Дополнительные вступительные испытания в МГУ по математике 2011-2017

Гуев Т.А.

31 августа 2018 г.

2017 год

1 вариант

1. Какое число больше: $\sqrt{\dfrac{6}{7}+7+\dfrac{7}{6}}$ или 3?

2. Известно, что $a+b+c=5$ и $ab+bc+ac=4$. Найдите $a^2+b^2+c^2$?

3. Решите уравнение $\sin 7x+\sin 6x=\sin x$.

4. Решите неравенство $x^2\log_7^2 x+3\log_6^2 x \leqslant x\log_7 x\cdot\log_6 x^4$.

5. Через вершины A и B треугольник ABC проведена окружность, касающаяся прямых AC и BC. На этой этой окружности выбрана точка D (внутри треугольника), лежащая на рассоянии $\sqrt{2}$ от прямой AB и на расстоянии $\sqrt{5}$ от прямой BC. Найдите угол $\angle DBC$, если известно, что $\angle ABD=\angle BCD$.

6. Василий с друзьми решили устроить пикник. Для этого им от пункта A нужно вниз по реке до пункта B, причем в их распоряжении есть два катера. считая себя самым ответственным, Василий вызвался самостоятельно доехать до пункта B на более быстроходном катере и начать готовить место для пикника. Оба катера вышли одновременно из пункта A. Однако, промчавшись восемь километров, Василий заметил на берегу машущего ему рукой Григория, который просил по старой дружбе довезти его до пункта C. И хоть пункт C Василий уже проехал, он согласился. По пути в пункт C Василий с Григорием встретили идущий навстречу второй катер с друзьями Василия, откуда те крикнули, что им до пункта B осталась треть пути и чтобы Василий нигде не задерживался. Доставив Григория в пункт C, Василий немедленно помчался догонять друзей. Найдите расстояние между пунктами B и C, если известно, что оба катера пришли в пункт B одновременно, скорости катеров постоянны, а Василий, действительно, нигде не задерживался.

7. Из вершины D на плоскость основания пирамиды $ABCD$ опущена высота DH. Найдите объем этой пирамиды, если известно, что площади треугольников $\triangle HBC$, $\triangle HAC$, $\triangle HAB$ равны соответственно $\dfrac{2}{9}$, $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{4}{9}$, и что все три плоских угла при вершине D прямые.

8. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\cos(x^2-y^2)}-y\cdot\operatorname{tg}(x^2-y^2)=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \\ \dfrac{y}{\cos(x^2-y^2)}-x\cdot\operatorname{tg}(x^2-y^2)=\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

2 вариант

1. Решите неравенство $\sqrt{\dfrac{7}{8}+7+\dfrac{8}{7}}$ или 3?

2. Известно, что $a+b+c=6$ и $a^2+b^2+c^2=16$. Найдите $ab+bc+ac$?

3. Решите уравнение $\cos 6x + \cos 5x = \sin x$.

4. Решите неравенство $x^2 \log_6^2 x + 6 \log_5^2 x \leqslant x \log_6 x \cdot \log_5 x^5$.

5. Через вершины K и L треугольник KLM проведена окружность, касающаяся прямых KM и LM. На этой этой окружности выбрана точка S (внутри треугольника), лежащая на рассоянии 1 от прямой KL. Найдите расстояние от точки S до прямой LM, если известно, что $\angle KLS = \angle LMS$ и что $\angle SLM = 45°$.

6. Анатолий с друзьями решили устроить пикник. Для этого им от пункта A нужно добраться вверх по реке до пункта B, причем, в их распоряжении есть два катера. Считая себя самым ответственным, Анатолий вызвался самостоятельно доехать до пункта B на более быстроходном катере и начать готовить место для пикника. Оба катера вышли одновременно из пункта A. Однако, промчавшись 8 км, Анатолий заметил на берегу машущего ему рукой Бориса, который просил по старой дружбе довезти его до пункта C. И хоть пункт C Анатолий уже проехал, он согласился. По пути в пункт C Анатолий с Борисом встретили идущий навстречу второй катер с друзьями Анатолия, откуда те крикнули, что пункт B уже совсем близко и чтобы Анатолий нигде не задерживался. Доставив Бориса в пункт C, Анатолий немедленно помчался догонять друзей. Определите, какую долю пути оставалось пройти друзьям Анатолия от момента встречи с ним и Борисом, если известно, что оба катера пришли в пункт B одновременно, расстояние между пунктами B и C равно 2 км, скорости катеров постоянны, а Анатолий, действительно, нигде не задерживался.

7. Из вершины S на плоскость основания KLM пирамиды $KLMS$ опущена высота SH. Найдите объем этой пирамиды, если известно, что площади треугольников $\triangle HLM$, $\triangle HKM$, $\triangle HKL$ равны соответственно $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{1}{2}$, и что все три плоских угла при вершине S прямые.

8. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sin(x^2+y^2)} - y \cdot \operatorname{ctg}(x^2-y^2) = \sqrt{\dfrac{2\pi}{3}} \\ \dfrac{y}{\sin(x^2+y^2)} + x \cdot \operatorname{ctg}(x^2-y^2) = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

3 вариант

1. Решите неравенство $\sqrt{\frac{7}{9} + 7 + \frac{9}{7}}$ или 3?

2. Известно, что $a + b + c = 4$ и $ab + bc + ac = 5$. Найдите $a^2 + b^2 + c^2$?

3. Решите уравнение $\sin 8x - \sin 7x = \sin x$.

4. Решите неравенство $x^2 \log_5^2 x + 5 \log_4^2 x \leqslant x \log_5 x \cdot \log_4 x^6$.

5. Через вершины A и C треугольник ABC проведена окружность, касающаяся прямых AB и BC. На этой этой окружности выбрана точка D (внутри треугольника), лежащая на рассоянии 1 от прямой AC и на расстоянии $\sqrt{7}$ от прямой AB. Найдите угол $\angle DAB$, если известно, что $\angle CAD = \angle ABD$.

6. Григорий с друзьями решили устроить пикник. Для этого им от пункта A нужно добратьсявниз по реке до пункта B, причем в их распоряжении есть два катера. Считая себя самым ответственным, Григорий вызвался самостоятельно доехать до пункта B на более быстроходномкатере и начать готовить место для пикника. Оба катера вышли одновременно из пункта A. Однако, промчавшись шесть километров, Григорий заметил на берегу машущего ему рукой Василия, который просил по старой дружбе довезти его до пункта C. И хоть пункт C Григорий уже проехал, он согласился. По пути в пункт C Григорий с Василием встретили идущий навстречу второй катер с друзьями Григория, откуда те крикнули, что им до пункта B осталась четверть пути и чтобы Григорий нигде не задерживался. Доставив Василия в пункт C, Григорий немедленно помчался догонять друзей. Найдите расстояние между пунктами В и C, если известно, что оба катера пришли в пункт B одновременно, скорости катеров постоянны, а Григорий, действительно, нигде не задерживался.

7. Из вершины D на плоскость основания ABC пирамиды $ABCD$ опущена высота DH. Найдите объем этой пирамиды, если известно, что площади треугольников $\triangle HBC$, $\triangle HAC$, $\triangle HAB$ равны соответственно $\dfrac{2}{11}$, $\dfrac{4}{11}$, $\dfrac{5}{11}$, и что все три плоских угла при вершине D прямые.

8. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\cos(x^2-y^2)} + y \cdot \operatorname{tg}(x^2-y^2) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \\ \dfrac{y}{\cos(x^2-y^2)} + x \cdot \operatorname{tg}(x^2-y^2) = -\dfrac{\pi}{6} \end{cases}$$

4 вариант

1. Решите неравенство $\sqrt{\dfrac{8}{9}+7+\dfrac{9}{8}}$ или 3?

2. Известно, что $a+b+c=7$ и $a^2+b^2+c^2=19$. Найдите $ab+bc+ac$?

3. Решите уравнение $\cos 8x - \cos 9x = \sin x$.

4. Решите неравенство $x^2 \log_4^2 x + 10 \log_3^2 x \leqslant x \log_4 x \cdot \log_3 x^7$.

5. Через вершины M и K треугольник KLM проведена окружность, касающаяся прямых ML и KL. На этой этой окружности выбрана точка S (внутри треугольника), лежащая на рассоянии $\sqrt{2}$ от прямой MK. Найдите расстояние от точки S до прямой KL, если известно, что $\angle MKS = \angle KLS$ и что $\angle SKL = 60^\circ$.

6. Борис с друзьями решили устроить пикник. Для этого им от пункта A нужно добраться вверх по реке до пункта B, причем, в их распоряжении есть два катера. Считая себя самым ответственным, Борис вызвался самостоятельно доехать до пункта B на более быстроходном катере и начать готовить место для пикника. Оба катера вышли одновременно из пункта A. Однако, промчавшись 10 км, Борис заметил на берегу машущего ему рукой Анатолия, который просил по старой дружбе довезти его до пункта C. И хоть пункт C Борис уже проехал, он согласился. По пути в пункт C Борис с Анатолием встретили идущий навстречу второй катер с друзьями Бориса, откуда те крикнули, что пункт B уже совсем близко и чтобы Борис нигде не задерживался. Доставив Анатолия в пункт C, Борис немедленно помчался догонять друзей. Определите, какую долю пути оставалось пройти друзьям Бориса от момента встречи с ним и Анатолием, если известно, что оба катера пришли в пункт B одновременно, расстояние между пунктами B и C равно 2 км, скорости катеров постоянны, а Борис, действительно, нигде не задерживался.

7. Из вершины S на плоскость основания KLM пирамиды $KLMS$ опущена высота SH. Найдите объем этой пирамиды, если известно, что площади треугольников $\triangle HLM$, $\triangle HKM$, $\triangle HKL$ равны соответственно $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{12}$, и что все три плоских угла при вершине S прямые.

8. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sin(x^2-y^2)} - y\cdot\operatorname{ctg}(x^2-y^2) = \sqrt{\dfrac{5\pi}{6}} \\ \dfrac{y}{\sin(x^2-y^2)} + x\cdot\operatorname{ctg}(x^2-y^2) = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

5 вариант (филиал)

1. Найдите все целые числа, которые лежат между числами $\sqrt{3}\cdot\sqrt{85}$ и $\dfrac{14-1.7}{3-2.3}$

2. Решите уравнение:

$$|x^2-14x+48| = 14x-42-x^2$$

3. В 9 коробках с номерами от 1 до 9 лежат только красные в синие шары. Число красных шаров во второй коробке в $\frac{7}{6}$ раз больше чем в первой. Количества красных шаров в коробках образуют арифметическую прогрессию, а количества синих шаров в коробках образуют геометрическую прогрессию (в порядке номеров коробок). Количество синих шаров в первой коробке составляет 25%, а в третьев — 50% от числа всех шаров в данной коробке. Найдите отношение общего числа синих шаров к общему числу красных шаров.

4. Решите уравнение:

$$\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) - \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^{\log_y x} = \dfrac{y^2}{x} \\ (\log_3 x^2)\cdot\log_x\left(2x-\dfrac{3}{y}\right) = 4 \end{cases}$$

6. В выпуклом четырехугольнике $\triangle ABCD$: $\angle B = \angle C = 60^\circ$, $AD = 21$, $BC = 40$. Окружность с центром на стороне BC касается сторон AB, AD и CD. Найдите длины сторон AB и CD.

7. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство:

$$13 + \sin^2 x > 3a^2 - a + (4a - 5)\cos x$$

выполняется для всех x.

8. В правильную четырехугольную пирамиду $SABCD$ (S — вершина пирамиды) вписан шар. Через центр шара и ребро AB проведена плоскость, которая в пересечении с пирамидой дает 4-угольник $ABMN$. Объемы пирамид $SABMN$ и $SABCD$ относятся как $5 : 9$. Найдите косинус двугранного угла между боковой гранью и основанием исходной пирамиды.

Ответы

1 вариант

1. Первое больше. **2.** 17. **3.** $\pi + 2\pi n$; $\dfrac{\pi k}{3}$; $\dfrac{\pi}{7} + \dfrac{2\pi m}{7}$, n, k, $m \in \mathbb{Z}$. **4.** $x \in \{1\} \cup [\log_6 7; 3\log_6 7]$. **5.** $\dfrac{\pi}{4}$. **6.** 4 км. **7.** $\dfrac{2\sqrt[4]{2}}{9\sqrt[4]{3}}$. **8.** $x = \dfrac{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}{3\sqrt{2}}\sqrt{\pi}$, $y = \dfrac{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}\sqrt{\pi}$.

2 вариант

1. Первое больше. **2.** 10. **3.** $\pi + 2\pi n$; $\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi k}{3}$; $-\dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2\pi m}{5}$, n, k, $m \in \mathbb{Z}$. **4.** $x \in \{1\} \cup [2\log_5 6; 3\log_5 6]$. **5.** $\sqrt{\dfrac{5}{2}}$. **6.** Одну пятую пути от A до B. **7.** $\dfrac{\sqrt[4]{75}}{15}$. **8.** $x = 7\sqrt{\dfrac{\pi}{6}}$, $y = -2\sqrt{2\pi}$.

3 вариант

1. Первое больше. **2.** 6. **3.** $\dfrac{\pi n}{4}$; $\dfrac{2\pi k}{7}$, n, $k \in \mathbb{Z}$. **4.** $x \in \{1\} \cup [\log_4 5; 5\log_4 5]$. **5.** $\dfrac{\pi}{3}$. **6.** 2 км. **7.** $\dfrac{2\sqrt[4]{110}}{33}$. **8.** $x = 3\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$, $y = -5\sqrt{\dfrac{\pi}{6}}$.

4 вариант

1. Первое больше. **2.** 15. **3.** $2\pi n$; $\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{2\pi k}{9}$; $\dfrac{\pi}{16} + \dfrac{\pi m}{4}$, n, k, $m \in \mathbb{Z}$. **4.** $x \in \{1\} \cup [2\log_3 4; 5\log_3 4]$. **5.** $\sqrt{14}$. **6.** Одну шестую пути от A до B. **7.** $\dfrac{\sqrt[4]{5}}{3\sqrt{6}}$. **8.** $x = \dfrac{2\sqrt{5} + \sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\sqrt{\pi}$, $y = \dfrac{\sqrt{5} + 2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\sqrt{\pi}$.

2016 год

1 вариант

1. Найдите $f\left(\dfrac{2}{7}\right)$, если $f(x)=\dfrac{x}{1-x}+\dfrac{3}{7}$.

2. Разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнениями $x^2+ax-6=0$ равна 5. Найдите все возможные значения a.

3. Решите уравнение $2\cos^2 x+3\sin 2x=4+3\cos 2x$.

4. Решите неравенство $\log_{1-\log_3 x}\left(1+\log_x^2 3\right)\le 1$.

5. Две окружности касаются внутренним образом в точке T. Хорда AB внешней окружности касается внутренней окружности в точке S. Прямая TS пересекает внешнюю окружность в точках T и C. Найдите площадь четырехугольника $TACB$, если известно, что $CB=BT=3$, а радиусы окружностей относятся как $5:8$.

6. Ровно в 9:00 из пункта A в пункт B выехал автомобиль. Проехав две третьих пути, наблюдательный водитель автомобиля заметил, что мимо него в сторону пункта A проехал некий велосипедист. В тот самый момент, когда автомобиль прибыл в пункт B, из пункта B в пункт A выехал автобус. Когда до пункта A оставалось две пятых пути, не менее наблюдательный водитель автобуса заметил, что он поравлялся с тем самым велосипедистом. Во сколько приедет велосипедист в пункт A, если известно, что автобус прибыл в пункт A ровно в 11:00? Скорости велосипедиста, автомобиля и автобуса считать постоянными.

7. В основании правильной пирамиды с вешиной S лежит шестиугольник $ABCDEF$ со стороной 14. Плоскость π параллельна ребру AB, перпендикулярна плоскости DES и пересекает ребро BC в точке K, так что $BK:KC=3:4$. Кроме того, прямые, по которым π пересекает плоскости BCS и AFS, параллельны. Найдите площадь треугольника, отсекаемого плоскостью π от грани CDS.

8. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{106+\log_a^2\cos ax+\log_a\cos^{10}ax}+\sqrt{58+\log_a^2\sin ax-\log_a\sin^6 ax}+\sqrt{5+\log_a^2\operatorname{tg} ax+\log_a\operatorname{tg}^2 ax}$$

и все пары (a,x), при которых оно достигается.

2 вариант

1. Найдите $f\left(\dfrac{7}{3}\right)$, если $f(x)=\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{5}{3}$.

2. Разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнениями $x^2+ax-10=0$ равна 7. Найдите все возможные значения a.

3. Решите уравнение $8\cos^2 x+\sin 2x=3+2\cos 2x$.

4. Решите неравенство $\log_{1-\log_x 2}\left(1+\log_2^2 x\right) \leq 1$.

5. Две окружности касаются внутренним образом в точке A. Хорда BC внешней окружности касается внутренней окружности в точке D. Прямая AD пересекает внешнюю окружность в точках A и E. Найдите BE, если известно, что $EC = CA$, площадь четырехугольника $ABEC$ равна $3\sqrt{3}$, а радиусы окружностей относятся как $2:3$.

6. Ровно в 10:00 из пункта A в пункт B выехала маршрутка. Проехав треть пути, наблюдательный водитель маршрутки заметил, что мимо него в сторону пункта A проехал некий велосипедист. В тот самый момент, когда маршрутка прибыла в пункт B, из пункта B в пункт A выехал грузовик. Когда до пункта A оставалось шестая часть пути, не менее наблюдательный водитель грузовика заметил, что он поравлялся с тем самым велосипедистом. Во сколько приехал грузовик в пункт A, если известно, что велосипедист прибыл в пункт A ровно в 15:00? Скорости велосипедиста, маршрутки и грузовика считать постоянными.

7. В основании правильной пирамиды с вешиной V лежит шестиугольник $KLMNOP$ со стороной 5. Плоскость π параллельна ребру KL, перпендикулярна плоскости NOV и пересекает ребро LM в точке T, так что $LT : TM = 3 : 2$. Кроме того, прямые, по которым π пересекает плоскость LMV, перпендикулярны. Найдите площадь треугольника, отсекаемого плоскостью π от грани MNV.

8. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{13+\log_a^2\cos\frac{x}{a}+\log_a\cos^4\frac{x}{a}}+\sqrt{97+\log_a^2\sin\frac{x}{a}-\log_a\sin^8\frac{x}{a}}+\sqrt{20+\log_a^2\operatorname{tg}\frac{x}{a}+\log_a\operatorname{tg}^4\frac{x}{a}}$$

и все пары (a,x), при которых оно достигается.

3 вариант

1. Найдите $f\left(\dfrac{3}{5}\right)$, если $f(x) = \dfrac{x}{1-x} - \dfrac{5}{7}$.

2. Разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнениями $x^2+ax+6=0$ равна 1. Найдите все возможные значения a.

3. Решите уравнение $6\cos^2 x + 3\cos 2x = 5\sin 2x - 2$.

4. Решите неравенство $\log_{1+\log_5 x}\left(1+\log_x^2 5\right) \leq 1$.

5. Две окружности касаются внутренним образом в точке S. Хорда AB внешней окружности касается внутренней окружности в точке T. Прямая ST пересекает внешнюю окружность в точках S и C. Найдите площадь четырехугольника $SACB$, если известно, что $CA = 5$,$CB || AS$, а радиусы окружностей относятся как $11 : 16$.

6. Ровно в 11:00 из пункта A в пункт B выехал велосипедист. Проехав две пятых пути, наблюдательный велосипедист заметил, что мимо него в сторону пункта A прошел некий пешеход. В тот самый момент, когда велосипедист прибыл в пункт B, из пункта B в пункт

A выехал мотоциклист. Когда до пункта A оставалось две седьмых пути, не менее наблюдательный мотоциклист заметил, что он поравнялся с тем самым пешеходом. Во сколько придет пешеход в пункт A, если известно, что мотоциклист прибыл в пункт A ровно в 12:00? Скорости пешехода, велосипедиста и мотоциклиста считать постоянными.

7. В основании правильной пирамиды с вешиной S лежит шестиугольник $ABCDEF$ со стороной 20. Плоскость π параллельна ребру BC, перпендикулярна плоскости EFS и пересекает ребро CD в точке K, так что $CK : KD = 2 : 3$. Кроме того, прямые, по которым π пересекает плоскости CDS и ABS, параллельны. Найдите площадь треугольника, отсекаемого плоскостью π от грани DES.

8. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{157+\log_a^2\cos\frac{x}{a}+\log_a\cos^{12}\frac{x}{a}}+\sqrt{29+\log_a^2\sin\frac{x}{a}+\log_a\sin^4\frac{x}{a}}+\sqrt{47+\log_a^2\operatorname{tg}\frac{x}{a}-\log_a\operatorname{tg}^6\frac{x}{a}}$$

и все пары (a,x), при которых оно достигается.

4 вариант

1. Найдите $f\left(\frac{5}{3}\right)$, если $f(x)=\frac{x}{x-1}-\frac{4}{9}$.

2. Разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнениями $x^2+ax+10=0$ равна 3. Найдите все возможные значения a.

3. Решите уравнение $2\cos 2x+3\sin 2x+4\cos^2 x=-1$.

4. Решите неравенство $\log_{1+\log_x 7}\left(1+\log_7^2 x\right)\leq 1$.

5. Две окружности касаются внутренним образом в точке P. Хорда QR внешней окружности касается внутренней окружности в точке S. Прямая PS пересекает внешнюю окружность в точках P и S. Найдите QT, если известно, что $PQ \parallel RT$, площадь четырехугольника $PQTR$ равна $5\sqrt{5}$, а радиусы окружностей относятся как $7:10$.

6. Ровно в 13:00 из пункта A в пункт B выехал мотоциклист. Проехав четверть пути, наблюдательный мотоциклист заметил, что мимо него в сторону пункта A прошел некий пешеход. В тот самый момент, когда мотоциклист прибыл в пункт B, из пункта B в пункт A выехал автомобиль. Когда до пункта A оставалось пятая часть пути, не менее наблюдательный водитель автомобиля заметил, что он поравнялся с тем самым пешеходом. Во сколько приехал автомобиль в пункт A, если известно, что пешеход прибыл в пункт A ровно в 17:00? Скорости пешехода, мотоцикла и автомобиля считать постоянными.

7. В основании правильной пирамиды с вешиной V лежит шестиугольник $KLMNOP$ со стороной 10. Плоскость π параллельна ребру LM, перпендикулярна плоскости OPV и пересекает ребро MN в точке T, так что $MT : TN = 1 : 4$. Кроме того, прямые, по которым π пересекает плоскость MNV и плоскость основания, перпендикулярны. Найдите площадь треугольника, отсекаемого плоскостью π от грани NOV.

8. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{65+\log_a^2\cos ax-\log_a\cos^8 ax}+\sqrt{10+\log_a^2\sin ax+\log_a\sin^2 ax}+\sqrt{125+\log_a^2\operatorname{tg} ax-\log_a\operatorname{tg}^{10} ax}$$

и все пары (a, x), при которых оно достигается.

Ответы

1 вариант

1. $\frac{29}{35}$. **2.** $a=\pm 1$. **3.** $\frac{\pi}{4}+\pi n$; $\operatorname{arctg} 5+\pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$. **4.** $x \in \left(0;\ \frac{1}{3}\right] \cup (1;\ 3)$. **5.** $8\sqrt{2}$. **6.** В 12:00. **7.** $25\sqrt{2}$. **8.** $9\sqrt{5}$, $a=2$, $x=\frac{\pi}{8}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

2 вариант

1. $\frac{41}{12}$. **2.** $a=\pm 3$. **3.** $\frac{\pi}{4}+\pi n$; $\operatorname{arctg} 3+\pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$. **4.** $x \in \left[\frac{1}{2};\ 1\right) \cup (2;\ +\infty)$. **5.** 2. **6.** В 13:00. **7.** $4\sqrt{2}$. **8.** $8\sqrt{5}$, $a=2$, $x=\frac{\pi}{2}+4\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

3 вариант

1. $\frac{11}{14}$. **2.** $a=\pm 5$. **3.** $\frac{\pi}{4}+\pi n$; $-\operatorname{arctg} 11+\pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$. **4.** $x \in \left(\frac{1}{5};\ 1\right) \cup [5;\ +\infty)$. **5.** 32. **6.** В 13:30. **7.** $49\sqrt{2}$. **8.** $11\sqrt{5}$, $a=\frac{1}{2}$, $x=\frac{\pi}{8}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

4 вариант

1. $\frac{37}{18}$. **2.** $a=\pm 7$. **3.** $-\frac{\pi}{4}+\pi n$; $\operatorname{arctg} 7+\pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$. **4.** $x \in \left(0;\ \frac{1}{7}\right) \cup (1;\ 7]$. **5.** 3. **6.** В 14:00. **7.** $9\sqrt{2}$. **8.** $10\sqrt{5}$, $a=\frac{1}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}+4\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

2015 год

1 вариант

1. Найдите $f(2)$, если $f(x) = \dfrac{x}{5} + \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{10}$.

2. Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^2 - 7x + 5 = 0$.

3. Решите неравенство $\cos x + \sqrt{2}\cos 2x - \sin x \geqslant 0$.

4. Решите уравнение $\log_x |2x^2 - 3| = 4\log_{|2x^2-3|} x$.

5. Окружность радиуса $3/2$ касается середины стороны BC треугольника ABC и пересекает сторону AB в точках D и E, так что $AD : DE : EB = 1 : 2 : 1$. Чему может равняться AC, если $\angle BAC = 30°$?

6. Велосипедист Василий выехал из пункта А в пункт Б. Проехав треть пути, Василий наткнулся на выбоину, вследствие чего велосипед безнадёжно вышел из строя. Не теряя времени, Василий бросил сломавшийся велосипед и пошёл пешком обратно в пункт А за новым велосипедом. В момент поломки из пункта А выехал мотоциклист Григорий. На каком расстоянии от пункта А он встретит Василия, если пункт Б отстоит от пункта А на 4 км, а Василий доберётся до пункта А тогда же, когда Григорий до пункта Б? Скорости велосипеда, мотоцикла и пешехода считать постоянными.

7. В правильную треугольную призму с основаниями ABC, $A'B'C'$ и рёбрами AA', BB', CC' вписана сфера. Найдите её радиус, если известно, что расстояние между прямыми AE и BD равно $\sqrt{13}$, где E и D – точки, лежащие на $A'B'$ и $B'C'$ соответственно, и $A'E : EB' = B'D : DC' = 1 : 2$.

8. Найдите все пары (α, β), при которых достигается минимум выражения

$$\frac{4 - 3\sin\alpha}{2 + \cos 2\alpha} + \frac{2 + \cos 2\alpha}{\beta^2 + \beta + 1} + \frac{\beta^2 + \beta + 1}{\sqrt{\beta} + 1} + \frac{\sqrt{\beta} + 1}{4 - 3\sin\alpha}.$$

2 вариант

1. Найдите $f(3)$, если $f(x) = \dfrac{x}{4} + \dfrac{5}{x} + \dfrac{7}{12}$.

2. Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^2 + 9x - 2 = 0$.

3. Решите неравенство $\sin x + \sqrt{\frac{2}{3}}\cos 2x + \cos x \leqslant 0$.

4. Решите уравнение $\log_{\sqrt{x+1}} |4x - 1| = 4\log_{|4x-1|} \sqrt{x+1}$.

5. Окружность радиуса 2 касается середины стороны AC треугольника ABC и пересекает сторону BC в точках K и L, так что $BK = KL = LC$. Чему может равняться AB, если $\angle ABC = 45°$?

6. Лыжник Григорий ехал по довольно пологому склону, но, проехав две трети пути, проявил неуклюжесть и сломал лыжи. Отбросив их за ненадобностью, он тут же побрёл обратно. В момент поломки с вершины горы стартовал лыжник Василий и, проехав 800 метров, встретил Григория. Найдите длину трассы, если известно, что Василий закончил спуск ровно тогда, когда Григорий добрался до вершины горы. Скорости лыжников и пешехода считать постоянными.

7. В правильную треугольную призму с основаниями ABC, $A'B'C'$ и ребрами AA', BB', CC' вписана сфера радиуса $\sqrt{21}$. Найдите расстояние между прямыми $A'K$ и $B'L$, где K и L – точки, лежащие на AB и BC соответственно, и $AK : KB = BL : LC = 2 : 3$.

8. Найдите все пары (x, y), при которых достигается минимум выражения

$$\frac{2-\cos x}{2-\cos 2x}+\frac{2-\cos 2x}{(y^2+1)^2}+\frac{(y^2+1)^2}{|y|+1}+\frac{|y|+1}{2-\cos x}.$$

3 вариант

1. Найдите $f(5)$, если $f(x)=\dfrac{x}{3}+\dfrac{4}{x}-\dfrac{7}{15}$.

2. Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^2-8x-3=0$.

3. Решите неравенство $\cos x-\sqrt{2}\cos 2x+\sin x \leqslant 0$.

4. Решите уравнение $\log_x |3x^2-4| = 4\log_{|3x^2-4|} x$.

5. Окружность касается середины стороны BC треугольника ABC и пересекает сторону AB в точках D и E, так что $AD : DE : EB = 1 : 2 : 1$. Чему может равняться радиус окружности, если $\angle BAC = 30^\circ$ и $AC = 2/3$?

6. Велосипедист Василий выехал из пункта А в пункт Б. Проехав четверть пути, Василий наткнулся на выбоину, вследствие чего велосипед безнадежно вышел из строя. Не теряя времени, Василий бросил сломавшийся велосипед и пошёл пешком обратно в пункт А за новым велосипедом. В момент поломки из пункта А выехал мотоциклист Григорий и, проехав 4 км, встретил Василия. Найдите расстояние между пунктами А и Б, если известно, что Василий добрался до пункта А тогда же, когда Григорий до пункта Б. Скорости велосипеда, мотоцикла и пешехода считать постоянными.

7. В правильную треугольную призму с основаниями ABC, $A'B'C'$ и ребрами AA', BB', CC' вписана сфера радиуса $\sqrt{13}$. Найдите расстояние между прямыми AE и BD, где E и D – точки, лежащие на $A'B'$ и $B'C'$ соответственно, и $A'E : EB' = B'D : DC' = 1 : 2$.

8. Найдите все пары (α, β), при которых достигается минимум выражения

$$\frac{4-3\cos\alpha}{2-\cos 2\alpha}+\frac{2-\cos 2\alpha}{2\beta^4+\beta^2+1}+\frac{2\beta^4+\beta^2+1}{|\beta|+1}+\frac{|\beta|+1}{4-3\cos\alpha}.$$

4 вариант

1. Найдите $f(3)$, если $f(x) = \dfrac{x}{7} + \dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{21}$.

2. Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^2 + 10x + 4 = 0$.

3. Решите неравенство $\cos x - \sqrt{\frac{2}{3}}\cos 2x - \sin x \geqslant 0$.

4. Решите уравнение $\log_{\sqrt{x+1}} |5x - 1| = 4 \log_{|5x-1|} \sqrt{x+1}$.

5. Окружность касается середины стороны AC треугольника ABC и пересекает сторону BC в точках K и L, так что $BK = KL = LC$. Чему может равняться радиус окружности, если $\angle ABC = 45^\circ$ и $AB = 1$?

6. Лыжник Григорий ехал по довольно пологому склону, но, проехав три четверти пути, проявил неуклюжесть и сломал лыжи. Отбросив их за ненадобностью, он тут же побрёл обратно. В момент поломки с вершины горы стартовал лыжник Василмй. На каком расстоянии от вершины он встретит Григория, если длина трассы равна 2100 метров, а Василий закончит спуск ровно тогда, когда Григорий доберётся до вершины горы? Скорости лыжников и пешехода считать постоянными.

7. В правильную треугольную призму с основаниями ABC, $A'B'C'$ и ребрами AA', BB', CC' вписана сфера. Найдите её радиус, если известно, что расстояние между прямыми $A'K$ и $B'L$ равно $\sqrt{21}$, где K и L – точки, лежащие на AB и BC соответственно, и $AK : KB = BL : LC = 2 : 3$.

8. Найдите все пары (x, y), при которых достигается минимум выражения

$$\frac{2 - \sin x}{2 + \cos 2x} + \frac{2 + \cos 2x}{(y + 1)^2} + \frac{(y + 1)^2}{2\sqrt{y} + 1} + \frac{2\sqrt{y} + 1}{2 - \sin x}.$$

5 вариант (филиал)

1. Какое из чисел больше и почему: 4.5 или $\sqrt{\dfrac{21}{8}} + \dfrac{17}{6}$?

2. Решите уравнение

$$(x^2 - 8x + 16)(x^2 - 8x + 18) - 24 = 0.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{24}\cos x = \sqrt{11\cos x - \cos 2x}.$$

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y^2 + 2xy = 40x, \\ 16x^2 + 8xy = 5y. \end{cases}$$

5. Решите неравенство
$$\frac{\log_{25}\left(7-\frac{x}{2}\right)}{\log_{125}(22-x)} \leqslant \frac{3}{4}.$$

6. В треугольнике длины двух сторон равны 4 и 5, а длина биссектрисы угла между этими сторонами равна $\dfrac{20}{9}$. Найдите площадь этого треугольника.

7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение
$$(x+1)^4-(a+3)(x^2+2x)+a^2+3a+1=0$$
имеет 4 различных корня, образующих арифметическую прогрессию.

8. В правильной шестиугольной пирамиде с вершиной S и основанием $ABCDEF$ площадь сечения SAC относится к площади боковой грани SAB как $\sqrt{51}:\sqrt{19}$. Сторона основания равна 3. Найдите объем данной шестиугольной пирамиды.

6 вариант (филиал)

1. Какое из чисел больше и почему: 5.5 или $\sqrt{\dfrac{20}{7}}+\dfrac{23}{6}$?

2. Решите уравнение
$$(x^2-7x+16)(x^2-7x+19)-28=0.$$

3. Решите уравнение
$$\sqrt{20}\sin x=\sqrt{9\sin x+\cos 2x}.$$

4. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 2y^2+xy=15x, \\ 5x^2+10xy=12y. \end{cases}$$

5. Решите неравенство
$$\frac{\log_{64}\left(5+\frac{x}{2}\right)}{\log_{16}(18+x)} \leqslant \frac{1}{3}.$$

6. В треугольнике длины двух сторон равны 8 и 3, а длина биссектрисы угла между этими сторонами равна $\dfrac{24}{11}$. Найдите площадь этого треугольника.

7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение
$$(x-1)^4-(a+4)(x^2-2x)+a^2+5a+5=0$$
имеет 4 различных корня, образующих арифметическую прогрессию.

8. В правильной шестиугольной пирамиде с вершиной S и основанием $ABCDEF$ площадь сечения SAC относится к площади боковой грани SAB как $\sqrt{37}:\sqrt{13}$. Сторона основания равна 2. Найдите объем данной шестиугольной пирамиды.

7 вариант (филиал)

1. Найдите $f(3)$, если известно, что $f(x) = \dfrac{\sqrt{(5-x)(5+x)}}{5} + \dfrac{5}{x}$.

2. Решите уравнение $25^{x-\frac{1}{2}} = 1 - 4 \cdot 5^{x-1}$.

3. Решите уравнение $4\sin^2 x \sin 2x - \sin 4x = 0$.

4. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Его диагонали AC и BD пересекаются в точке E. Найдите BD, если $AB = BC = \sqrt{3}$ и $BE = 1$.

5. Решите неравенство $\log_{|x-7|} \sqrt{x-5} \leqslant \dfrac{1}{4}$.

6. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 25(x^2+y^2) + 56 \leqslant 100(x+y) \\ \sqrt{x^2+y^2-4x-10y+29} + \sqrt{x^2+y^2-12x-4y+40} \leqslant 5 \end{cases}$$

7. В пирамиду, в основании которой лежит ромб с острым углом 30°, вписана сфера радиуса $\sqrt{3}$. Найдите длину ребра основания пирамиды, если известно, что все ее боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60°.

8. Найдите все такие вещественные a, при которых уравнение

$$a \cdot e^{2\sqrt{2}\sin x} = 1 + \cos 2x,$$

имеет ровно одно решение, принадлежащее интервалу $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

8 вариант (филиал)

1. Найдите $f(5)$, если известно, что $f(x) = \dfrac{\sqrt{(x-3)(x+3)}}{3} + \dfrac{3}{x}$.

2. Решите уравнение $9^{x-\frac{1}{2}} = 1 + 2 \cdot 3^{x-1}$.

3. Решите уравнение $4\cos^2 x \sin 2x + \sin 4x = 0$.

4. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Его диагонали AC и BD пересекаются в точке E. Найдите BE, если $AB = BC = 1$ и $BD = \sqrt{5}$.

5. Решите неравенство $\log_{|x-9|} \sqrt{x-7} \leqslant \dfrac{1}{4}$.

6. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 25(x^2+y^2) - 94 \leqslant 50(x+y) \\ \sqrt{x^2+y^2-2x-8y+17} + \sqrt{x^2+y^2-10x-2y+26} \leqslant 5 \end{cases}$$

7. В пирамиду, в основании которой лежит ромб с острым углом 30° и сторонами длины $\sqrt{3}$, вписана сфера. Найдите ее радиус, если известно, что все ее боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 60°.

8. Найдите все такие вещественные a, при которых уравнение

$$e^{2(\sin x - \cos x)} = a(1 + \sin 2x),$$

имеет ровно одно решение, принадлежащее интервалу $\left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$.

9 вариант (филиал)

1. Известно, что $f(x) = \dfrac{x}{0.2} + \dfrac{1}{5x}$. Найдите $f\left(\dfrac{1}{4}\right)$.

2. Найдите модуль разности корней уравнения $x^2 + 2014x - 2015 = 0$.

3. Решите уравнение $\sin x + \sin 2x + \cos x = 1$.

4. Решите неравенство

$$\frac{4^{x^2} - 16^{4x-8}}{\sqrt{x^2 + 4x} + \sqrt{12 + 4x - x^2}} > 0.$$

5. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка D. Окружности, вписанные в треугольники ACD и BCD, касаются CD в точках E и F соответственно, причем $CE : CF = 1 : 2$. Найдите отношение $AD : DB$, если известно, что радиусы указанных окружностей совпадают.

6. Ираида вышла из дому в 9:00 и направилась в магазин купить водички. Через некоторое время вслед за ней из дому выехал на велосипеде Ираклий в надежде нагнать ее и попросить купать еще и кефиру. Когда он догнал ее, они взглянули друг другу в глаза и поняли, что оба забыли дома деньги. Ираида молча пошла дальше в сторону магазина, а Ираклий поехал обратно за деньгами. Взяв дома деньги, Ираклий, не теряя ни секунды, поехал в сторону магазина и прибыл к нему одновременно с Ираидой в 9:15. Во сколько Ираклий впервые выехал из дому, если он за эти 15 минут преодолел в два раза большее расстояние, чем она? Скорости Ираклия и Ираиды считать постоянными.

7. На ребрах AA_1 и BB_1 правильной треугольной призмы с основаниями ABC и $A_1B_1C_1$ отмечены точки D и E, так что $AD : DA_1 = B_1E : EB = 1 : 2$. Найдите угол между плоскостями ABC и DEC, если известно, что данная призма является «каркасной», то есть существует сфера, касающаяся всех ее ребер.

8. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{\sin x} \cos y = \log_{\cos x} \sin y \\ x^2 + y^2 = \dfrac{5\pi^2}{36} \end{cases}$$

Ответы

1 вариант

1. 2. **2.** 39. **3.** $x \in \left[-\frac{5\pi}{12} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right] \cup \left[\frac{11\pi}{12} + 2\pi n;\ \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$. **4.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{\frac{3+\sqrt{17}}{2}}$.
5. $\sqrt{3} \pm \sqrt{2}$. **6.** 1 км. **7.** $\frac{13}{6}$. **8.** $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $\beta = 0$, $n \in \mathbb{Z}$.

2 вариант

1. 3. **2.** 85. **3.** $x \in \left[-\frac{13\pi}{12} + 2\pi n;\ -\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right] \cup \left[\frac{7\pi}{12} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$. **4.** $-\frac{3}{4}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{-3+\sqrt{41}}{8}$.
5. $3 \pm \sqrt{7}$. **6.** 2 км. **7.** $\frac{15}{2}$. **8.** $x = 2\pi n$, $y = 0$, $n \in \mathbb{Z}$.

3 вариант

1. 2. **2.** 70. **3.** $x \in \left[\frac{3\pi}{4} + 2\pi n;\ \frac{17\pi}{12} + 2\pi n\right] \cup \left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{12} + 2\pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$. **4.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{\frac{2+\sqrt{7}}{3}}$.
5. $\sqrt{3} \pm \sqrt{2}$. **6.** 20 км. **7.** 6. **8.** $\alpha = 2\pi n$, $\beta = 0$, $n \in \mathbb{Z}$.

4 вариант

1. 1. **2.** 92. **3.** $x \in \left[-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{12} + 2\pi n\right] \cup \left[\frac{\pi}{4} + 2\pi n;\ \frac{5\pi}{12} + 2\pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$. **4.** $-\frac{4}{5}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{-2+\sqrt{14}}{5}$.
5. $3 \pm \sqrt{7}$. **6.** 900 м. **7.** $\frac{14}{5}$. **8.** $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $y = 0$, $n \in \mathbb{Z}$.

2014 год

1 вариант

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\sqrt{7-4\sqrt{3}}\,(8+4\sqrt{3})$.

2. Найти максимальное значение функции $y = \log_{1/2}(x^2-6x+17)$.

3. Найдите все положительные x, удовлетворяющие неравенству $x^{3x+7} > x^{12}$.

4. Решите уравнение $\cos^2 x - \cos x\, \sin^2\left(\dfrac{5x}{4} - \dfrac{5\pi}{12}\right) + \dfrac{1}{4} = 0$.

5. Окружности Ω_1 и Ω_2 с центрами в точках O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке A. Общая внешняя касательная к этим окружностям касается Ω_1 и Ω_2 соответсвенно в точках B_1 и B_2. Общая касательная к окружностям, проходящая через точку A, пересекает отрезок B_1B_2 в точке C. Прямая, делящая угол ACO_2 пополам, пересекает прямые O_1B_1, O_1O_2, O_2B_2 в точках D_1, L, D_2 соответсвенно. Найдите отношение $LD_2 : O_2D_2$, если известно, что $CD_1 = CO_1$.

6. Найдите все положительные x, y, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} x^{3/2} + y = 16 \\ x + y^{2/3} = 8 \end{cases}$$

7. В основании прямой призмы лежит правильный треугольник со стороной 1. Высота призмы равна $\sqrt{2}$. Найдите расстояние между скрещивающимися диагоналями боковых граней.

8. Пусть

$$f(x,y) = \sqrt{-6x^2 - 14y^2 - 18xy + 6} + y,$$
$$g(x,y) = -\sqrt{-6x^2 - 14y^2 - 18xy + 6} + y.$$

Найдите все значения, которые может принимать хотя бы одна из этих функций.

2 вариант

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\sqrt{5-2\sqrt{6}}\,(\sqrt{2}8+\sqrt{3})$.

2. Найти максимальное значение функции $y = \log_{1/3}(x^2+4x+31)$.

3. Найдите все положительные x, удовлетворяющие неравенству $x^{-5x+7} > x^{-7}$.

4. Решите уравнение $\sin^2 x + \sqrt{2}\,|\sin x| \cos\left(\dfrac{5x}{2} - \dfrac{5\pi}{8}\right) + \dfrac{1}{2} = 0$.

5. Окружности Ω_1 и Ω_2 с центрами в точках O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке A. Общая внешняя касательная к этим окружностям касается Ω_1 в точке B и пересекает в точке C общую касательную этих окружностей, проходящую через точку A. Прямая, делящая угол

ACO_1 пополам, пересекает прямые O_1O_2 и BO_1 в точках L и D соответсвенно. Найдите CO_2, если известно, что $LO_1 = 2$, а прямые CO_2 и DO_2 перпендикулярны.

6. Найдите все x, y на интервале $(0, \frac{\pi}{2})$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\cos^3 x} + \dfrac{1}{\sin^3 y} = 16 \\ \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 y = 6 \end{cases}$$

7. В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 1. Высота призмы равна $\sqrt{7}$. Найдите расстояние между большой диагональю призмы и скрещивающейся с ней диагональю боковой грани.

8. Пусть

$$f(x,y) = \sqrt{-5x^2 - 13y^2 - 16xy + 2} + y,$$
$$g(x,y) = -\sqrt{-5x^2 - 13y^2 - 16xy + 2} + y.$$

Найдите все значения, которые может принимать хотя бы одна из этих функций.

3 вариант

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\sqrt{6+4\sqrt{2}}\,(8-4\sqrt{2})$.

2. Найти максимальное значение функции $y = \log_{1/2}(x^2 - 8x + 20)$.

