 3 варианта последовательности, подходящие под требования:

Вариант #1

1 10 1 10 1 10 ...

Сумма первого и второго числа равна 11

Пусть n – количество таких пар 1 10

Получаем уравнение

$11n = 3024$

$n = 274\frac{10}{11} \notin \mathrm{Z}$

Вариант #2

1 10 1 10 1 10 1

Сумма второго и третьего числа равна 11

Пусть n – количество таких пар 10 1

Получаем уравнение

$1 + 11n = 3024$

$11n = 3023$

$n = 274\frac{9}{11} \notin \mathrm{Z}$

Вариант #3

10 1 10 1 10 1 10

Сумма второго и третьего числа равна 11

Пусть n – количество таких пар 1 10

Получаем уравнение

$10 + 11n = 3024$

$11n = 3014$

$n = 274 \in \mathrm{Z}$

Одна десятка и 274 пары 1 10

=>

$1 + 274 \cdot 2 = 549$(членов последовательности)

Докажем, что не может быть 550 членов последовательности:

Сумма каждой пары соседних членов последовательности равна 11, и если членов последовательности 550, то пар 275, тогда сумма всех членов последовательности $275 \cdot 11 = 3025$
=>
$549 -$наибольшее количество членов в последовательности

Ответ: а) нет, б) да, например, $252 \quad 2520 \quad 252$, в) 549

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: - обоснованное решение п. а; - обоснованное решение п. б; - искомая оценка в п. в; - пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4