3. Найдите все положительные x, удовлетворяющие неравенству $x^{4x-5} > x^{-2}$.

4. Решите уравнение $\sin^2 x - \sin x \cos^2\left(\dfrac{5x}{4} - \dfrac{17\pi}{24}\right) + \dfrac{1}{4} = 0$.

5. Окружности Ω_1 и Ω_2 с центрами в точках O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке A. Общая внешняя касательная к этим окружностям касается Ω_1 и Ω_2 соответсвенно в точках B_1 и B_2. Общая касательная к окружностям, проходящая через точку A, пересекает отрезок B_1B_2 в точке C. Прямая, делящая угол ACO_2 пополам, пересекает прямые O_1B_1, O_1O_2, O_2B_2 в точках D_1, L, D_2 соответсвенно. Найдите отношение $CD_1 : CO_1$, если известно, что $LD_2 = O_2D_2$.

6. Найдите все положительные x, y, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} x + y^{3/2} = 54 \\ x^{2/3} + y = 18 \end{cases}$$

7. В основании прямой призмы лежит правильный треугольник со стороной 2. Высота призмы равна $\sqrt{3}$. Найдите расстояние между скрещивающимися диагоналями боковых граней.

8. Пусть

$$f(x,y) = \sqrt{-5x^2 - 17y^2 - 18xy + 12} + y,$$
$$g(x,y) = -\sqrt{-5x^2 - 17y^2 - 18xy + 12} + y.$$

Найдите все значения, которые может принимать хотя бы одна из этих функций.

4 вариант

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\sqrt{7+2\sqrt{10}}\,(\sqrt{5}-\sqrt{3})$.

2. Найти максимальное значение функции $y=\log_{1/3}(x^2+10x+34)$.

3. Найдите все положительные x, удовлетворяющие неравенству $x^{-7x+5}>x^{-4}$.

4. Решите уравнение $\cos^2 x+\sqrt{2}\,|\cos x|\sin\left(\dfrac{5x}{2}-\dfrac{\pi}{8}\right)+\dfrac{1}{2}=0$.

5. Окружности Ω_1 и Ω_2 с центрами в точках O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке A. Общая внешняя касательная к этим окружностям касается Ω_1 в точке B и пересекает в точке C общую касательную этих окружностей, проходящую через точку A. Прямая, делящая угол ACO_1 пополам, пересекает прямые O_1O_2 и BO_1 в точках L и D соответсвенно. Найдите LO_1, если известно, что $CO_2=2$, а прямые CO_2 и DO_2 перпендикулярны.

6. Найдите все x, y на интервале $(0,\frac{\pi}{2})$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\cos^3 x}+\dfrac{1}{\sin^3 y}=54\\ \operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 y=16\end{cases}$$

7. В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 1. Высота призмы равна $\sqrt{3}$. Найдите расстояние между большой диагональю призмы и скрещивающейся с ней диагональю боковой грани.

8. Пусть

$$f(x,y)=\sqrt{-6x^2-11y^2-16xy+5}+y,$$
$$g(x,y)=-\sqrt{-6x^2-11y^2-16xy+5}+y.$$

Найдите все значения, которые может принимать хотя бы одна из этих функций.

Ответы

1 вариант

1. 4. **2.** -3. **3.** $x\in(0;\,1)\cup\left(\dfrac{5}{3};\,+\infty\right)$. **4.** $\dfrac{7\pi}{3}+4\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. **5.** $1:1$. **6.** $x=4,\ y=8$. **7.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **8.** $\left[-3\sqrt{2};\,3\sqrt{2}\right]$.

2 вариант

1. 1. **2.** -3. **3.** $x\in(0;\,1)\cup\left(\dfrac{5}{3};\,+\infty\right)$. **4.** $\dfrac{9\pi}{4}+4\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. **5.** 4. **6.** $x=\dfrac{\pi}{3},\ y=\dfrac{\pi}{6}$. **7.** $\dfrac{\sqrt{7}}{6}$. **8.** $\left[-2\sqrt{3};\,2\sqrt{3}\right]$.

3 вариант

1. 8. **2.** -2. **3.** $x \in \left(0;\ \dfrac{4}{5}\right) \cup (1;\ +\infty)$. **4.** $\dfrac{13\pi}{6} + 4\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. **5.** $1:1$. **6.** $x = 27,\ y = 9$. **7.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **8.** $\left[-3\sqrt{3};\ 3\sqrt{3}\right]$.

4 вариант

1. 3. **2.** -2. **3.** $x \in (0;\ 1) \cup \left(\dfrac{9}{7};\ +\infty\right)$. **4.** $\dfrac{9\pi}{4} + 4\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. **5.** 1. **6.** $x = \arcsin\dfrac{1}{3},\ y = \arccos\dfrac{1}{3}$. **7.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **8.** $\left[-2\sqrt{5};\ 2\sqrt{5}\right]$.

2013 год

1 вариант

1. Старший коэффициент квадратного трёхчлена $f(x)$ равен 2. Один из его корней равен 5/2. Найдите второй корень, если известно, что $f(0) = 3$.

2. Вычислите $\log_{12} 3 \cdot \log_9 12$.

3. Решите неравенство $9\left(1+5^{1-2x}\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left(5^{2x}+5\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant 6^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{x}{2}}$.

4. Решите уравнение $\dfrac{\sin 5x}{\sin x} - \dfrac{\cos 5x}{\cos x} = \dfrac{\sin x}{\sin 5x} - \dfrac{\cos x}{\cos 5x}$.

5. В 14:00 из села Верхнее вниз по течению реки в сторону села Нижнее отправился катер «Быстрый». когда до Нижнего оставалось плыть 500 метров, ему навстречу из Нижнего вышел катер «Смелый». В этот же момент «Быстрый», не желая встречи со «Смелым», развернулся и пошел обратно к Верхнему. В 14:14, когда расстояние по реке от «Быстрого» до Верхнего сравнялось с расстоянием по реке от «Смелого» до «Быстрого», на «Смелом» осознали, что они идут с «Быстрым» на одинаковой скорости, развернулись и направились обратно к Нижнему. В исходные пункты катера вернулись одновременно в 14:18. Найдите расстояние по реке между Верхнем и Нижним, если известно, что оба катера движутся равномерно и с одинаковой собственной скоростью.

6. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность радиуса R и описана около окружности радиуса r. Найдите r, если $R = 12$, а косинус угла между диагональю AC и основанием AD равен 3/4.

7. В основании прямой призмы $ABCA'B'C'$ лежит прямоугольный треугольник ABC, такой что $AC = BC = 1$. На ребре $A'B'$ верхнего основания (параллельном AB) отмечена точка D, так что $A'D : DB' = 1 : 2$. Найдите радиус сферы, вписанной в тетраэдр $ABC'D$, если высота призмы равна 1.

8. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sin\left(x + \frac{a}{x}\right) = x + 1$ имеет бесконечно много решений.

2 вариант

1. Старший коэффициент квадратного трёхчлена $f(x)$ равен 3. Один из его корней равен 4/3. Найдите второй корень, если известно, что $f(0) = -2$.

2. Вычислите $\log_8 10 \cdot \log_{10} 4$.

3. Решите неравенство $15\left(4+4^{-2x}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(4^{1+2x}+1\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant 20^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{x}{2}}$.

4. Решите уравнение $\dfrac{\cos 3x}{\sin 2x} + \dfrac{\sin 3x}{\cos 2x} = \dfrac{\sin 2x}{\cos 3x} - \dfrac{\cos 2x}{\sin 3x}$.

5. От биостанции до границы заповедника вверх по реке ровно 14 км. В 7:00 браконьеры вошли на катере в заповедник и направились в сторону биостанции. Через некоторое время

им навстречу с биостанции вышел катер рыбинспекции. Браконьеры тут же развернулись и направились обратно к границе заповедника. В 7:38, когда браконьеры оказались ровно посередине между рыбинспекторами и границей, рыбинспекторы осознали, что они идут с браконьерами на одинаковой скорости, развернулись и направились обратно на биостанцию. До биостанции они добрались ровно в тот момент, когда браконьеры выехали за пределы заповедника – в 7:50. Найдите наименьшее расстояние, на котором находились браконьеры и рыбинспекторы, если известно, что оба катера движутся равномерно и с одинаковой собственной скоростью.

6. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность радиуса R и описана около окружности радиуса r, причем $R = 2r$. Найдите среднюю линию трапеции, если диагональ AC равна 4.

7. В основании прямой призмы $ABCA'B'C'$ лежит прямоугольный треугольник ABC, такой что $AC = BC = 1$. На ребре $A'C'$ верхнего основания (параллельном AC) отмечена точка D, так что $A'D : DC' = 2 : 1$. Найдите радиус сферы, вписанной в тетраэдр $AB'CD$, если высота призмы равна 1.

8. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sin(x - a\ln|x|) = x + 1$ имеет бесконечно много решений.

3 вариант

1. Старший коэффициент квадратного трёхчлена $f(x)$ равен -2. Один из его корней равен $3/2$. Найдите второй корень, если известно, что $f(0) = 1$.

2. Вычислите $\log_5 27 \cdot \log_9 5$.

3. Решите неравенство $\frac{9}{2}\left(1 + 2^{1-2x}\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left(2^{2x} + 5\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant 3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{x}{2}}$.

4. Решите уравнение $\dfrac{\sin 3x}{\sin x} + \dfrac{\cos 3x}{\cos x} = \dfrac{\sin x}{\sin 3x} + \dfrac{\cos x}{\cos 3x}$.

5. В 15:00 из пункта А, двигаясь против течения реки в сторону пункта Б, вышел катер «Первый», а навстречу ему из пункта Б отправился катер «Второй». В 15:12 путь, пройденный «Вторым», стал равен расстоянию между катерами. В этот момент «Первый» развернулся и пошел обратно к пункту А. «Второй» продолжал двигаться за «Первым» до тех пор, пока «Первый» не прибыл в пункт А. В этот момент расстояние от «Второго» до А равнялось 1,6 км. Развернувшись, «Второй» сразу же отправился обратно в пункт Б, куда и прибыл в 15:49. Чему равно расстояние по реке между пунктами А и Б?

6. Трапеция $KLMN$ вписана в окружность радиуса R и описана около окружности радиуса r. Найдите r, если $R = 20$, а косинус угла между диагональю KM и основанием KN равен $4/5$.

7. В основании прямой призмы $KLMK'L'M'$ лежит прямоугольный треугольник KLM, такой что $KM = LM = 1$. На ребре $K'L'$ верхнего основания (параллельном KL) отмечена точка N, так что $K'N : NL' = 1 : 3$. Найдите радиус сферы, вписанной в тетраэдр $KLM'N$,

если высота призмы равна 1.

8. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\cos\left(x - \frac{a}{x}\right) = x - 1$ имеет бесконечно много решений.

4 вариант

1. Старший коэффициент квадратного трёхчлена $f(x)$ равен -3. Один из его корней равен $7/3$. Найдите второй корень, если известно, что $f(0) = 4$.

2. Вычислите $\log_{16} 6 \cdot \log_6 8$.

3. Решите неравенство $12\left(3 + 3^{-2x}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(3^{1+2x} + 1\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant 4 \cdot 3^{\frac{x}{2}}$.

4. Решите уравнение $\dfrac{\cos 4x}{\sin 3x} - \dfrac{\sin 4x}{\cos 3x} = \dfrac{\sin 3x}{\cos 4x} - \dfrac{\cos 3x}{\sin 4x}$.

5. От биостанции до границы заповедника вверх по реке ровно 8 км. В 8:00 браконьеры вошли на катере в заповедник и направились в сторону биостанции. Через некоторое время им навстречу с биостанции вышел катер с рыбинспекторами. Через 6 минут, когда рыбинспекторы были ровно посередине между биостанцией и браконьерами, браконьеры заметили катер рыбинспекции, тут же развернулись и направились обратно к границе заповедника. Когда браконьеры достигли границы, рыбинспекторы с чувством выполненного долга развернулись и отправились обратно на биостанцию, куда прибыли в 08:25. Найдите наименьшее расстояние, на котором находились браконьеры от рыбинспекторов, если известно, что оба катера движутся равномерно и с одинаковой собственной скоростью.

6. Трапеция $KLMN$ вписана в окружность радиуса R и описана около окружности радиуса r, причем $R = \frac{3}{2}r$. Найдите среднюю линию трапеции, если диагональ KM равна 3.

7. В основании прямой призмы $KLMK'L'M'$ лежит прямоугольный треугольник KLM, такой что $KM = LM = 1$. На ребре $K'M'$ верхнего основания (параллельном KM) отмечена точка N, так что $K'N : NM' = 3 : 1$. Найдите радиус сферы, вписанной в тетраэдр $KL'MN$, если высота призмы равна 1.

8. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\cos\left(x + a\ln|x|\right) = x - 1$ имеет бесконечно много решений.

5 вариант (филиал)

1. Про квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ известно, что $b = 7$ и что $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{11}{3}$. Найдите $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)$.

2. Вычислите $\left(\log_4 3\right)^{\frac{\log_4 3}{\log_2(\log_4 3)}}$.

3. Решите неравенство $\left(2x^2 - 2x + 1\right)^{x^2 - 2x} \leqslant 1$.

4. Решите уравнение
$$\frac{\operatorname{tg} 2x - 2\sin x}{\operatorname{tg} 2x + 2\sin x} = 0.$$

5. Из села Покровское до села Успенское ведут две дороги: одна через деревню Ивановка, другая через деревню Павловка – обе длиной в 6 км. Иван и Павел отправились ровно в полдень из Покровского в Успенское, Иван – через Ивановку, Павел – через Павловку. Иван сразу сел на автобус, доехал до Ивановки, а оттуда пошел в Успенское пешком. Павел же пошел до Павловки пешком, дошел до нее в 12:30 – ровно в тот момент, когда Иван приехал в Успенское, тут же сел в Павловке на автобус и поехал в Успенское, куда приехал в 12:40. Найдите расстояние от Ивановки до Успенского, если известно, что Иван и Павел шли со скоростью 4 км/ч, а автобусы двигались с равными постоянными скоростями.

6. В треугольнике ABC проведены медианы AE и BD. Известно, что углы $\angle EAB$ и $\angle DBC$ равны, причем их косинусы равны $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Найдите BC, если $AB = 1$.

7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение
$$|\ln\left(2\left(ax+1\right) - \left(x^2 + a^2\right)\right)| = 2x$$
имеет ровно одно решение.

8. В основании прямой призмы лежит правильный треугольник ABC со стороной 1. На двух ребрах верхнего основания отмечены точки K и L, так что $KL \parallel AC$. Известно, что треугольник KMB, где M – середина ребра AC, является правильным. Найдите объем тетраэдра $KLMB$.

Ответы

1 вариант

1. $\dfrac{3}{5}$. **2.** $\dfrac{1}{2}$. **3.** $x \in [0;\, 1]$. **4.** $\dfrac{\pi n}{6}$; $\dfrac{\pi k}{8}$, $n \in \mathbb{Z}\backslash 3\mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}\backslash 4\mathbb{Z}$. **5.** 2 км. **6.** 7. **7.** $\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}} + 1 + \sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^{-1}$. **8.** $a \neq 0$.

2 вариант

1. $-\dfrac{1}{2}$. **2.** $\dfrac{2}{3}$. **3.** $x \in [-1;\, 0]$. **4.** $\dfrac{\pi k}{10}$, $k \in \mathbb{Z}\backslash(2\mathbb{Z} \cup 5\mathbb{Z})$. **5.** 4 км. **6.** $\sqrt{17} - 1$. **7.** $\left(1 + \sqrt{2} + \dfrac{\sqrt{11}}{3} + \dfrac{\sqrt{14}}{3}\right)^{-1}$. **8.** $a \neq 0$.

3 вариант

1. $-\dfrac{1}{3}$. **2.** $\dfrac{3}{2}$. **3.** $x \in [0;\, 1]$. **4.** $\dfrac{\pi k}{8}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus 4\mathbb{Z}$. **5.** 4.4 км. **6.** 9. **7.** $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{11}}{4} + \dfrac{\sqrt{19}}{4}\right)^{-1}$. **8.** $a \neq 0$.

4 вариант

1. $-\dfrac{4}{7}$. **2.** $\dfrac{3}{4}$. **3.** $x \in [-1;\, 0]$. **4.** $\dfrac{\pi k}{14}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus 7\mathbb{Z}$. **5.** 3 км. **6.** $\sqrt{10} - 1$. **7.** $\left(1 + \dfrac{7 + \sqrt{13}}{2\sqrt{2}}\right)^{-1}$. **8.** $a \neq 0$.

2012 год

1 вариант

1. Найдите многочлен второй степени, если известно, что его корни равны $-\dfrac{4}{7}$ и $\dfrac{5}{3}$, а свободный член равен -2.

2. Вычислите $\log_2 \log_{81} \dfrac{417}{139}$.

3. Решите неравенство
$$(9^x - 3^{x+2} + 14) \cdot \sqrt{4 - 2^x} \leqslant 0.$$

4. Решите уравнение
$$\sin 3x = \sqrt{2} \cos x - \sin x.$$

5. Найдите площадь фигуры, состоящей из точек (x, y) координатной плоскости, удовлетворяющих уравнению
$$|x| + |x + 3y| + 3|y - 2| = 6.$$

6. Окружность касается сторон AB и BC треугольника ABC в точках D и E, соответственно, и пересекает сторону AC в точках F, G (точка F лежит между точками A и G). Найдите радиус этой окружности, если известно, что $AF = 5, GC = 2, AD : DB = 2 : 1$ и $BE = EC$.

7. Определите, при каких значениях параметра a уравнение
$$a\sqrt{x + y} = \sqrt{3x} + 2\sqrt{y}$$
имеет единственное решение (x, y).

8. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник ABC со сторонами $AC = BC = 5$ и $AB = 6$, боковые ребра AS, BS, CS пирамиды равны $7, 7$ и 4. Прямой круговой цилиндр расположен так, что окружность его верхнего основания имеет ровно одну общую точку с каждой из боковых граней пирамиды, а окружность нижнего основания лежит в плоскости ABC и касается прямых AC и BC. Найдите высоту цилиндра.

2 вариант

1. Найдите многочлен второй степени, если известно, что его корни равны $-\dfrac{3}{5}$ и $\dfrac{13}{7}$, а средний коэффициент равен -4.

2. Вычислите $\log_5 \left(-\log_3 \dfrac{8}{1944} \right)$.

3. Решите неравентсво
$$(9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + 8) \cdot \sqrt{4 - 2^x} \geqslant 0.$$

4. Решите уравнение
$$\sin 4x + \sqrt{3} \sin 3x + \sin 2x = 0.$$

5. Найдите площадь фигуры, состоящей из точек (x, y) координатной плоскости, удовлетворяющих уравнению
$$2|x+2| + |y| + |2x - y| = 4.$$

6. Окружность с центром, лежащим на стороне BC треугольника ABC, касается сторон AB и AC в точках K и L, соответственно, и пересекает сторону BC в точках M, N (точка M лежит между точками B и N). Найдите CN, если известно, что $BM = 8$ и $BK : KA = AL : LC = 2 : 1$.

7. Определите, при каких значениях параметра a уравнение

$$a\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{3y}$$

имеет единственное решение (x, y).

8. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник ABC со сторонами $AC = BC = 4$ и $AB = \frac{8}{3}$, боковые ребра AS, BS, CS пирамиды равны $3, 3$ и 5. Прямой круговой цилиндр расположен так, что окружность его верхнего основания имеет ровно одну общую точку с каждой из боковых граней пирамиды, а окружность нижнего основания лежит в плоскости ABC и касается ровно одного из рёбер основания пирамиды. Найдите высоту цилиндра.

3 вариант

1. Найдите многочлен второй степени, если известно, что его корни равны $-\dfrac{5}{7}$ и $\dfrac{9}{4}$, а средний коэффициент равен -5.

2. Вычислите $\log_3 \left(\log_{64} \dfrac{716}{179} \right)$.

3. Решите неравентсво
$$(4^x - 7 \cdot 2^x + 12) \cdot \sqrt{3^{x+1} - 1} \leqslant 0.$$

4. Решите уравнение
$$\cos 3x = \cos x + \sqrt{3} \sin x$$

5. Найдите площадь фигуры, состоящей из точек (x, y) координатной плоскости, удовлетворяющих уравнению
$$|2y - x| + 2|y + 4| + |x| = 8.$$

6. Окружность касается сторон AB и BC треугольника ABC в точках K и L, соответственно, и пересекает сторону AC в точках M, N (точка M лежит между точками A и N). Найдите радиус этой окружности, если известно, что $AM = 1, NC = 3, AK : KB = 2 : 1$ и $BL : LC = 1 : 4$.

7. Определите, при каких значениях параметра a уравнение

$$a\sqrt{x+y} = \sqrt{2x} + \sqrt{3y}$$

имеет единственное решение (x, y).

8. В основании пирамиды лежит правильный треугольник ABC со стороной 5, боковые ребра AS, BS, CS пирамиды равны $7, 7$ и 3. Прямой круговой цилиндр расположен так, что окружность его верхнего основания имеет ровно одну общую точку с каждой из боковых граней пирамиды, а окружность нижнего основания лежит в плоскости ABC и касается прямых AC и BC. Найдите высоту цилиндра.

4 вариант

1. Найдите многочлен второй степени, если известно, что его корни равны $-\dfrac{2}{5}$ и $\dfrac{11}{3}$, а средний коэффициент равен -7.

2. Вычислите $\log_3\left(-\log_6\dfrac{7}{1512}\right)$.

3. Решите неравентсво
$$(4^x - 2^{x+3} + 15)\cdot\sqrt{3^x - 9} \geqslant 0.$$

4. Решите уравнение
$$\cos 4x - \sqrt{2}\cos 3x + \cos 2x = 0.$$

5. Найдите площадь фигуры, состоящей из точек (x, y) координатной плоскости, удовлетворяющих уравнению
$$|2x + y| + |y| + 2|x - 1| = 2.$$

6. Окружность с центром, лежащим на стороне BC треугольника ABC, касается сторон AB и AC в точках D и E, соответственно, и пересекает сторону BC в точках F, G (точка F лежит между точками B и G). Найдите CG, если известно, что $BF = 1$ и $BD : DA = AE : EC = 1 : 2$.

7. Определите, при каких значениях параметра a уравнение
$$a\sqrt{x+y} = \sqrt{2x} + \sqrt{y}$$
имеет единственное решение $(x,\ y)$.

8. В основании пирамиды $ABCS$ лежит правильный треугольник ABC со стороной $\sqrt{3}$. Боковые ребра пирамиды равны соответственно $SA = SB = 4$, $SC = 5$. Прямой круговой цилиндр расположен так, что окружность его верхнего основания имеет ровно одну общую точку с каждой из боковых граней пирамиды, а окружность нижнего основания лежит в плоскости ABC и касается одной из сторон треугольника ABC. Найдите радиус основания цилиндра.

Ответы

1 вариант

1. $\dfrac{21}{10}x^2 - \dfrac{23}{10}x - 2$. **2.** -2. **3.** $x \in \{2\} \cup [\log_3 2;\ \log_3 7]$. **4.** $\dfrac{\pi}{2} + \pi k$; $(-1)^n\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{2}$, $k,\ n \in \mathbb{Z}$. **5.** 6. **6.** $\sqrt{6}$. **7.** $a \in (-\infty;\ \sqrt{3}) \cup (\sqrt{7};\ +\infty)$. **8.** $\dfrac{5\sqrt{15}}{6}$.

2 вариант

1. $\frac{35}{11}x^2-4x-\frac{39}{11}$. **2.** 1. **3.** $x\in(-\infty;\log_3 2]\cup\{1\}$. **4.** $\frac{\pi k}{3}$; $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, k, $n\in\mathbb{Z}$. **5.** 4. **6.** $3-\sqrt{5}$. **7.** $a\in(-\infty;\ 1)\cup(2;\ +\infty)$. **8.** $\frac{4\sqrt{7}}{5}$.

3 вариант

1. $\frac{28}{9}x^2-\frac{43}{9}x-5$. **2.** -1. **3.** $x\in\{-1\}\cup[\log_2 3;\ 2]$. **4.** πk; $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$, k, $n\in\mathbb{Z}$. **5.** 16. **6.** $\sqrt{\frac{15}{2}}$. **7.** $a\in(-\infty;\ \sqrt{2})\cup(\sqrt{5};\ +\infty)$. **8.** $\frac{5\sqrt{3}}{26}$.

4 вариант

1. $\frac{15}{17}x^2-7x-\frac{22}{7}$. **2.** 1. **3.** $x\in\{2\}\cup[\log_2 5;+\infty)$. **4.** $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$; $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$, k, $n\in\mathbb{Z}$. **5.** 1. **6.** $6+\sqrt{5}$. **7.** $a\in(-\infty;\ 1)\cup(\sqrt{3};\ +\infty)$. **8.** $\frac{5}{14}$.

2011 год

1 вариант

1. Вычислите значение выражения $x^2 - 0.625x - \dfrac{1}{8}$ в точке $x = \dfrac{4}{5}$.

2. Решите уравнение $(\sin x + \cos x)^2 = 1$.

3. Решите уравнение
$$\log_2(3x-4) = \log_4(2-x).$$

4. Решите неравенство
$$\frac{\sqrt{5x+3}-1}{\sqrt{3x+2}-1} > 1.$$

5. Медианы AL и BM треугольника ABC пересекаются в точке K. Найдите длину отрезка CK, если $AB = \sqrt{3}$ и известно, что вокруг четырехугольника $KLCM$ можно описать окружность.

6. Найдите наибольшее из значений функции
$$\frac{9^x}{4^x - 6^x + 9^x}$$
и точку x, в которой это значение достигается.

7. В закрытой коробке, имеющей форму куба со стороной 5, лежат два шара. Радиус первого из них равен 2. Этот шар касается плоскости основания и двух соседних боковых граней куба. Второй шар касается двух других боковых граней куба, плоскости основания и первого шара. Чему равен радиус второго шара?

8. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} 2x^2 + 4xy + 11y^2 \leqslant 1, \\ 4x + 7y \geqslant 3. \end{cases}$$

2 вариант

1. Вычислите значение функции $\dfrac{x^2-5}{x-0.2}$ в точке $x = \dfrac{9}{4}$.

2. Решите уравнение $(\sin x + \cos x)^2 = 2$.

3. Решите уравнение
$$\log_3(5-2x) = \log_9(5+x).$$

4. Решите неравенство
$$\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{2+3x}-1} < 1.$$

5. Медианы AP и BQ треугольника ABC пересекаются в точке D. Найдите длину отрезка AB, если $CD = \sqrt{12}$ и известно, что вокруг четырехугольника $PCQD$ можно описать

окружность.

6. Найдите наибольшее из значений функции

$$\frac{6^x}{9^{x+1}+6^x+4^{x-1}}$$

и точку x, в которой это значение достигается.

7. Внутри куба с ребром 3 расположены две сферы. Первая касается плоскости основания и двух соседних граней куба. Вторая сфера касается тех же двух боковых граней, грани куба, параллельной основанию, и первой сферы. Чему равен радиус второй сферы, если радиус первой равен 1?

8. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 3x^2+4xy+12y^2 \leqslant 1, \\ 5x+6y \leqslant -3. \end{cases}$$

3 вариант

1. Вычислите значение выражения $0.125x^2-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{9}$ в точке $x=\dfrac{1}{2}$.

2. Решите уравнение $(\sin x-\cos x)^2=1$.

3. Решите уравнение

$$\log_2(1-3x)=\log_4(5x-1).$$

4. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{4x-2}-1}{\sqrt{3x-1}-1}>1.$$

5. Медианы KC и LD треугольника KLM пересекаются в точке E. Найдите длину отрезка EM, если $KL=3$ и известно, что вокруг четырехугольника $ECMD$ можно описать окружность.

6. Найдите наибольшее из значений функции

$$\frac{4^x}{2\cdot 5^{2x}-10^x+4^x}$$

и точку x, в которой это значение достигается.

7. В закрытой коробке, имеющей форму куба со стороной 8, лежат два шара. Радиус первого из них равен 2. Этот шар касается плоскости основания и двух соседних боковых граней куба. Второй шар радиуса 3 касается двух других боковых граней куба и первого шара. На какой высоте над дном коробки находится центр второго шара?

8. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 4x^2-2xy+7y^2 \leqslant 1, \\ 2x-5y \geqslant 2. \end{cases}$$

4 вариант

1. Вычислите значение функции $\dfrac{x^2-1,75}{x+5}$ в точке $x=\dfrac{4}{3}$.

2. Решите уравнение $(\sin x-\cos x)^2=2$.

3. Решите уравнение
$$\log_3(2x+1)=\log_9(4+3x).$$

4. Решите неравенство
$$\frac{\sqrt{1-3x}-1}{\sqrt{2+x}-1}<1.$$

5. Медианы PE и QF треугольника PQR пересекаются в точке S. Найдите длину отрезка PQ, если $SR=2$ и известно, что вокруг четырехугольника $SERF$ можно описать окружность.

6. Найдите наибольшее из значений функции
$$\frac{10^x}{25^{x-1}+10^x+4^{x+1}}$$
и точку x, в которой это значение достигается.

7. В кубе с ребром 3 расположены две сферы различных радиусов. Первая касается плоскости основания и двух соседних боковых граней куба. Вторая сфера касается двух других боковых граней куба, грани куба, параллельной основанию, и первого шара. Чему равна сумма радиусов сфер?

8. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} 5x^2-2xy+9y^2\leqslant 1,\\ 3x-5y\leqslant -2. \end{cases}$$

Ответы

1 вариант

1. $\dfrac{3}{200}$. **2.** $\dfrac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$. **3.** $\dfrac{14}{9}$. **4.** $\left[-\dfrac{3}{5};-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{3};+\infty\right)$. **5.** 1. **6.** $\dfrac{4}{3}$, $x=\dfrac{1}{\log_2 3-1}$. **7.** 1. **8.** $x=\dfrac{5}{9}$, $y=-\dfrac{1}{9}$.

2 вариант

1. $\dfrac{5}{164}$. **2.** $\dfrac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **3.** $\dfrac{5}{4}$. **4.** $\left[-\dfrac{2}{3};-\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{4};1\right]$. **5.** 6. **6.** $\dfrac{1}{4}$, $x=\dfrac{\log_2 3+1}{1-\log_2 3}$. **7.** $\dfrac{5-\sqrt{15}}{2}$. **8.** $x=-\dfrac{1}{2}$, $y=-\dfrac{1}{12}$.

3 вариант

1. $-\dfrac{7}{228}$. **2.** $\dfrac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. **3.** $\dfrac{2}{9}$. **4.** $\left[\dfrac{1}{2};\ \dfrac{2}{3}\right) \cup (1;\ +\infty)$. **5.** $\sqrt{3}$. **6.** $\dfrac{8}{7}$, $x = \dfrac{2}{1-\log_2 5}$. **7.** $2+\sqrt{7}$. **8.** $x = \dfrac{1}{6}$, $y = -\dfrac{1}{3}$.

4 вариант

1. $\dfrac{1}{228}$. **2.** $-\dfrac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **3.** $\dfrac{3}{4}$. **4.** $[-2;\ -1)\cup\left(-\dfrac{1}{4};\ \dfrac{1}{3}\right]$. **5.** $2\sqrt{3}$. **6.** $\dfrac{5}{9}$, $x = \dfrac{\log_2 5+1}{\log_2 5-1}$. **7.** $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$. **8.** $x = -\dfrac{1}{4}$, $y = \dfrac{1}{4}$.

Глава 1

Ответы и решения

1.1 2017 год

1 вариант

1. Так как сумма двух неравных взаимно обратных положительных чисел больше 2, то

$$\sqrt{\frac{6}{7}+\frac{7}{6}+7} > \sqrt{2+7} = \sqrt{9} = 3$$

Итак, первое число больше второго.

Ответ: Первое число больше второго.

Комментарий.

А. Пусть a, $b \geqslant 0$. Тогда $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$.

Б. Пусть $x > 0$. Тогда $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$.

2. Так как $a + b + c = 5$, то $(a + b + c)^2 = 25$. Возводя трехчлен в квадрат, получим

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) = 25 \Longrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 25 - 2 \cdot 4 = 17$$

Ответ: 17.

3. Воспользуемся формулой $\sin x + \sin y = 2 \sin \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}$ для левой части уравнения и $\sin x = 2 \sin \dfrac{x}{2} \cos \dfrac{x}{2}$ для правой части. Получим

$$2 \sin \frac{13x}{2} \cos \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 0 \iff 2 \cos \frac{x}{2} \left(\sin \frac{13x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right) = 0 \iff$$

$$\left[\begin{aligned} &\cos \frac{x}{2} = 0 \\ &\sin \frac{13x}{2} - \sin \frac{x}{2} = 0 \end{aligned} \right. \iff \left[\begin{aligned} &\cos \frac{x}{2} = 0 \\ &2 \sin 3x \cos \frac{7x}{2} = 0 \end{aligned} \right. \iff \left[\begin{aligned} &\cos \frac{x}{2} = 0 \\ &\sin 3x = 0 \\ &\cos \frac{7x}{2} = 0 \end{aligned} \right. \iff \left[\begin{aligned} &x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \\ &x = \frac{\pi k}{3},\ k \in \mathbb{Z} \\ &x = \frac{\pi}{7} + \frac{2\pi m}{7},\ m \in \mathbb{Z} \end{aligned} \right.$$

Ответ: $\pi + 2\pi n$; $\dfrac{\pi k}{3}$; $\dfrac{\pi}{7} + \dfrac{2\pi m}{7}$, n, k, $m \in \mathbb{Z}$.

Комментарий.

А. Можно воспользоваться равносильным переходом

$$\sin x - \sin y = 0 \iff \left[\begin{array}{l} x - y = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \\ x + y = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

4. Так как по ОДЗ $x > 0$, то $\log_6 x^4 = 4\log_6 x$. Обозначим $\log_7 x = a$, $\log_6 x = b$. Тогда неравенство примет вид

$$a^2x^2 - 4abx + 3b^2 \leqslant 0 \iff a^2x^2 - 3abx - abx + 3b^2 \leqslant 0 \iff ax(ax - 3b) - b(ax - 3b) \leqslant 0 \iff$$
$$\iff (ax - 3b)(ax - b) \leqslant 0$$

Подставляя вместо a и b исходные значения и применяя формулу перехода к новому основанию, получим

$$(x\log_7 x - \log_6 x)\,(x\log_7 x - 3\log_6 x) \leqslant 0 \iff \left(x \cdot \frac{\log_6 x}{\log_6 7} - \log_6 x\right)\left(x \cdot \frac{\log_6 x}{\log_6 7} - 3\log_6 x\right) \leqslant 0$$
$$\iff \log_6^2 x\left(\frac{x}{\log_6 7} - 1\right)\left(\frac{x}{\log_6 7} - 3\right) \leqslant 0 \iff \log_6^2 x\,(x - \log_6 7)\,(x - 3\log_6 7) \leqslant 0$$

5. $\pi/4$.

6. 4 км.

7. $\dfrac{2\sqrt[4]{2}}{9\sqrt[4]{3}}$.

8. $x = \dfrac{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}{3\sqrt{2}}\sqrt{\pi}$, $y = \dfrac{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}\sqrt{\pi}$.

2 вариант

1. Первое больше. **2.** 10. **3.** $x = (2k+1)\pi$, $\dfrac{(1+4k)\pi}{12}$, $\dfrac{(-1+4k)\pi}{10}$, $k \in Z$. **4.** $x = 1$, $2\log_5 6 \leqslant x \leqslant 3\log_5 6$. **5.** $\sqrt{5/2}$. **6.** Одну пятую пути от A до B. **7.** $\dfrac{\sqrt[4]{75}}{15}$. **8.** $x = 7\sqrt{\dfrac{\pi}{6}}$, $y = -2\sqrt{2\pi}$.

3 вариант

1. Первое больше. **2.** 6. **3.** $x = \dfrac{k\pi}{4}$, $\dfrac{2k\pi}{7}$, $k \in Z$. **4.** $x = 1$, $\log_4 5 \leqslant x \leqslant 5\log_4 5$. **5.** $\pi/3$. **6.** 2 км. **7.** $\dfrac{2\sqrt[4]{110}}{33}$. **8.** $x = 3\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$, $y = -5\sqrt{\dfrac{\pi}{6}}$.

4 вариант

1. Первое больше. **2.** 15. **3.** $x = 2k\pi$, $\frac{(1+4k)\pi}{18}$, $\frac{(1+4k)\pi}{16}$, $k \in Z$. **4.** $x = 1$, $2\log_3 4 \leqslant x \leqslant 5\log_3 4$. **5.** $\sqrt{14}$ **6.** Одну шестую пути от A до B **7.** $\frac{\sqrt[4]{5}}{3\sqrt{6}}$ **8.** $x = \frac{2\sqrt{5}+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\pi}$, $y = \frac{\sqrt{5}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\pi}$.

1.2 2016 год

1 вариант

1. Запишем функцию $f(x)$ в виде $f(x) = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{4}{7}$. Тогда $f\left(\dfrac{2}{7}\right) = \dfrac{1}{1-\frac{2}{7}} - \dfrac{4}{7} = \dfrac{29}{35}$.

Ответ: $\dfrac{29}{35}$.

2. По теореме обратной теореме Виета, имеем: $x_1 + x_2 = -a$, $x_1 \cdot x_2 = -6$. Пусть $x_2 > x_1$, тогда

$$x_2 - x_1 = |x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = \sqrt{(x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{a^2 + 24}$$

По условию эта разность равна 5, то есть $\sqrt{a^2+24} = 5$, откуда $a = \pm 1$.

Сделаем проверку:

1. При $a = -1$, уравнение имеет вид $x^2 - x - 6 = 0$. Его корни $x_1 = -2$, $x_2 = 3$ удовлетворяют условию задачи.
2. При $a = 1$, уравнение имеет вид $x^2 + x - 6 = 0$. Его корни $x_1 = -3$, $x_2 = 2$ так же удовлетворяют условию задачи.

Ответ: $a = \pm 1$.

3. Применяя основное тригонометрическое тождество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, а так же формулы для синуса и косинуса двойного угла $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, приведем уравнение к виду

$$\sin^2 x - 6\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 0$$

Очевидно $\cos x \neq 0$, иначе $\sin x = 0$, что не выполняется одновременно. Деля обе части уравнения на $\cos^2 x \neq 0$, получаем квадртаное уравнение относительно $\operatorname{tg} x$:

$$\operatorname{tg}^2 x - 6\operatorname{tg} x + 5 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 1 \\ \operatorname{tg} x = 5 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \\ x = \operatorname{arctg} 5 + \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Замечание: Уравнение можно решить иначе. Заменяя $2\cos^2 x$ на $1 + \cos 2x$, получим

$$3\sin 2x - 2\cos 2x = 3$$

Поделив обе части полученного уравнения на $\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$, введем вспомогательный угол α, такой, что $\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$, $\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$, $\alpha = \arcsin\dfrac{2}{\sqrt{13}}$. Итак, имеем уравнение

$$\sin(2x - \alpha) = \frac{3}{\sqrt{13}} \iff \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2}\left(\arcsin\dfrac{2}{\sqrt{13}} + \arcsin\dfrac{3}{\sqrt{13}}\right) + \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{1}{2}\left(\pi + \arcsin\dfrac{2}{\sqrt{13}} - \arcsin\dfrac{3}{\sqrt{13}}\right) + \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \operatorname{arctg} 5 + \pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$.

4. Запишем область допустимых значений переменной x:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ 1 - \log_3 x > 1 \\ 1 - \log_3 x \neq 1 \end{cases} \iff x \in (0;1) \cup (1;3)$$

Применяя 2 раза метод замены множителя имеем

$$\log_{1-\log_3 x}(1 + \log_x^2 3) - 1 \leq 0 \overset{\text{ОДЗ}}{\iff} (1 - \log_3 x - 1)(1 + \log_x^2 3 - 1 + \log_3 x) \leq 0 \iff$$

$$\log_3 x \left(\log_x^2 3 + \log_3 x\right) \geq 0 \iff \frac{\log_3^3 x + 1}{\log_3 x} \geq 0 \iff \frac{\log_3 x + 1}{\log_3 x} \geq 0 \iff$$

$$\frac{\log_3 x - \log_3 \frac{1}{3}}{\log_3 x} \geq 0 \overset{\text{ОДЗ}}{\iff} \frac{x - \frac{1}{3}}{x - 1} \geq 0 \iff x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right] \cup (1; +\infty)$$

С учетом ОДЗ, получаем окончательный ответ $x \in \left(0; \frac{1}{3}\right] \cup (1;3)$.

Ответ: $x \in \left(0; \frac{1}{3}\right] \cup (1;3)$.

5. Проведем через точку T, общую касательную TM. Так как $O_1T \perp TM$, $O_2T \perp TM$ (как радиусы проведенные в точку касания), то точки O_1, O_2, M лежат на одной прямой.

Так как четырехугольник $ATBC$ вписанный, то $\angle CAB = \angle CTB = \alpha$. Так же поскольку $\triangle BCT$ равнобедренный, то $\angle BCT = \angle BTC = \alpha$ и $\angle BAT = \angle TCB$ (как связанные углы опирающиеся на одну дугу).

$\triangle O_2ST$ и $\triangle O_1CT$ – равнобедренные, значит углы при основании равны $\angle O_2TS = \angle O_2ST = \angle O_1CT = \beta$. Тогда прямые O_1C и O_2S – параллельны (соответсвенные углы при секущей равны). Получили, что $\triangle O_2CT \sim \triangle O_2ST$ (по двум углам), значит

$$\frac{O_1T}{O_2T} = \frac{CT}{ST} = \frac{8}{5} \Rightarrow \frac{CS + ST}{ST} = \frac{8}{5} \Rightarrow \frac{CS}{ST} = \frac{3}{5}$$

По теореме о угле между касательной и секущей имеем $\angle BTM = \angle BAT = \alpha$. Тогда $\angle O_1TM = 90^\circ = 2\alpha + \beta$. Значит, $\beta = 90^\circ - 2\alpha$.

Из $\triangle ACK$ находим $\angle ACK = 90^\circ - \alpha$, тогда $\angle ACB = 90^\circ - \alpha + \beta + \alpha = 90^\circ + \beta = 180^\circ - 2\alpha$. Так как четырехугольник $ACBT$ вписанный, то $\angle ACB + \angle BTA = 180^\circ$. Значит $\angle ATB = 2\alpha$ и $\angle ATC = \alpha$.

Получили, что $\angle ATC = \angle TCB = \alpha$, значит прямые AT и BC – параллельны и $AC = BC$ (так как равные вписанные углы опираются на равные хорды). Итак, четырехугольник $ATBC$ – равнобедренная трапеция.

В $\triangle ACT$, AS – биссектрисса, значит

$$\frac{CS}{ST} = \frac{AC}{AT} \Rightarrow AT = 5$$

В равнобедренной трапеции $ATBC$ боковые стороны равны 3, а основания 3 и 5. Высота такой трапеции равна $h = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$. Тогда $S = 8\sqrt{2}$.

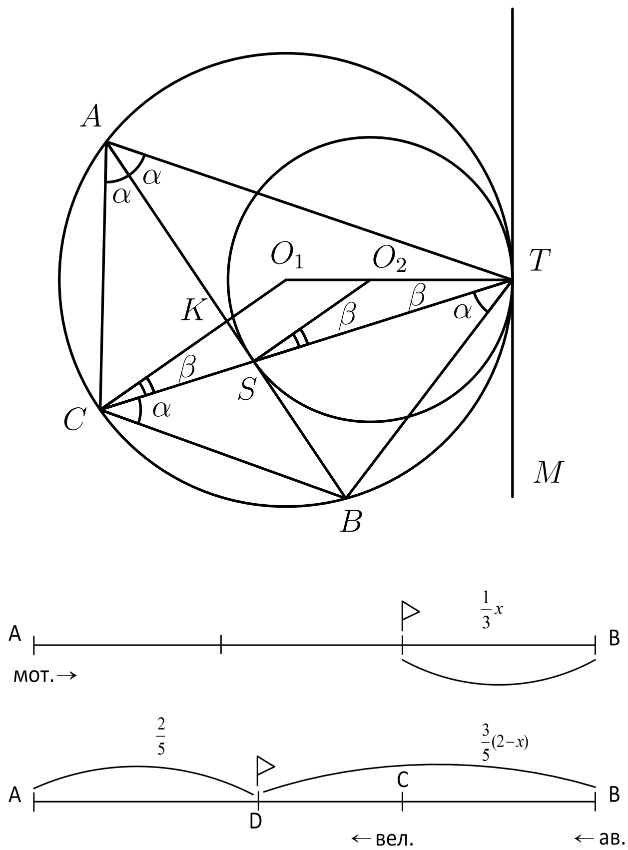


Рис. 1.1:

Ответ: $8\sqrt{2}$.

6. Сделаем рисунок к задаче

Обозначим x – время автомобиля, затраченное на путь AB, $(2-x)$ – время автобуса, затраченное на путь BA. Тогда время движения от C до D велосипедиста составит $\dfrac{1}{3}x + \dfrac{3}{5}(2-x) = \dfrac{6}{5} - \dfrac{4x}{15}$ ч.

Пусть CD составляет $\dfrac{4}{15}$ отрезка AB. Следовательно, скорость велосипедиста равна

$$\frac{4}{15} : \left(\frac{6}{5} - \frac{4x}{15}\right) = \frac{2}{9-2x}$$

На оставшийся путь DA автомобиль и велосипедист затратят соответсвенно

$$t_1 = \frac{2}{5}(2-x) = \frac{4-2x}{5},\ t_2 = \frac{2}{3} : \frac{2}{9-2x} = \frac{9-2x}{5}$$

Имеем, $t_2 - t_1 = \dfrac{9-2x}{5} - \dfrac{4-2x}{5} = 1$ ч. То есть велосипедист прибыл в пункт А на 1 ч позже.

Ответ: 1 ч.

7.

8. Обозначим $\log_a \cos ax = u$, $\log_a \sin ax = v$. Тогда $\log_a \operatorname{tg} ax = v - u$. Имеем

$$f(u,v) = \sqrt{106 + u^2 + 104} + \sqrt{8 + v^2 - 6v} + \sqrt{(v-u)^2 + 2(v-u) + 5} =$$
$$= \sqrt{(u+5)^2 + 9^2} + \sqrt{(v-3)^2 + 7^2} + \sqrt{(v-u+1)^2 + 2^2} \geq 18$$

Поскольку при $u = -5$, $v = 3$ значение выражения $v - u + 1 = 9 \neq 0$, то значение 18 не достигается. Итак, $f(u,v) > 18$.

Воспользуемся тем, что $(a-b)^2 = (b-a)^2$ и запишем функцию $f(u,v)$ в виде

$$f(u,v) = \sqrt{(u+5)^2 + 9^2} + \sqrt{(3-v)^2 + 7^2} + \sqrt{(v-u+1)^2 + 2^2}$$

Рассмотрим вектора $\overrightarrow{a}(u+5;\,9)$, $\overrightarrow{b}(3-v;\,7)$, $\overrightarrow{c}(v-u+1;\,2)$. Тогда

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{(u+5)^2 + 9^2},\ |\overrightarrow{b}| = \sqrt{(3-v)^2 + 7^2},\ |\overrightarrow{c}| = \sqrt{(v-u+1)^2 + 2^2}$$

Поскольку $|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}| + |\overrightarrow{c}| \geq |\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}|$, то

$$f(u,v) \geq \sqrt{(u+5+3-v+v-u+1)^2 + (9+7+2)^2} = 9\sqrt{5}$$

причем знак равенства достигается когда вектора $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ сонаправленны, то есть их координаты пропорциональны

$$\begin{cases} \dfrac{u+5}{3-v} = \dfrac{9}{7} \\ \dfrac{u+5}{v-u+1} = \dfrac{9}{2} \\ \dfrac{3-v}{v-u+1} = \dfrac{7}{2} \end{cases} \iff u = v = -\frac{1}{2}$$

Итак, $f_{min} = 9\sqrt{5}$ при $u = v = -\dfrac{1}{2}$.

Возвращаясь к a, x имеем систему

$$\begin{cases} \log_a \cos ax = -\dfrac{1}{2} \\ \log_a \sin ax = -\dfrac{1}{2} \\ \log_a \operatorname{tg} ax = 0 \end{cases}$$

решая которую находим $a = 2$, $x = \dfrac{\pi}{8} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $9\sqrt{5}$, $a = 2$, $x = \dfrac{\pi}{8} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Замечание 1. Аналогичный результат будет получен, если рассматривать вектора $\overrightarrow{a}(-u-5;\,9)$, $\overrightarrow{b}(v-3;\,7)$, $\overrightarrow{c}(u-v-1;\,2)$.

Замечание 2. Определения коллинеарных, сонаправленных и противоположно направленных векторов:

- Вектора, параллельные одной прямой или лежащие на одной прямой называют коллинеарными векторами;
- Два коллинеарных вектора $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ называются сонаправленными векторами, если их направления совпадают: $a \uparrow\uparrow b$;
- Два коллинеарных вектора $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ называются противоположно направленными векторами, если их направления противоположны: $a \uparrow\downarrow b$.

Ответы к вариантам 2 – 4

Вариант 2. 1. $\dfrac{41}{12}$. **2.** $a = \pm 3$. **3.** $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$. **4.** $x \in \left[\dfrac{1}{2}; 1\right) \cup (2; +\infty)$ **5.** 2. **6.** В 13:00. **7.** $4\sqrt{2}$. **8.** $8\sqrt{5}$, $a = 2$, $x = \dfrac{\pi}{2} + 4\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Вариант 3. 1. $\dfrac{11}{14}$. **2.** $a = \pm 5$. **3.** $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $x = -\operatorname{arctg} 11 + \pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$. **4.** $x \in \left(\dfrac{1}{5}; 1\right) \cup [5; +\infty)$ **5.** 32. **6.** В 13:30. **7.** $49\sqrt{2}$. **8.** $11\sqrt{5}$, $a = \dfrac{1}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{8} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Вариант 4. 1. $\dfrac{37}{18}$. **2.** $a = \pm 7$. **3.** $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \operatorname{arctg} 7 + \pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$. **4.** $x \in \left(0; \dfrac{1}{7}\right) \cup (1; 7]$ **5.** 3. **6.** В 14:00. **7.** $9\sqrt{2}$. **8.** $10\sqrt{5}$, $a = \dfrac{1}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{2} + 4\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

1.3 2015 год

1 вариант

1. $f(x) = \dfrac{x}{5} + \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{10}$.

$f(2) = \dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{10} = \dfrac{4+15+1}{10} = \dfrac{20}{10} = 2.$

Ответ: 2.

2. По теореме обратной теореме Виета, имеем $x_1 + x_2 = 7$, $x_1 \cdot x_2 = 5$. Тогда

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2\,x_1 \cdot x_2 = 7^2 - 2 \cdot 5 = 39$$

Ответ: 39.

3. Применяя формулу для $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ перепишем неравенство в виде

$$\cos x - \sin x + \sqrt{2}\,(\cos^2 x - \sin^2 x) \geqslant 0 \iff \cos x - \sin x + \sqrt{2}\,(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) \geqslant 0 \iff$$
$$(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x + \tfrac{1}{\sqrt{2}}) \geqslant 0 \iff \sqrt{2}\cos\left(x + \tfrac{\pi}{4}\right)\left(\sqrt{2}\left(\sin(x + \tfrac{\pi}{4})\right) + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \geqslant 0 \iff$$
$$\cos\left(x + \tfrac{\pi}{4}\right)\left(\sin(x + \tfrac{\pi}{4}) + \tfrac{1}{2}\right) \geqslant 0$$

Обозначая $t = x + \frac{\pi}{4}$, получим неравенство

$$\cos t\left(\sin t + \frac{1}{2}\right) \geqslant 0$$

которое равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos t \geqslant 0 \\ \sin t \geqslant -\dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \cos t \leqslant 0 \\ \sin t \leqslant -\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n \leqslant t \leqslant -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n \\ \dfrac{7\pi}{6} + 2\pi n \leqslant t \leqslant \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n \leqslant x + \dfrac{\pi}{4} \leqslant -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n \\ \dfrac{7\pi}{6} + 2\pi n \leqslant x + \dfrac{\pi}{4} \leqslant \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} -\dfrac{5\pi}{12} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4} + 2 \\ \dfrac{11\pi}{12} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \dfrac{5\pi}{4} + 2 \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in \left[-\frac{5\pi}{12} + 2\pi n,\ \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right] \cup \left[\frac{11\pi}{12} + 2\pi n,\ \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}$

4. $\log_x |2x^2 - 3| = 4\log_{|2x^2-3|} x$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ 2x^2 - 3 \neq 0 \\ 2x^2 - 3 \neq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x^2 \neq \dfrac{3}{2} \\ x^2 \neq 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq \sqrt{\dfrac{3}{2}} \\ x \neq \sqrt{2} \end{cases}$$

На ОДЗ имеем:

$$\log_x |2x^2-3| = \frac{4}{\log_x |2x^2-3|} \iff \log_x^2 |2x^2-3| = 4 \iff \left[\begin{array}{l}\log_x |2x^2-3| = -2\\ \log_x |2x^2-3| = 2\end{array}\right.$$

1) $\log_x |2x^2-3| = -2 \overset{\text{ОДЗ}}{\iff} |2x^2-3| = \frac{1}{x^2}$

При $2x^2-3>0$ имеем $x^2 = \dfrac{3+\sqrt{17}}{4}$

При $2x^2-3<0$ имеем $x^2=1$, $x^2 = \dfrac{1}{2}$

Учитывая ОДЗ имеем $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $x = \dfrac{\sqrt{3+\sqrt{17}}}{2}$

2) $\log_x |2x^2-3| = 2 \overset{\text{ОДЗ}}{\iff} |2x^2-3| = x^2$

При $2x^2-3>0$ имеем $x^2=3$

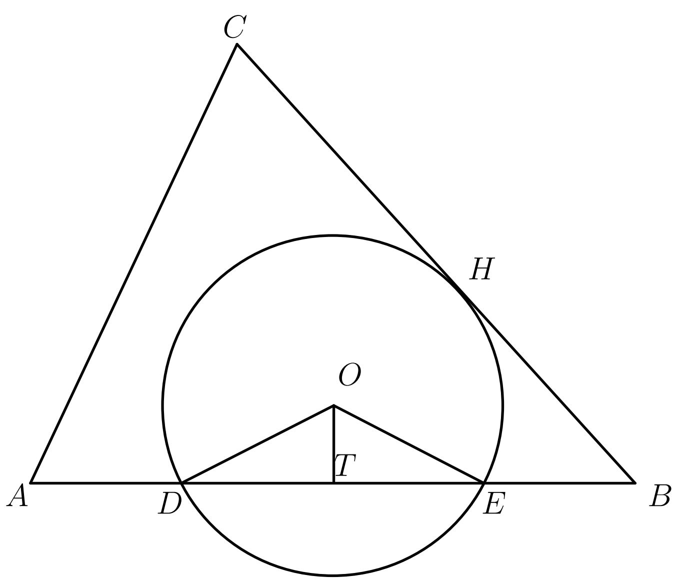
При $2x^2-3<0$ имеем $x^2=1$

Учитывая ОДЗ имеем $x=\sqrt{3}$

Итак, корнями уравнения являются числа $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $x=\sqrt{3}$, $x = \dfrac{\sqrt{3+\sqrt{17}}}{2}$.

Ответ: $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $x=\sqrt{3}$, $x = \dfrac{\sqrt{3+\sqrt{17}}}{2}$.

5. Сделаем рисунок к задаче



Обозначим $DE = x$, тогда учитывая условие $AD : DE : EB = 1 : 2 : 1$, получим $BD = AE = \dfrac{x}{2}$.

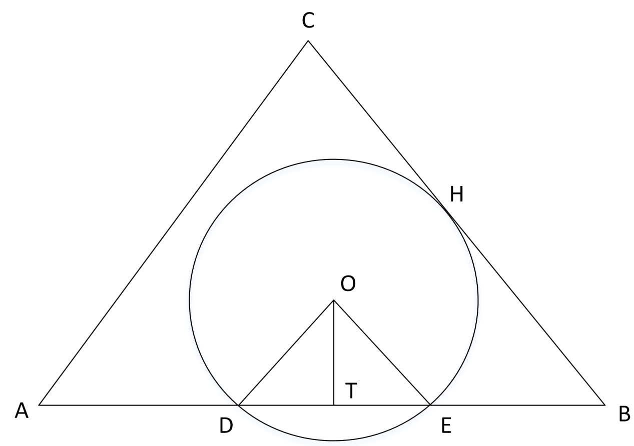


Рис. 1.2:

По теореме о квадрате касательной имеем: $BH^2 = BD \cdot BE = \dfrac{3x^2}{4} \Rightarrow BH = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$, $BC = x\sqrt{3}$.

Треугольник ODE – равнобедренный $\left(OD = OE = \frac{3}{2}\right) \Rightarrow OT$ – высота и $DT = AT \Rightarrow OT$ – серединный перпендикуляр и O – центр описанной около треугольника ABC окружности $\Rightarrow OB = OC = R$.

По теореме синусов имеем $\dfrac{BC}{\sin 30^\circ} = 2R$, значит $BC = R$ и треугольник BOC – равносторонний $(OB = OC = BC)$.

По теореме Пифагора

$$BO^2 = OH^2 + BH^2 \Rightarrow 3x^2 = \frac{9}{4} + \frac{3x^2}{4} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$$

Итак, $AB = 2x = 2$, $BC = x\sqrt{3} = \sqrt{3}$.

По теореме косинусов

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 30^\circ$$
$$AC^2 - 2\sqrt{3}AC + 1 = 0$$
$$AC = \sqrt{3} \pm \sqrt{2}$$

Ответ: $\sqrt{3} \pm \sqrt{2}$.

6. Обозначим v_1 – скорость Василия пешком, v_2 – скорость Григория на мотоцикле. По условию задачи

$$\frac{4}{v_2} = \frac{\frac{4}{3}}{v_1} \iff v_2 = 3v_1$$

Скорость сближения Василия и Григория равна $v_1 + v_2 = 4v_1$. Тогда время до их встречи равно

$$\frac{4}{3} : (4v_1) = \frac{1}{3v_1}$$

Значит, расстояние от пункта А до места их встречи равно

$$\frac{1}{3v_1} \cdot v_2 = \frac{1}{3v_1} \cdot 3v_1 = 1$$

Ответ: 1 км.

7.

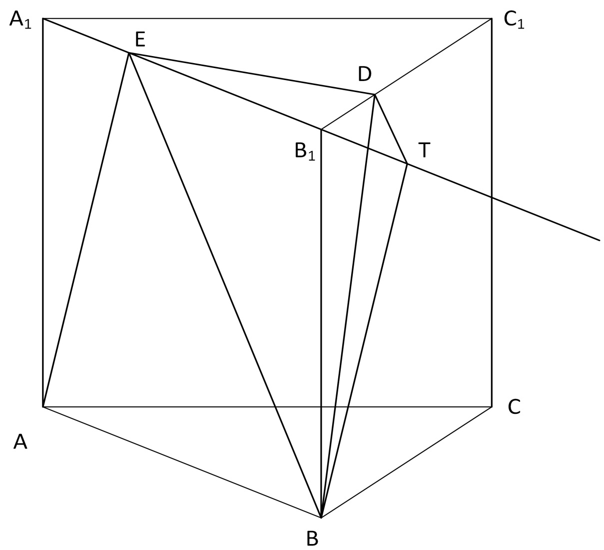


Рис. 1.3:

Радиус сферы вписанной в правильную призму равен радиусу окружности вписанной в основание призмы, а высота призмы равна удвоенному радиусу сферы.

Пусть сторона основания призмы $AB = 3a$, тогда $A_1E = B_1D = a$, $r = \frac{3a\sqrt{3}}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AA_1 = 2r = a\sqrt{3}$.

Проведем $BT \parallel AE$, тогда $AE \parallel (BDT)$ и расстояние между прямыми AE и BD есть расстояние от любой точки прямой AE до плоскости (BDT). В качестве точки на прямой AE выберем точку E. Рассмотрим тетраэдр $EBDT$ и вычислим его объем двумя способами.

$BT = BD = \sqrt{3a^2 + a^2} = 2a$, $B_1D = B_1T = a$, $ED = DT = a\sqrt{3}$, $ET = 3a$.

В треугольнике BDT высота $BH = \sqrt{4a^2 - \frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{13}}{2}$. Значит $S_{BDT} = \frac{1}{2}DT \cdot BH = \frac{a^2\sqrt{39}}{4}$. Тогда

$$V_{EBDT} = \frac{1}{3}S_{BDT} \cdot \sqrt{13} = \frac{13\sqrt{3}a^2}{12}$$

С другой стороны $S_{EDT} = \frac{1}{2}ET \cdot DH_1 = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot \sqrt{3a^2 - \frac{9a^2}{4}} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$ и

$$V_{EBDT} = \frac{1}{3}S_{EDT} \cdot BB_1 = \frac{3a^3}{4}$$

Приравнивая объемы тетраэдра $EBDT$, находим $a = \frac{13\sqrt{3}}{9}$. Тогда $r = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{13}{6}$.

Ответ: $\dfrac{13}{6}$.

8. Обозначим $4-3\sin\alpha=a,\ 2+\cos 2\alpha=b,\ \beta^2+\beta+1=c,\ \sqrt{\beta}+1=d,$ причем $a,b,c,d>0$. Имеем

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}=\left(\frac{a}{b}+\frac{d}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{d}\right)\geqslant 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{a}}+2\sqrt{\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{d}}=2\left(\sqrt{\frac{d}{b}}+\sqrt{\frac{b}{d}}\right)\geqslant 2\cdot 2=4.$$

Знак равенства достигается при

$$\begin{cases}\dfrac{a}{b}=\dfrac{d}{a}\\ \dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{d}\\ \dfrac{d}{b}=\dfrac{b}{d}\end{cases}\iff\begin{cases}a^2=bd\\ c^2=bd\\ b^2=d^2\end{cases}\iff\begin{cases}b=d\\ a=b\\ c=d\end{cases}$$

Переходя к α,β имеем систему

$$\begin{cases}2+\cos 2\alpha=\sqrt{\beta}+1\\ 4-3\sin\alpha=2+\cos 2\alpha\\ \beta^2+\beta+1=\sqrt{\beta}+1\end{cases}\iff\begin{cases}1+\cos 2\alpha=\sqrt{\beta}\\ 2\sin^2\alpha-3\sin\alpha+1=0\\ \beta^2+\beta=\sqrt{\beta}\end{cases}\iff\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2(1-\sin^2\alpha)=\sqrt{\beta}\\ \sin\alpha=1\\ \beta^2+\beta=\sqrt{\beta}\end{cases}\\ \begin{cases}2(1-\sin^2\alpha)=\sqrt{\beta}\\ \sin\alpha=\dfrac{1}{2}\\ \beta^2+\beta=\sqrt{\beta}\end{cases}\end{array}\right.\iff$$

$$\left[\begin{array}{l}\alpha=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ \beta=0, n\in\mathbb{Z}\\ \varnothing\end{array}\right.$$

Ответ: $\alpha=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ \beta=0,\ n\in\mathbb{Z}$.

5 вариант

1. Запишем цепочку сравнений

$$4.5\vee\sqrt{\frac{21}{8}}+\frac{17}{6}\iff\frac{9}{2}-\frac{17}{6}\vee\sqrt{\frac{21}{8}}\iff\frac{5}{3}\vee\sqrt{\frac{21}{8}}\iff$$
$$\iff\frac{25}{9}\vee\frac{21}{8}\iff 2\cdot 8\vee 21\cdot 9\iff 200\vee 189$$

Поскольку $200>189$, то $4.5>\sqrt{\dfrac{21}{8}}+\dfrac{17}{6}$.

Ответ: $4.5>\sqrt{\dfrac{21}{8}}+\dfrac{17}{6}$.

2. Приведем уравнение к виду

$$(x^2-8x+16)(x^2-8x+18)-24=0 \iff (x^2-8x+16)^2+2(x^2-8x+16)-24=0 \iff$$
$$(x^2-8x+17)^2=5^2 \iff \left[\begin{array}{l} x^2-8x+12=0 \\ x^2-8x+22=0 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x_1=2,\ x_2=6 \\ \varnothing \end{array}\right.$$

Ответ: $x_1=2$, $x_2=6$.

3. Пользуясь равносильным переходом, для иррационального уравнения, имеем

$$\sqrt{24}\cos x=\sqrt{11\cos x-\cos 2x} \iff \begin{cases} \cos x\geqslant 0 \\ 24\cos^2 x=11\cos x-\cos 2x \end{cases} \iff \begin{cases} \cos x\geqslant 0 \\ 26\cos^2 x-11\cos x-1=0 \end{cases} \iff$$
$$\iff \begin{cases} \cos x\geqslant 0 \\ \cos x=\dfrac{1}{2},\ \cos x=-\dfrac{1}{13} \end{cases} \iff \cos x=\frac{1}{2} \iff x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in$$

Ответ: $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

4. Запишем систему в виде

$$\begin{cases} y(y+2x)=40x \\ 8x(y+2x)=5y \end{cases}$$

1) Очевидно, пара чисел $(0,\,0)$ является решением системы.
2) При $y+2x=0$ получаем все тоже решение $(0,\,0)$.
3) При $x\neq 0$, $y\neq 0$, $y+2x\neq 0$ поделив первое уравнение системы на второе, получим

$$y^2=64x^2 \iff \left[\begin{array}{l} y=-8x \\ y=8x \end{array}\right.$$

При $y=-8x$ получаем уравнение $6x^2-5x=0$ которое имеет корни $x_1=0$, $x_2=\dfrac{5}{6}$. Так как $x\neq 0$, то находим $y=-\dfrac{20}{3}$.

При $y=8x$ получаем уравнение $2x^2-x=0$ которое имеет корни $x_1=0$, $x_2=\dfrac{1}{2}$. Так как $x\neq 0$, то находим $y=4$.

Итак, система имеет три решения $(0,\,0)$, $\left(\dfrac{5}{6},\,-\dfrac{20}{3}\right)$, $\left(\dfrac{1}{2},\,4\right)$.

Ответ: $(0,\,0)$, $\left(\dfrac{5}{6},\,-\dfrac{20}{3}\right)$, $\left(\dfrac{1}{2},\,4\right)$.

5. Приводя оба логарифма к основанию 5 и применяя метод замены множителя имеем

$$\frac{\log_{25}\left(7-\frac{x}{2}\right)}{\log_{125}(22-x)} \leqslant \frac{3}{4} \iff \frac{\frac{1}{2}\log_5\left(7-\frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{3}\log_5(22-x)} \leqslant \frac{3}{4} \iff \frac{2\log_5\left(7-\frac{x}{2}\right)}{\log_5(22-x)} \leqslant 1 \iff$$

$$\begin{cases} 7-\dfrac{x}{2} > 0 \\ 22-x>0 \\ \dfrac{\log_5\left(7-\frac{x}{2}\right)^2-\log_5(22-x)}{\log_5(22-x)} \leqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x<14 \\ \dfrac{\left(7-\frac{x}{2}\right)^2-(22-x)}{22-x-1} \leqslant 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x<14 \\ \dfrac{x^2-24x+108}{x-21} \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x<14 \\ \dfrac{(x-6)(x-18)}{x-21} \geqslant 0 \end{cases} \iff x \in [6,\, 14)$$

Ответ: $x \in [6,\, 14)$.

6.

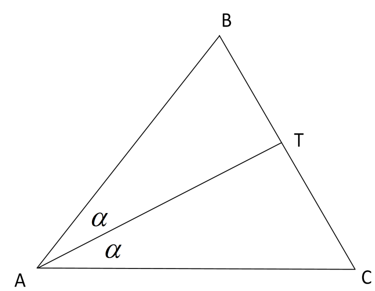


Рис. 1.4:

Пусть $AB=4,\ AC=5,\ AT=a=\dfrac{20}{9}$. По свойству биссектрисы

$$\frac{TC}{TB}=\frac{AC}{AB}=\frac{5}{4} \Rightarrow TC=5x,\ TB=4x$$

Из треугольников ABT и ATC находим

$$BT^2=16x^2=16+a^2-8a\cos\alpha,\ TC^2=25x^2=25+a^2-10a\cos\alpha$$

Деля одно равенство на другое получим

$$\cos\alpha=\frac{9a}{40}=\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha=60^\circ$$

Итак, $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot\sin 120^\circ=5\sqrt{3}$.

Ответ: $5\sqrt{3}$.

7. Приведем уравнение к виду

$$(x+1)^4-(a+3)(x+1)^2+(a+2)^2=0$$

и сделаем замену $(x+1)^2 = t$.

Полученное квадратное уравнение $t^2 - (a+3)t + (a+2)^2 = 0$ должно иметь два положительных корня, для того, чтобы исходное уравнение имело четыре корня. То есть

$$\begin{cases} D > 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \\ t_1 \cdot t_2 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (a+3)^2 - 4(a+2)^2 > 0 \\ a+3 > 0 \\ (a+2)^2 > 0 \end{cases} \iff a \in \left(-\frac{7}{3},\, -2\right) \cup (-2,\, -1)$$

При таких значениях параметра a, корни исходного уравнения будут иметь вид

$$-\sqrt{t_1} - 1,\ -\sqrt{t_2} - 1,\ \sqrt{t_2} - 1,\ \sqrt{t_1} - 1$$

где t_1, t_2 $(t_1 > t_2)$ корни уравнения $t^2 - (a+3)t + (a+2)^2 = 0$.

Эти значения образуют арифметическую прогрессию, если разность между ними есть постоянное число

$$d = \sqrt{t_1} - 1 - (\sqrt{t_2} - 1) = \sqrt{t_2} - 1 - (-\sqrt{t_2} - 1) = -\sqrt{t_2} - 1 - (-\sqrt{t_1} - 1)$$

Отсюда следует, что $\sqrt{t_1} = 3\sqrt{t_2}$ или $t_1 = 9t_2$. Составим по теореме Виета систему

$$\begin{cases} t_1 = 9t_2 \\ t_1 + t_2 = a+3 \\ t_1 \cdot t_2 = (a+2)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} t_1 = 9t_2 \\ 10t_2 = a+3 \\ 9t_2^2 = (a+2)^2 \end{cases} \Rightarrow a_1 = -\frac{11}{7},\ a_2 = -\frac{29}{13}$$

Так как $a_1,\, a_2 \in \left(-\frac{7}{3},\, -2\right) \cup (-2,\, -1)$, то они оба подходят условию задачи.

Ответ: $a_1 = -\frac{11}{7}$, $a_2 = -\frac{29}{13}$.

Замечание. При решении задачи вовсе необязательно находить условие на параметр, при которых квадратное уравнение имеет два положительных корня. Достаточно в конце сделать проверку обоих значений параметра.

8. Так как шестиугольник $ABCDEF$ – правильный, то $\angle ABC = 120^\circ$. Тогда по теореме косинусов $AC = 3\sqrt{3}$. Обозначим боковое ребро пирамиды за a. Тогда $ST = \sqrt{a^2 - \frac{9}{4}}$, $SH = \sqrt{a^2 - \frac{27}{4}}$. По условию

$$\frac{S_{SAC}}{S_{SAB}} = \frac{\sqrt{51}}{\sqrt{19}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AC \cdot SH}{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot ST} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2 - \frac{27}{4}}}{\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{a^2 - \frac{9}{4}}} \Rightarrow a = 3\sqrt{5}$$

Зная боковое ребро находим высоту пирамиды $SO = \sqrt{a^2 - 3^2} = 6$. Тогда

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCDEF} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{9\sqrt{3}}{4} \cdot 6 = 27\sqrt{3}.$$

Ответ: $27\sqrt{3}$.

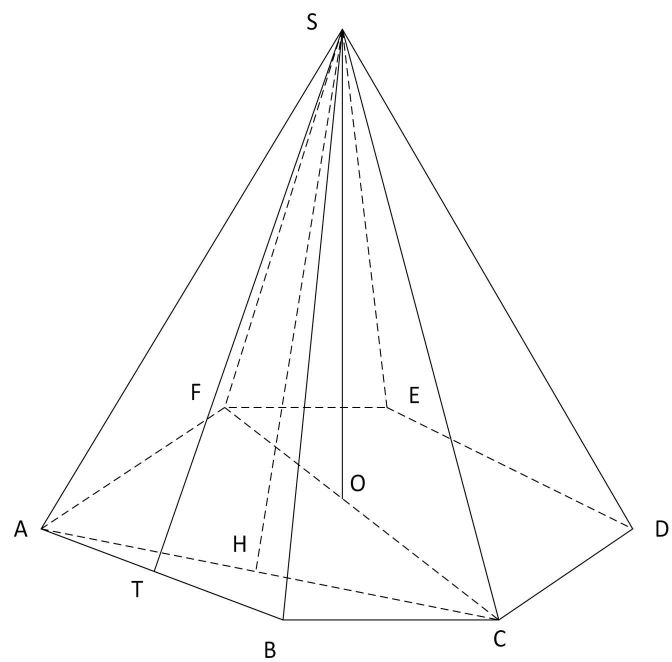


Рис. 1.5:

7 вариант

1. Запишем $f(x)$ в виде
$$f(x) = \frac{\sqrt{25 - x^2}}{5} + \frac{5}{x}$$
тогда $f(3) = \dfrac{\sqrt{25-9}}{5} + \dfrac{5}{3} = \dfrac{4}{5} + \dfrac{5}{3} = \dfrac{37}{15}$.

Ответ: $\dfrac{37}{15}$.

2. Запишем уравнение в виде $5^{2x-1} = 1 - 4 \cdot 5^{x-1}$ и умножим обе части на 5. Имеем
$$5^{2x} + 4 \cdot 5^x - 5 = 0 \iff 5^x = 1 \text{ или } 5^x = -5$$

Второе уравнение корней не имеет. Корнем первого уравнения является $x = 0$.

Ответ: $x = 0$.

3. Воспользовавшись формулой $\sin 4x = 2\sin 2x \cdot \cos 2x$ имеем
$$4\sin^2 x \cdot \sin 2x - 2\sin 2x \cdot \cos 2x = 0 \iff 2\sin 2x(2\sin^2 x - \cos 2x) = 0 \iff$$
$$\iff \sin 2x(1 - 2\cos 2x) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ \cos 2x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z} \\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Ответ: $x = \dfrac{\pi n}{2}$, $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi k$, $n,\ k \in \mathbb{Z}$.

4. Так как $AB = BC$, то $\triangle ABC$ – равнобедренный и $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$. Кроме того, так как четырехугольник $ABCD$ вписанный, то $\angle CDB = \angle ADB = \alpha$ (как углы опирающиеся на одну дугу). Тогда $\triangle ABE \sim \triangle ABD$ (по двум углам), значит

$$\frac{BE}{AB} = \frac{AB}{BD} \Rightarrow BD = \frac{AB^2}{BE} = 3$$

Ответ: 3.

5. Запишем ОДЗ неравенства в виде системы

$$\begin{cases} |x-7| \neq 0 \\ |x-7| \neq 1 \\ x-5>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq 7 \\ x \neq 8 \\ x \neq 6 \\ x > 5 \end{cases}$$

Преобразуем неравенство к виду $\log_{|x-7|}(x-5)^2 - 1 \leqslant 0$ и воспользуемся методом замены множителя.

$$\log_{|x-7|}(x-5)^2 - 1 \leqslant 0 \iff (|x-7|-1)((x-5)^2-1) \leqslant 0 \iff (x-4)(x-6)^2(x-8) \leqslant 0$$

Так как по ОДЗ $x > 5$, $x \neq 6$, то первые два множителя положительные, значит $x \leqslant 8$. Учитывая ОДЗ, имеем $x \in (5,\ 6) \cup (6,\ 7) \cup (7,\ 8)$.

Ответ: $x \in (5,\ 6) \cup (6,\ 7) \cup (7,\ 8)$.

6. Запишем систему в виде

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-2)^2 \leqslant \left(\dfrac{12}{5}\right)^2 \\ \sqrt{(x-2)^2+(y-5)^2} + \sqrt{(x-6)^2+(y-2)^2} \leqslant 5 \end{cases}$$

Первое неравенство системы суть круг с центром в точке $(2,\ 2)$ радиуса $R = \dfrac{12}{5}$.

Рассмотрим второе неравенство системы. Пусть $A(2,\ 5)$, $B(x,\ y)$, $C(6,\ 2)$. Тогда левая часть второго неравенства это сумма расстояний $AB+BC$. Поскольку длина отрезка $AC = \sqrt{(6-2)^2+(2-5)^2}$ 5, то для выполнения неравенства $AB + BC \leqslant 5$ необходимо, чтобы точка B лежала на отрезке AC, иначе по неравенству треугольника будем иметь неравенство $AB+BC > 5$. Таким образом второе неравенство задает отрезок с концами в точках $A(2,\ 5)$, $C(6,\ 2)$. Уравнение прямой проходящей через точки A и C имеемт вид $4y + 3x - 26 = 0$. Таким образом имеем систему

$$\begin{cases} 4y+3x-26=0 \\ (x-2)^2+(y-2)^2 \leqslant \left(\dfrac{12}{5}\right)^2 \\ 2 \leqslant x \leqslant 6 \end{cases}$$

Выражая из первого уравнения полученной системы переменную $y = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{13}{2}$ и подставляя во второе неравенство находим $x = \dfrac{86}{25} \in [2,\ 6]$. Тогда $y = \dfrac{98}{25}$.

Ответ: $\left(\dfrac{86}{25}, \dfrac{98}{25}\right)$.

Замечание. Можно заметить, что расстояние от точки $(2,\,2)$ до прямой $4y + 3x - 26 = 0$ равно

$$\rho = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|4 \cdot 2 + 3 \cdot 2 - 26|}{\sqrt{19 + 9}} = \frac{12}{5} = R$$

Таким образом прямая $4y + 3x - 26 = 0$ касается окружности $(x-2)^2 + (y-2)^2 = \left(\dfrac{12}{5}\right)^2$. Уравнение прямой проходящей через точку $(2,\,2)$ и перпендикулярной прямой $4y+3x-26 = 0$ имеет вид $3y - 4x + 2 = 0$. Решая систему

$$\begin{cases} 4y + 3x - 26 = 0 \\ 3y - 4x + 2 = 0 \end{cases}$$

находим $x = \dfrac{86}{25}$, $y = \dfrac{98}{25}$.

7. Так как все грани пирамиды наклонены под одним углом к плоскости сонования, то высота пирамиды проецируется в центр вписанной в ромб $ABCD$ окружности, то есть в точку пересечения диагоналей ромба (так как диагонали – биссектрисы).

Имеем, $HT \perp BC$ как радиус проведенный в точку касания. Так как HT проекция наклонной ST, то по теореме о трех перпендикулярах $ST \perp BC$ и $\angle STH$ – линейный угол двугранного угла образованного плоскостями ABC и SBC, то есть $\angle STH = 60°$.

Проведем в треугольнике SHT биссектрису TO. Тогда O – центр вписанной в пирамиду сферы, $HO = R$ – ее радиус. Из треугольника OHT, находим $HT = 3$. Высота ромба $DR = 2HT = 6$. Итак, в $\triangle DCR$: $\angle DCR = 30°$, $DR = 6$, тогда $DC = 12$.

Ответ: 12.

Замечание. При решении стереометрических задач будут полезны следующие утверждения:

Если все боковые рёбра пирамиды равны, то:

- вокруг основания пирамиды можно описать окружность, причём вершина пирамиды проецируется в её центр;
- боковые рёбра образуют с плоскостью основания равные углы;
- также верно и обратное, то есть если боковые рёбра образуют с плоскостью основания равные углы, или если около основания пирамиды можно описать окружность, причём вершина пирамиды проецируется в её центр, то все боковые рёбра пирамиды равны.

Если боковые грани наклонены к плоскости основания под одним углом, то:

- в основание пирамиды можно вписать окружность, причём вершина пирамиды проецируется в её центр;
- высоты боковых граней равны;

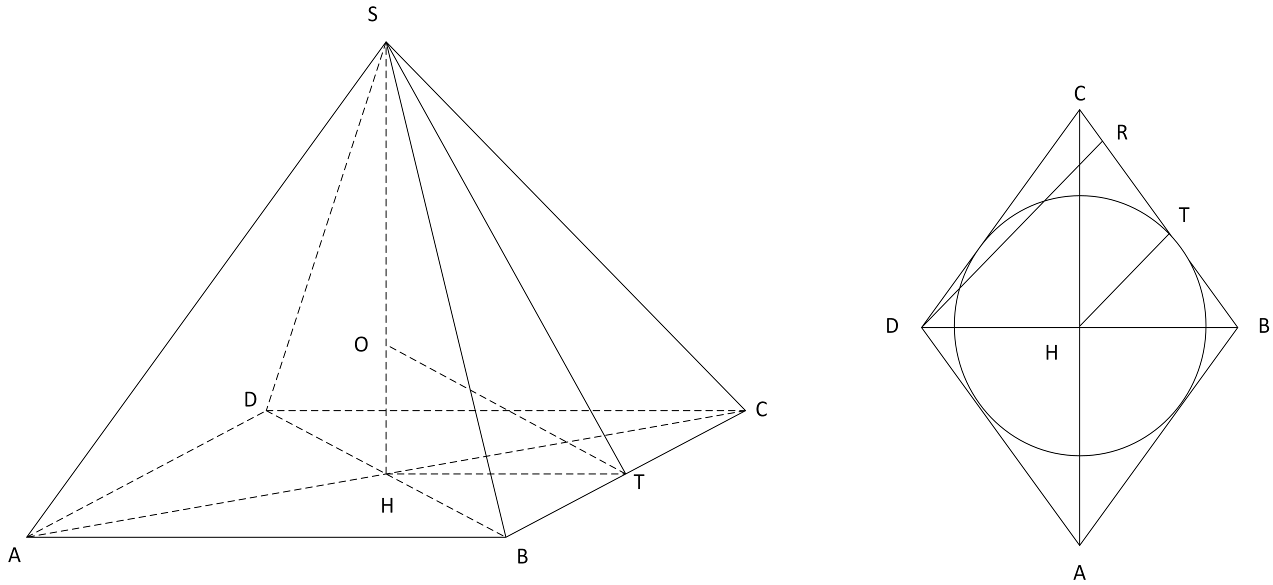


Рис. 1.6:

- площадь боковой поверхности равна половине произведения периметра основания на высоту боковой грани.

Около пирамиды можно описать сферу тогда, когда в основании пирамиды лежит многоугольник, вокруг которого можно описать окружность. Центром сферы будет точка пересечения плоскостей, проходящих через середины ребер пирамиды перпендикулярно им. Из этой теоремы следует, что как около любой треугольной, так и около любой правильной пирамиды можно описать сферу.

В пирамиду можно вписать сферу тогда, когда биссекторные плоскости внутренних двугранных углов пирамиды пересекаются в одной точке. Эта точка будет центром сферы.Биссекторная плоскость – плоскость выходящая из ребра двугранного угла, которая делит его на два равных двугранных угла.

8. Сделаем замену переменной $t = 2\sqrt{2}\sin x$, тогда $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 1 - \dfrac{t^2}{4}$. Так как по условию $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, то $t \in [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$ (так как $y = \sin x$ возрастает на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, принимая все значения от -1 до 1).

Условие задачи выполняется если уравнение $a \cdot e^t = \dfrac{8 - t^2}{4}$ имеет единственное решение на отрезке $[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$. Запишем уравнение в виде

$$a = \frac{8 - t^2}{4e^t}$$

и исследуем функцию $f(t) = \dfrac{8 - t^2}{4e^t}$ на отрезке $[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$.

Имеем, $f'(t) = \dfrac{(t+2)(t-4)}{4e^t}$. Производная функции положительна при $t \in [-2\sqrt{2}, -2)$ и отрицательна при $t \in (-2, 2\sqrt{2}]$, значит $t = -2$ – точка максимума.

Итак, $f(-2\sqrt{2}) = f(2\sqrt{2}) = 0$, $f(-2) = e^2$. И уравнение $a = f(t)$ имеет единственное решение при $a = e^2$.

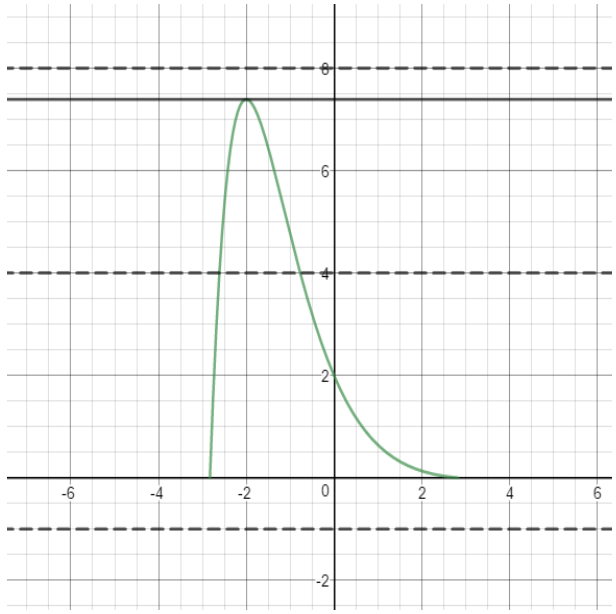


Рис. 1.7:

Ответ: $a = e^2$.

9 вариант

1. Запишем функцию $f(x)$ в виде $f(x) = 5x + \dfrac{1}{5x}$. Тогда $f\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{5}{4} + \dfrac{4}{5} = \dfrac{41}{20}$.

Ответ: $\dfrac{41}{20}$.

2. По теореме обратной Виета, имеем $x_1 + x_2 = -2014$, $x_1 \cdot x_2 = -2015$. Значит $x_1 = -2015$, $x_2 = 1$. Тогда искомая разность равна $|x_1 - x_2| = 2016$.

Ответ: 2016.

3. Сделаем замену переменной $t = \sin x + \cos x$, $t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Тогда $\sin 2x = t^2 - 1$ и уравнение примет вид $t^2 + t - 2 = 0$. Корни квадратного уравнения суть $t_1 = 1$, $t_2 = -2 \notin [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Итак имеем уравнение

$$\sin x + \cos x = 1 \iff \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \left[\begin{array}{l} x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Ответ: $x = 2\pi n$, $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$.

4. Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+4x}+\sqrt{12+4x-x^2}\neq 0 \\ x^2+4x\geqslant 0 \\ 12+4x-x^2\geqslant 0 \\ 4^{x^2}-16^{4x-8}>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+4x\geqslant 0 \\ x^2-4x-12\leqslant 0 \\ x^2-(8x-16)>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x(x+4)\geqslant 0 \\ (x+2)(x-6)\leqslant 0 \\ (x-4)^2>0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x(x+4)\geqslant 0 \\ (x+2)(x-6)\leqslant 0 \\ x\neq 4 \end{cases} \iff x\in[0,\,4)\cup(4,\,6]$$

Ответ: $x\in[0,\,4)\cup(4,\,6]$.

5. Обозначим $CT=CE=EF=a$, $AT=AL=b$, $FD=DN=c, BN=BR=d$, $LD=a+c$, $CR=2a$. Так как $\triangle ACD$ и $\triangle CDB$ имеют общую высоту, то $S_{ACD}=\dfrac{1}{2}AD\cdot h$, $S_{CDB}=\dfrac{1}{2}BD\cdot h$ и

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CDB}}=\frac{AD}{BD}=\frac{a+b+c}{c+d} \tag{1.1}$$

С другой стороны, так как радиусы вписанных окружностей равны, то $S_{ACD}=p_1r$, $S_{CDB}=p_2r$, где $p_1=2a+b+c$ и $p_2=2a+c+d$ полупериметры треугольников ACD и CDB соответсвенно. Имеем

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CDB}}=\frac{p_1}{p_2}=\frac{2a+b+c}{2a+c+d} \tag{1.2}$$

Приравнивая (1.1) и (1.2) получаем

$$\frac{a+b+c}{c+d}=\frac{2a+b+c}{2a+c+d}\Rightarrow d=2a+2b+c$$

Итак, $AD=a+b+c$, $BD=c+d=2a+2b+2c=2AD$. Значит $AD:DB=1:2$.

Ответ: $1:2$.

6. Обозначим v_1 и v_2 скорость Ираиды и Ираклия соответсвенно, S – растояние между домом и магазином, а x – расстояние от дома до места встречи. Ираклий прошел расстояние $2x+S$, а Ираида S. Так как Ираклий прошел в два раза больше расстояние, то $2x+S=2S$, откуда $S=2x$. Значит они встретились на середине пути.

После встречи на середине пути Ираклий прошел расстояние $\dfrac{3S}{2}$ за 7.5 минуты, а Ираида $\dfrac{S}{2}$ за тоже время. Значит скорость Ираклия в 3 раза больше скорости Ираиды, то есть $v_2=3v_1$.

Пусть Ираклий вышел через t минут после Ираиды. Тогда в пути он был $15-t$ минут и прошел он $(15-t)v_2$. Так как он прошел в 2 раза больше Ираиды, то

$$(15-t)v_2=30v_1\Rightarrow t=5$$

Ответ: через 5 минут.

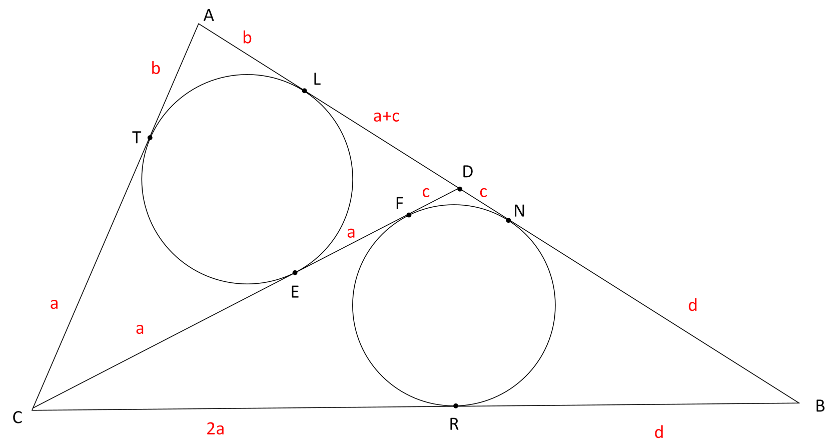


Рис. 1.8:

7.

8. Очевидно $x,\ y \in \left(0,\ \dfrac{\pi\sqrt{5}}{6}\right)$. Перейдем в первом уравнении системы к новому основанию и запишем его в виде

$$\log_{\sin x}\cos y = \log_{\cos x}\sin y \iff \frac{\ln\cos y}{\ln\sin x} = \frac{\ln\sin y}{\ln\cos x} \iff \frac{\ln\cos y}{\ln\sin x} = \frac{\ln\sqrt{1-\cos^2 y}}{\ln\sqrt{1-\sin^2 x}} \iff$$
$$\iff \frac{\ln(1-\sin^2 x)}{\ln\sin x} = \frac{\ln(1-\cos^2 y)}{\ln\cos y} \iff f(\sin x) = f(\cos y)$$

где $f(t) = \dfrac{\ln(1-t^2)}{\ln t}$, $t \in (0,\ 1)$.

Производная функции имеет вид

$$f'(t) = -\frac{\dfrac{2t\ln t}{1-t^2} + \dfrac{\ln(1-t^2)}{t}}{\ln^2 t}$$

Так как $t \in (0,\ 1)$, то $1 - t^2 \in (0,\ 1) \Rightarrow \ln t < 0$, $\ln(1-t^2) < 0$, значит $f'(t) > 0$ и функция $f(t)$ возрастает. Значит $f(\sin x) = f(\cos y) \iff \sin x = \cos y$. Итак, имеем систему

$$\begin{cases} \sin x = \cos y \\ x^2 + y^2 = \dfrac{5\pi^2}{36} \\ 0 < x,\ y < \dfrac{\pi\sqrt{5}}{6} \end{cases} \iff \begin{cases} \sin x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - y\right) \\ x^2 + y^2 = \dfrac{5\pi^2}{36} \\ 0 < x,\ y < \dfrac{\pi\sqrt{5}}{6} \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2} \\ x^2 + y^2 = \dfrac{5\pi^2}{36} \\ 0 < x,\ y < \dfrac{\pi\sqrt{5}}{6} \end{cases} \iff \left[\begin{aligned} &\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} \\ y = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \\ &\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} \\ y = \dfrac{\pi}{6} \end{cases} \end{aligned}\right.$$

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{3}\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{6}\right)$.

Ответы к вариантам 2 – 4

Вариант 2. **1.** 3. **2.** 85. **3.** $x \in \left[-\dfrac{13\pi}{12} + 2\pi n,\ -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n\right] \cup \left[\dfrac{7\pi}{12} + 2\pi n,\ \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}$. **4.** $x = -\dfrac{3}{4}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{-3+\sqrt{41}}{8}$. **5.** $3 \pm \sqrt{7}$. **6.** 2 км. **7.** $\dfrac{15}{2}$. **8.** $x = 2\pi n\,(n \in \mathbb{Z})$, $y = 0$.

Вариант 3. **1.** 2. **2.** 70. **3.** $x \in \left[\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ \dfrac{17\pi}{12} + 2\pi n\right] \cup \left[-\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n,\ \dfrac{\pi}{12} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}$. **4.** $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{2}, \sqrt{\dfrac{2+\sqrt{7}}{3}}$. **5.** $\sqrt{3} \pm \sqrt{2}$. **6.** 20 км. **7.** 6. **8.** $\alpha = 2\pi n\,(n \in \mathbb{Z})$, $\beta = 0$.

Вариант 4. **1.** 1. **2.** 92. **3.** $x \in \left[-\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ \dfrac{\pi}{12} + 2\pi n\right] \cup \left[\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n,\ \dfrac{5\pi}{12} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}$. **4.** $x = -\dfrac{4}{5}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{-2+\sqrt{14}}{5}$. **5.** $3 \pm \sqrt{7}$. **6.** 900 м. **7.** $\dfrac{14}{5}$. **8.** $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\,(n \in \mathbb{Z})$, $y = 0$.

2014 год

Вариант 1

1. Выделяя полный квадрат под корнем, имеем

$$\sqrt{7-4\sqrt{3}}\left(8+4\sqrt{3}\right) = \sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}\left(8+4\sqrt{3}\right) = 4\left|2-\sqrt{3}\right|\left(2+\sqrt{3}\right) = 4\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right) =$$
$$= 4\left(2^2-3\right) = 4.$$

Ответ: 4.

2. Преобразуем функцию к виду

$$y = -\log_2\left((x-3)^2+8\right)$$

Так как $(x-3)^2+8 \geqslant 8$, а функция $y = \log_2 t$ – возрастает, то $\log_2\left((x-3)^2+8\right) \geqslant \log_2 8 = 3$, значит $y = -\log_2\left((x-3)^2+8\right) \leqslant -3$.

Итак, наибольшее значение функции $y = -\log_2\left((x-3)^2+8\right)$ равно -3 и достигается оно при $x = 3$.

Ответ: -3.

3. Прологарифмируем обе части неравенства по основанию e

$$\ln x^{3x+7} > \ln x^{12} \iff (3x+7)\ln x > 12\ln x \iff (3x+7-12)\ln x > 0 \iff$$
$$\begin{cases} x > 0 \\ (x-1)(3x-5) > 0 \end{cases} \iff x \in (0,1) \cup \left(\tfrac{5}{3}, +\infty\right)$$

Ответ: $x \in (0,1) \cup \left(\tfrac{5}{3}, +\infty\right)$

Замечание: Можно воспользоваться равносильным переходом

$$a(x)^{f(x)} > a(x)^{g(x)} \iff \begin{cases} a(x) > 0 \\ (a(x)-1)(f(x)-g(x)) > 0 \end{cases}$$

4. Преобразуем уравнение $\cos^2 x - \cos x \sin^2\left(\frac{5x}{4} - \frac{5\pi}{12}\right) + \frac{1}{4} = 0$ к виду

$$\left(\cos x - \frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{5x}{4} - \frac{5\pi}{12}\right)\right)^2 + \frac{1}{4}\left(1 - \sin^4\left(\frac{5x}{4} - \frac{5\pi}{12}\right)\right) = 0$$

Так как каждое из слагаемых неотрицательно, то равенство возможно, когда обо слагаемых раны нулю одновременно:

$$\begin{cases} \cos x - \frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{5x}{4} - \frac{5\pi}{12}\right) = 0 \\ 1 - \sin^4\left(\frac{5x}{4} - \frac{5\pi}{12}\right) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{5x}{4} - \frac{5\pi}{12}\right) \\ \sin^2\left(\frac{5x}{4} - \frac{5\pi}{12}\right) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \sin^2\left(\frac{5x}{4} - \frac{5\pi}{12}\right) = 1 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos\left(\frac{5x}{4} - \frac{5\pi}{12}\right) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{5x}{4} - \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{11\pi}{15} + \frac{4\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff$$

$$x = \tfrac{\pi}{3} + 2\pi + 4\pi n = \tfrac{7\pi}{3} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \frac{7\pi}{3} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Замечание. Учитывая, что $\cos x \neq 0$, и деля на него получаем уравнение

$$\sin^2\left(\frac{5x}{4} - \frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{1/2} + \frac{1/2}{\cos x}\right)$$

Очевидно $\cos x > 0$, иначе правая часть отрицательна. При $\cos x > 0$ по неравенству между средним геометрическим и среднем арифметическим правая часть не меньше 1, в то время как левая часть не больше 1, значит равенство достигается когда обе части одновременно равны 1. Получаем ту же систему, что и выше.

5.

$CB_1 = CA = CB_2$ – как отрезки касательных проведенных из одной точки. Четырехугольники O_1B_1CA и O_2B_2CA – дельтоиды, значит CO_1 и CO_2 – биссектрисы. Пусть $\angle B_1O_1A = 2\alpha$, $\angle B_2O_2A = 2\beta$. Тогда сумма углов четырехугольника $O_1B_1B_2O_2$ равна $180^\circ + 2(\alpha+\beta) = 360^\circ$. Значит $\alpha + \beta = 90^\circ$.

По условию $CO_1 = CD_1$, то есть треугольник CO_1D_1 – равнобедренный и $\angle CO_1D_1 = \angle CD_1O_1 = \alpha$. Так как CL – биссектрисса, то $\angle ACL = \frac{1}{2}\angle ACO_2 = \frac{1}{2}(90^\circ - \beta) = \frac{\alpha}{2}$ (так как $\alpha + \beta = 90^\circ$).

В треугольнике O_1D_1L сумма углов равна $2\alpha + \alpha + 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 180^\circ$. Значит $\alpha = 36^\circ$. Но тогда $\angle D_1O_1O_2 = 2\alpha = 72^\circ$ и $\angle D_1LO_1 = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 72^\circ$, то есть треугольник D_1O_1L – равнобедренный и $D_1O_1 = D_1L$.

Треугольники D_1O_1L и D_2O_2L подобны по двум углам, значит $LD_2 : O_2D_2 = D_1L : D_1O_1 = 1 : 1$.

Ответ: $1 : 1$.

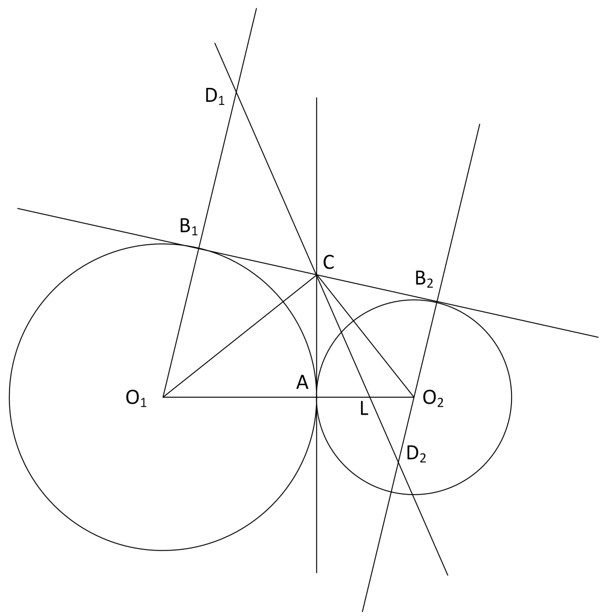


Рис. 1.9:

6. Имеем систему

$$\begin{cases} x^{\frac{3}{2}} + y = 16 \\ x + y^{\frac{2}{3}} = 8 \end{cases}$$

Обозначим $x^{1/2} = a, y^{1/3} = b, a, b > 0$. Тогда система примет вид

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = 16 \\ a^2 + b^2 = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} (a+b)\left((a+b)^2 - 3ab\right) = 16 \\ (a+b)^2 - 2ab = 8 \end{cases}$$

Сделаем еще раз замену: положим $a + b = u, ab = v, u, v > 0$, получим систему

$$\begin{cases} u(u^2 - 3v) = 16 \\ u^2 - 2v = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} u^3 - 24u + 32 = 0 \\ v = \dfrac{u^2}{2} - 4 \end{cases} \iff \begin{cases} (u-4)(u^2 + 4u - 8) = 0 \\ v = \dfrac{u^2}{2} - 4 \end{cases} \iff \begin{cases} (u-4)(2v + 4u) = \\ v = \dfrac{u^2}{2} - 4 \end{cases}$$

Учитывая, что $u, v > 0$, получаем единственное решение системы

$$\begin{cases} u = 4 \\ v = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b = 4 \\ ab = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4 \\ y = 8 \end{cases}$$

Ответ: $x = 4, y = 8$.

7. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ – основания призмы, AA_1, BB_1, CC_1 – ее боковые ребра (см. рисунок 5). Поскольку все пары скрещивающихся диагоналей боковых граней переходят друг в друга при помощи поворотов относительно оси симметрии призмы и симметрий относительно верктикальных плоскостей симметрии, не ограничивая общности, можно взять диагонали AB_1 и BC_1.

Проведем в плоскости (ABB_1) прямую $BT \parallel AB_1$. Тогда $ABTB_1$ – параллелограмм и $B_1T = AB$. Прямая $AB_1 \parallel (BTC_1)$, значит расстояние между прямыми AB_1 и BC_1 есть расстояние от любой точки прямой AB_1 до плоскости (BTC_1). В качестве точки на прямой AB_1 выберем B_1. Рассмотрим тетраэдр B_1C_1TB и найдем его объем двумя способами.

$$V_{B_1C_1TB} = \frac{1}{3}S_{B_1C_1T} \cdot BB_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot B_1C_1 \cdot B_1T \sin 120^\circ \cdot BB_1 = \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

С другой стороны $V_{B_1C_1TB} = \dfrac{1}{3}S_{BTC_1} \cdot h$, где h – искомое расстояние от точки B_1 до плоскости (BTC_1). В треугольнике B_1C_1T по теореме косинусов, находим $C_1T = \sqrt{3}$. Так же имеем $BT = AB_1 = BC_1 = \sqrt{3}$.

Итак, треугольник BTC_1 – равносторонний и его площадь равна $S_{BTC_1} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$. Тогда

$$V_{B_1C_1TB} = \frac{1}{3}S_{BTC_1} \cdot h = \frac{\sqrt{3}h}{4} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \iff h = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

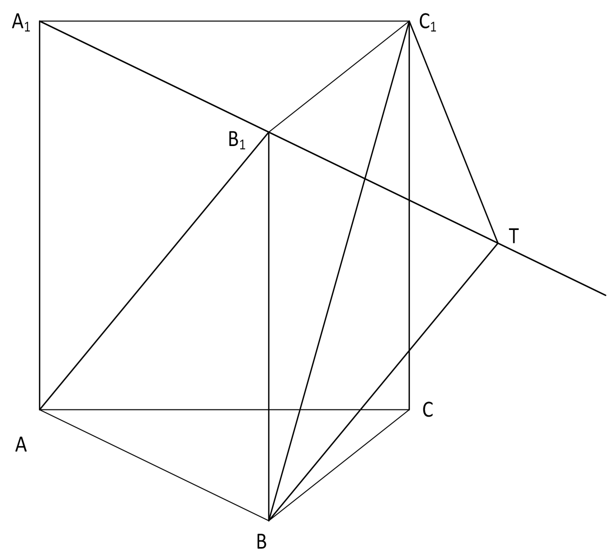


Рис. 1.10:

8. Искомое множество совпадает с множеством значений a, при которых разрешима относительно x, y совокупность уравнений

$$\left[\begin{array}{l} a = \sqrt{-6x^2 - 14y^2 - 18xy + 6} + y \\ a = -\sqrt{-6x^2 - 14y^2 - 18xy + 6} + y \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} a - y = \sqrt{-6x^2 - 14y^2 - 18xy + 6} \\ a - y = -\sqrt{-6x^2 - 14y^2 - 18xy + 6} \end{array}\right.$$

Эта совокупность равносильна уравнению

$$(a-y)^2 = -6x^2 - 14y^2 - 18xy + 6$$

То есть уравнению

$$6x^2 + 18xy + (a-y)^2 + 14y^2 + 6 = 0$$

Уравнение является квадратным относительно x, поэтому имеет решение в случае неотрицательности дискриминанта

$$D = 324y^2 - 24((a-y)^2 + 14y^2 + 6) \geqslant 0$$

Перепишем это неравенство в виде

$$3y^2 - 4ay + 2a^2 - 12 \leqslant 0$$

Такое квадратное неравенство относительно y имеет решение если дискриминант квадратного уравнение неотрицателен. То есть, когда

$$D = 16a^2 - 12(2a^2 - 12) \geqslant 0 \iff a^2 \leqslant 18$$

Итак, $a \in [-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$.

Ответ: $[-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$.

Ответы к вариантам 2 – 4

Вариант 2. 1. 1. **2.** -3. **3.** $x \in (0,1) \cup \left(\frac{5}{3}, +\infty\right)$. **4.** $x = \frac{9\pi}{4} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$. **5.** 4. **6.** $x = \frac{\pi}{3}, y = \frac{\pi}{6}$. **7.** $\sqrt{7}/6$. **8.** $\left[-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right]$.

Вариант 3. 1. 8. **2.** -2. **3.** $x \in \left(0, \frac{4}{5}\right) \cup (1, +\infty)$. **4.** $x = \frac{13\pi}{6} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$. **5.** 1 : 1. **6.** $x = 27, y = 9$. **7.** $\sqrt{3}/2$. **8.** $\left[-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3}\right]$.

Вариант 4. 1. 3. **2.** -2. **3.** $x \in (0,1) \cup \left(\frac{9}{7}, +\infty\right)$. **4.** $x = \frac{9\pi}{4} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$. **5.** 1. **6.** $x = \arcsin(1/3), y = \arccos(1/3)$. **7.** $\sqrt{3}/4$. **8.** $\left[-2\sqrt{5}, 2\sqrt{5}\right]$.

2013 год

Вариант 1

1. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$. По условию $a = 2, f(0) = c = 3$, значит $f(x) = 2x^2 + bx + 3$. По теореме Виета имеем

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{3}{2}$$

Так как $x_1 = \dfrac{5}{2}$, то $x_2 = \dfrac{3}{5}$.

Ответ: $\dfrac{3}{5}$.

2. $\log_{12} 3 \cdot \log_9 12 = \log_{12} 3 \cdot \log_{3^2} 12 = \dfrac{1}{2} \cdot \log_{12} 3 \cdot \log_3 12 = \dfrac{1}{2}$.

Ответ: $\dfrac{1}{2}$.

3. Обозначим $5^{\frac{x}{2}} = t$, $t > 0$. Тогда $5^x = t^2$, $5^{2x} = t^4$. С учетом замены неравенство прмиет вид

$$
\begin{aligned}
&9\left(1+\frac{5}{t^4}\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left(t^4+5\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant \sqrt{6}t \iff \\
&9\left(\frac{t^4}{t^4+5}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left(t^4+5\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant \sqrt{6}t \iff \\
&\frac{9t^2}{\sqrt{t^4+5}} - \frac{1}{2}\sqrt{t^4+5} \geqslant \sqrt{6}t
\end{aligned}
$$

Разделим обе части неравенства на $t > 0$.

$$\frac{9t}{\sqrt{t^4+5}} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{t^4+5}}{t} \geqslant \sqrt{6}$$

Обозначим $\frac{t}{\sqrt{t^4+5}} = a$, $a > 0$, получим неравенство

$$9a - \frac{1}{2a} \geqslant \sqrt{6} \iff 18a^2 - 2\sqrt{6}a - 1 \geqslant 0 \iff a \geqslant \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Возвращаясь к переменной t имеем нервенство

$$\frac{t}{\sqrt{t^4+5}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{6}} \iff \sqrt{6}t \geqslant \sqrt{t^4+5} \iff t^4 - 6t^2 + 5 \leqslant 0 \iff 1 \leqslant t^2 \leqslant 5$$

Возвращаясь к переменной x имеем неравенство

$$1 \leqslant 5^x \leqslant 5 \iff 0 \leqslant x \leqslant 1$$

Ответ: $x \in [0, 1]$.

4. Приведем дроби к общему знаменателю в обоих частях уравнения

$$\frac{\sin 5x \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos 5x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{\sin x \cdot \cos 5x - \sin 5x \cdot \cos x}{\sin 5x \cdot \cos 5x}$$

Преобразуем обе части уравнения при помощи формул синус разности двух углов и синус двойного угла

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sin 4x}{0.5\sin 2x} = -\frac{\sin 4x}{0.5\sin 10x} \iff \\
&\sin 4x\left(\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 10x}\right) = 0 \iff \\
&\frac{\sin 4x(\sin 10x + \sin 2x)}{\sin 2x \sin 10x} = 0
\end{aligned}
$$

Преобразуем сумму синусов в произведение

$$\frac{\sin 4x \sin 6x \cos 4x}{\sin 2x \sin 10x} = 0$$

Еще раз воспользуемся формулой для синуса двойного угла

$$\frac{\sin 6x \sin 8x}{\sin 2x \sin 10x} = 0$$

Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin 6x = 0 \\ \sin 8x = 0 \end{array}\right. \\ \sin 2x \neq 0 \\ \sin 10x \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin 6x = 0 \\ \sin 8x = 0 \end{array}\right. \\ \sin 10x \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi n}{6}, n \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{\pi k}{8}, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \\ x \neq \dfrac{\pi m}{10}, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Из решений уравнения необходимо исключить n – делящиеся на 3, k – делящиеся на 4.

Ответ: $x = \dfrac{\pi n}{6}, n \in \mathbb{Z} \setminus 3\mathbb{Z}, x = \dfrac{\pi k}{8}, k \in \mathbb{Z} \setminus 4\mathbb{Z}$.

5. Исходя из условия задачи катер «Смелый» прошел некоторый путь S сначала против течения реки, а затем обратно по течению реки. Обратный путь его занял 4 мин (с 14.14 до 14.18), тогда его скорость равна $\dfrac{S}{4}$ м/мин по течению реки.

Катер «Быстрый» прошел путь $500 + S$ метров по течению реки и обратно, и потратил на это 18 минут (с 14.00 до 14.18). На обратном пути для прохождения последних 500 метров он потратил 4 минуты, это при движении против течения реки (с 14.14 до 14.18), значит, скорость против течения реки составила $\dfrac{500}{4} = 125$ м/мин.

Тогда время за которой катер «Быстрый» пройдет 500 метров по течению реки равно

$$\frac{500}{\frac{S}{4}} = \frac{2000}{S} \text{ минут}$$

Путь S по течению реки он прошел за 4 минуты (одинаковые скорости с катером «Смелый»). Итого, время движения его по течению реки равно $\dfrac{2000}{S} + 4$ минут.

В обратную сторону 500 метров он прошел за 4 минуты, а путь S за $\dfrac{S}{125}$ минут. Того, время движения против течения реки равно $\dfrac{S}{125} + 4$ минут. Имеем уравнение

$$\frac{2000}{S} + 4 + \frac{S}{125} + 4 = 18 \iff S_1 = 250,\ S_2 = 1000$$

Значение $S = 250$, условию задачи не удовлетворяет, так как скорость по течению реки больше, чем скорость против течения, а тут $\dfrac{S}{4} = \dfrac{125}{2} < 125$.

Итак, весь путь из Верхнего в Нижнее составил $500 + 500 + 1000 = 2000$ м $=$ 2 км.

Ответ: 2 км.

6.

Из того, что трапеция вписанна в окружность следует, что она равнобокая. Так как по условию $\cos \angle CAD = \dfrac{3}{4}$, то $\sin \angle CAD = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$, $\operatorname{tg} \angle CAD = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$.

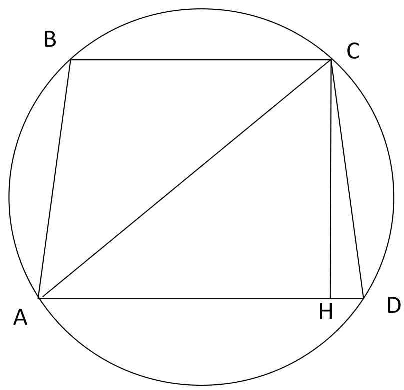


Рис. 1.11:

Треугольник ACD вписан в окружность радиуса $R = 12$. По теореме синусов имеем

$$\frac{CD}{\sin\angle ACD} = 2R \Rightarrow CD = 6\sqrt{7}$$

Так как трапеция $ABCD$ описанна около окружности, то $BC + AD = AB + CD = 12\sqrt{7}$. Проведем высоту CH. Тогда $AH = \dfrac{BC + AD}{2} = 6\sqrt{7}$. Из треугольника ACH находим $CH = AH \cdot \operatorname{tg}\angle CAD = 14$.

Итак, высота трапеции равна 14, значит радиус вписанной окружности равен $r = 7$.

Ответ: $r = 7$.

7.

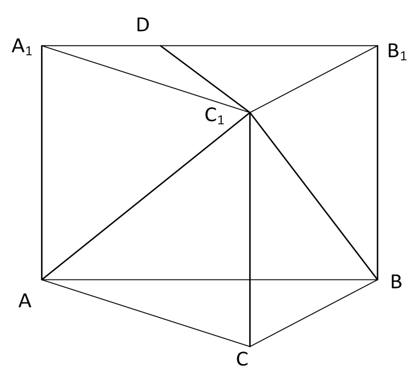


Рис. 1.12:

Обозначим объем тетраэдра C_1ABD, площадь его поверхности и радиус вписанной в него сферы за V, S, r. Тогда верна формула

$$V = \frac{1}{3}Sr$$

Объем тетраэдра C_1ABD найдем как разность

$$V_{C_1ABD} = V_{ABCA_1B_1C_1} - V_{BC_1B_1D} - V_{C_1ABC} - V_{AC_1DA_1} = \frac{1}{6}$$

Итак, $r = \dfrac{1}{2S}$. Найдем площади боковых граней. Имеем

AC_1D: $AC_1 = AB = \sqrt{1^2+1^2=\sqrt{2}}$, $A_1D = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$, $AD = \sqrt{1+\dfrac{2}{9}} = \dfrac{\sqrt{11}}{3}$. Так как $\angle C_1A_1B_1 = 4^\circ$, то по теореме косинусов

$$C_1D = \sqrt{1^2+\frac{2}{9}-2\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\cos 45^\circ} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Из треугольника AC_1D находим $\cos\angle C_1AD = \dfrac{4}{\sqrt{22}}$, $\sin\angle C_1AD = \sqrt{\dfrac{3}{11}}$. Тогда

$$S_{AC_1D} = \frac{1}{2}AC_1\cdot AD\cdot\sin\angle C_1AD = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Аналогично, находим $S_{BC_1D} = \dfrac{1}{2}$, $S_{C_1AB} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $S_{DAB} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Итак, площадь полной поверхности тетраэдра C_1ABD равна $S = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3}{2}}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Тогда

$$r = (2S)^{-1} = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}+1+\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{-1}$$

Ответ: $r = \left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}+1+\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{-1}$.

Замечание. Вывод формулы $V = Sr$ достаточно прост. Соединим центр сферы O с вершинами тетраэдра A, B, C, D. Образуется 4 меньших тетраэдра $OABD$, $OBCD$, $OACD$, $OABC$. Поскольку сфера касается каждой грани, то радиус сферы проведенный в точку касания перпендикулярен каждой грани, то есть является высотой соответсвующего тетраэра. Имеем

$$V_{DABC} = V_{OABD}+V_{OBCD}+V_{OACD}+V_{OABC} = \frac{1}{3}(S_{ABD}+S_{BCD}+S_{ACD}+S_{ABC})r = \frac{1}{3}Sr$$

Следует заметить, что формула верна для любого описанного около сферы многогранника.

8. Заметим, что $x\in[-2;0)$. Пусть $a=0$, тогда уравнение примет вид $\sin x = x+1$. Такое уравнение имеет единственное решение, значит значение $a=0$ не удовлетворяет условию задачи.

Пусть $a\neq 0$, тогда исходное уравнение равносильно совокупности

$$\sin\left(x+\frac{a}{x}\right) = x+1 \iff \left[\begin{array}{l} x+\dfrac{a}{x} = \arcsin(x+1)+2\pi n, n\in\mathbb{Z} \\ x+\dfrac{a}{x} = \pi-\arcsin(x+1)+2\pi k, k\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Рассмотрим первое уравнение совокупности и покажем что оно имеет бесконечно много решений.

$$x+\frac{a}{x} = \arcsin(x+1)+2\pi n, n\in\mathbb{Z} \iff x+\frac{a}{x}-\arcsin(x+1) = 2\pi n, n\in\mathbb{Z}$$

Введем функцию $f(x) = x + \dfrac{a}{x} - \arcsin(x+1)$. При $a > 0$ и $x \to 0$, функция $f(x) \to -\infty$, то есть является не ограниченной и принимает значения кратные 2π $(n < 0)$ бесконечно много раз. То есть уравнение $f(x) = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ имеет бесконечно много решений.

Аналогично, при $a > 0$ и $x \to 0$, функция $f(x) \to +\infty$, то есть является не ограниченной и принимает значения кратные 2π $(n > 0)$ бесконечно много раз.

Таким образом, уравнение $x + \dfrac{a}{x} = \arcsin(x+1) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ при $a \neq 0$ имеет бесконечно много решений. Аналогичные рассуждения верны и для второго уравнения совокупности.

Итак, уравнение $\sin\left(x + \dfrac{a}{x}\right) = x + 1$ имеет бесконечно много решений при $a \neq 0$.

Ответ: $a \neq 0$.

Замечание. Приведем решение из официального критерия.

Перепишем данное уравнение в виде системы

$$\begin{cases} t = x + \dfrac{a}{x} \\ \sin t = x + 1 \end{cases} \tag{1.3}$$

Исключая из этой системы переменную x, получаем еще одно уравнение

$$t = \sin t - 1 + \frac{a}{\sin t - 1} \tag{1.4}$$

Существует взаимно однозначное соответствие между решениями уравнения (1.4) и решениями системы (1.3). Точно так же каждому решению системы (1.3) соответствует единственное решение данного в условии задачи уравнения и наоборот, каждому решению данного уравнения соответствует единственное решение системы (1.3). Таким образом, множество решений данного уравнения будет бесконечным в том и только в том случае, когда бесконечно множество решений уравнения (1.4). Это уравнение можно переписать в виде

$$t + 1 - \sin t - \frac{a}{\sin t - 1} = 0 \tag{1.5}$$

Рассмотрим функцию $f(t) = t + 1 - \sin t$. Она определена и непрерывна на всей числовой прямой. Ее производная $f'(t) = 1 - \cos t$ неотрицательна и обращается в нуль в точках вида $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Отсюда следует, что $f(t)$ монотонно возрастает на каждом отрезке $[2\pi n, 2\pi(n+1)]$, $n \in \mathbb{Z}$, и, значит, $f(t)$ монотонно возрастает на всей числовой прямой. Из неравенств $t \leq f(t) \leq t + 2$ следует, что множество значений этой функции составляет всю числовую прямую.

Пусть $a = 0$. Тогда уравнение (1.5) принимает вид $f(t) = 0$. Учитывая монотонность функции $f(t)$ и тот факт, что множество ее значений совпадает с числовой прямой, заключаем, что уравнение (1.5) имеет единственное решение. Значит, $a = 0$ не удовлетворяет условию задачи.

Пусть $a < 0$. На промежутке $\left[\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$ при любом целом k функция $\sin t$ монотонно убывает от 1 до -1. Поэтому функция $\dfrac{1}{\sin t - 1}$ на том же промежутке возрастает от $-\infty$ до $-\dfrac{1}{2}$, а функция $-\dfrac{a}{\sin t - 1}$ монотонно возрастает от $-\infty$ до $\dfrac{a}{2}$. Являясь суммой двух возрастающих функций, левая часть уравнения (1.5) также возрастает на отрезке

$\left[\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ \dfrac{3\pi}{2}+2\pi k\right]$ от $-\infty$ до $\dfrac{3\pi}{2}+2\pi k+2+\dfrac{a}{2}$. Значит, при любом целом $k>\dfrac{|a|}{4\pi}$ левая часть уравнения (1.5) принимает на интервале $\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ \dfrac{3\pi}{2}+2\pi k\right)$ как отрицательные, так и положительные значения. Поскольку она непрерывна на этом интервале, заключаем, что в какой-то из точек этого интервала она обращается в нуль, то есть на этом интервале уравнение (1.5) имеем решение. Но тогда множества решений уравнения (1.5) и данного уравнения бесконечны.

Пусть $a>0$. В этом случае рассуждения проходят так же как и в предыдущем. На промежутке $\left[-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ \dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right]$ при любом целом k функция $\sin t$ монотонно возрастает от -1 до 1. Поэтому функция $\dfrac{1}{\sin t-1}$ на том же промежутке убывает от $-\dfrac{1}{2}$ до $-\infty$, а функция $-\dfrac{a}{\sin t-1}$ монотонно возрастает от $\dfrac{a}{2}$ до $+\infty$. Являясь суммой двух возрастающих функция, левая часть уравнения (1.5) так же возрастает на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ \dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right]$ от $-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k+2+\dfrac{a}{2}$ до $+\infty$. Значит, при любом целом $k<-\dfrac{a}{4\pi}-\dfrac{1}{\pi}$ левая часть уравнения (1.5) принимает на интервале $\left(-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ \dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right)$ как отрицательные, так и положительные значения. Поскольку она непрерывна на этом интервале, заключаем, что в какой-то из точек этого интервала она обращается в нуль, то есть на этом интервале уравнение (1.5) имеет решение. Но тогда множество решений уравнения (1.5) и данного уравнения бесконечны.

Замечание. Предполагается, что соображениями непрерывности и теоремой и промежуточном значении непрерывной функции можно пользоваться без доказательства.

Вариант 5

1. Так как $b=7$, то можем записать $f(x)=ax^2+7x+c$.

По условию $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{11}{3}$, значит $\dfrac{1}{9}a+\dfrac{7}{3}+c=\dfrac{11}{3}\Longrightarrow\dfrac{1}{9}a+c=\dfrac{4}{3}$.

Итак, $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{9}a-\dfrac{7}{3}+c=-1$.

Ответ: -1.

2. Заметим, что в показатели степени можно использовать формулу перехода к новому основанию. Имеем

$$(\log_4 3)^{\frac{\log_4 3}{\log_2(\log_4 3)}}=(\log_4 3)^{\frac{0.5\log_2 3}{\log_2(\log_4 3)}=(\log_4 3)^{\log_{\log_4 3}\sqrt{3}}}=\sqrt{3}$$

Ответ: $\sqrt{3}$.

3. Так как $2x^2-2x+1>0\,(D<0)$, то область допустимых значений неравенства суть $x\in\mathbb{R}$. Прологарифмируем обе части неравенства по натуральному основанию

$$\begin{gathered}\ln(2x^2-2x+1)^{(x^2-2x)}\leqslant\ln 1\iff\\(x^2-2x)\cdot\ln(2x^2-2x+1)\leqslant 0\iff\\(x^2-2x)(2x^2-2x+1-1)\leqslant 0\iff\\x^2(x-1)(x-2)\leqslant 0\iff x\in[1;2]\cup\{0\}\end{gathered}$$

Ответ: $x \in [1; 2] \cup \{0\}$.

4. Запишем ОДЗ исходного уравнения

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 2x + 2\sin x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{2\sin x\cos x}{\cos 2x} + 2\sin x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \\ 2\cos^2 x + \cos x - 1 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \\ \cos x \neq -1 \\ \cos x \neq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Приравнивая числитель к нулю, имеем

$$\operatorname{tg} 2x - 2\sin x = 0 \iff 2\sin x(2\cos^2 x - \cos x - 1) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = 1 \\ \cos x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Первые два уравнения совокупности не удовлетворяют ОДЗ. Решая третье уравнение находим

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

5.

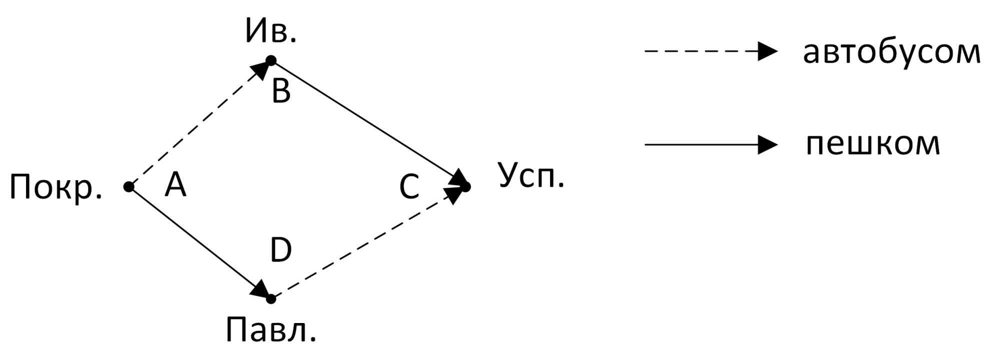


Рис. 1.13:

Пусть $v = 4$ км/ч – собсвенная скорость Ивана и Павла. Из села Покровское до деревни Павловка Павел шел 30 минут, что составляет $\dfrac{1}{2}$ часа, значит $AD = \dfrac{1}{2} \cdot 4 = 2\,\text{км}$, $DC = 6 - 2 = 4\,\text{км}$, и этот участок он проехал за 10 минут, то есть за $\dfrac{1}{6}$ часа. Тогда скорость автобуса $v_{\text{авт}} = 4 : \dfrac{1}{6} = 24$ км/ч.

Обозначим путь из деревни Ивановка в село Успенское через $BC = x$, тогда путь $AB = 6 - x$. Иван на всю дорогу потратил $30\,\text{мин} = \dfrac{1}{2}$ ч, то есть

$$\frac{6-x}{24} + \frac{x}{4} = \frac{1}{2} \iff x = \frac{6}{5}$$

Итак, $BC = 1.2$ км.

Ответ: 1.2 км.

6.

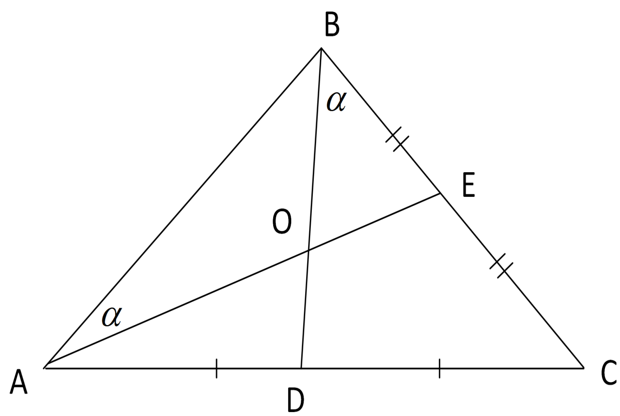


Рис. 1.14:

Обозначим $OE = x$, $OD = y$, $\angle EAB = \angle DBC = \alpha$, тогда $AO = 2x$, $BO = 2y$. По свойству медиан имеем

$$S_{ABE} = \frac{1}{2}S_{ABC} = \frac{1}{2}AE \cdot AB \cdot \sin\alpha \Rightarrow S_{ABC} = AE \cdot AB \cdot \sin\alpha$$
$$S_{BOE} = \frac{1}{6}S_{ABC} = \frac{1}{2}BO \cdot BE \cdot \sin\alpha \Rightarrow S_{ABC} = 3BO \cdot BE \cdot \sin\alpha$$

Приравнивая площади треугольника ABC, получаем $BE = \dfrac{x}{2y}$, а значит $BC = 2BE = \dfrac{x}{y}$.

Применяя теорему косинусов к треугольникам BOE и ABE, получаем систему двух уравнений:

$$\begin{cases} x^2 = 4y^2 + \dfrac{x^2}{4y^2} - 2\sqrt{\dfrac{2}{3}}x \\ \dfrac{x^2}{4y^2} = 1 + 9x^2 - 6\sqrt{\dfrac{2}{3}}x \end{cases}$$

Избавляясь от слагаемого содержащего радикал, получаем

$$12x^2 - 12y^2 - \frac{x^2}{y^2} + 1 = 0 \iff \frac{x^2(12y^2 - 1)}{y^2} - (12y^2 - 1) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} \\ x = y \end{array}\right.$$

При $y = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$, находим $x = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. При $x = y$ получаем квадратное уравнение $3x^2 - 2\sqrt{\dfrac{2}{3}} + \dfrac{1}{4} = 0$ которое не имеет корней.

Итак, $BC = \dfrac{x}{y} = \sqrt{2}$.

Ответ: $\sqrt{2}$.

7. Запишем уравнение в виде $|\ln(2-(x-a)^2)| = 2x$ и сделаем замену $x-a=t$. Получим уравнение $|\ln(2-t^2)| = 2(t+a)$.

Очевидно в виду линейности подстановки, исходное уравнение будет иметь один корень, тогда и только тогда, когда уравнение относительно переменной t имеет один корень.

Рассмотрим функцию $f(t) = \ln(2-t^2)$, $D(f) = (-\sqrt{2};\ \sqrt{2})$. График функции $y = |f(t)|$ получается из графика функции $y = f(t)$ отображением относительно оси OX отрицательной части графика. С помощью производной, легко показать, что $y = f(t)$ – убывает при $t \in (0;\ \sqrt{2})$ и возрастает при $t \in (-\sqrt{2};\ 0)$.

$g(t,a) = 2(t+a)$ – семейство наклонных параллельных прямых с угловым коэффициентом равным $k = 2$.

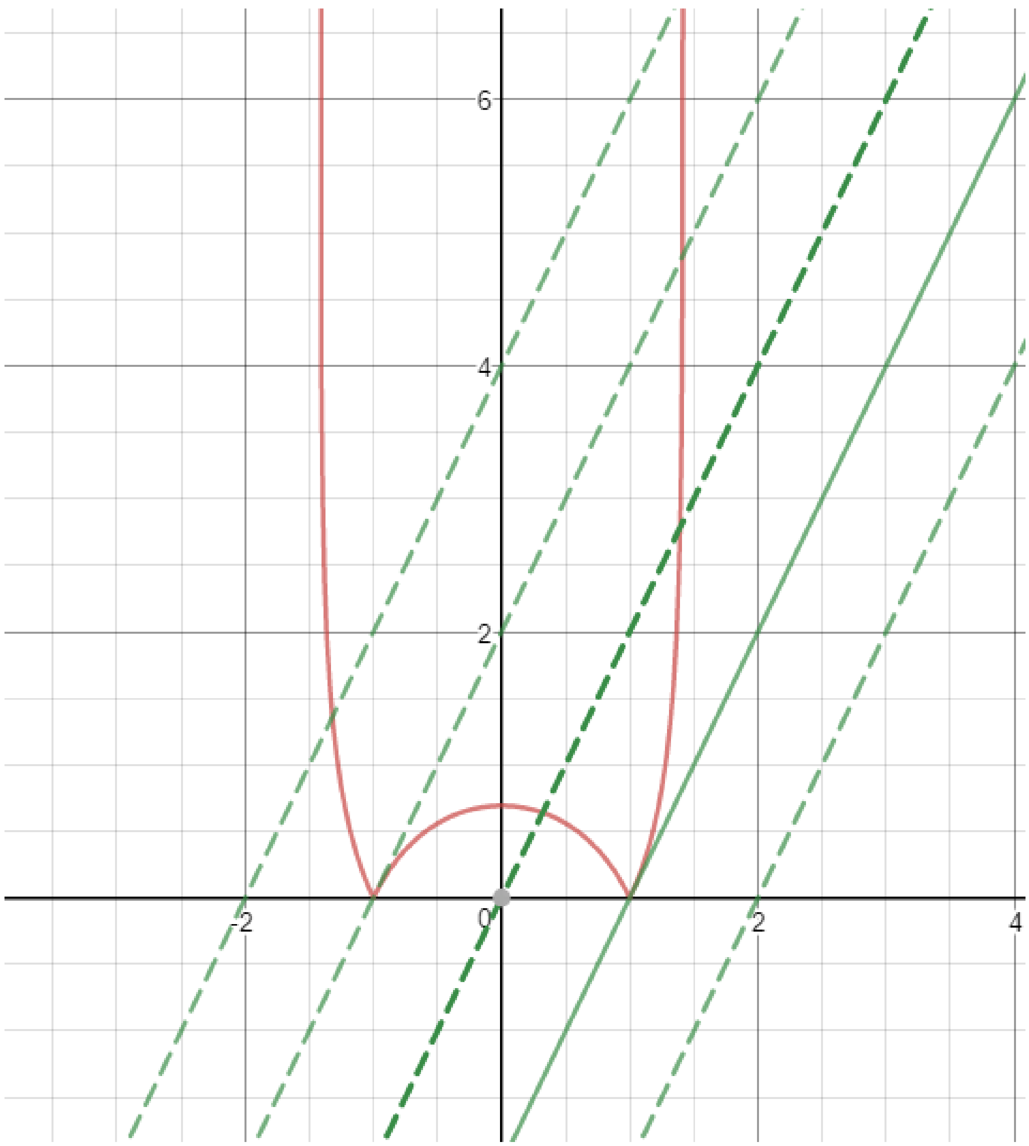


Рис. 1.15:

Уравнение имеет единственное решение, если прямая $g(t,a) = 2(t+a)$ касается графика функции $h(t) = -\ln(2-t^2)$ ($y = h(t)$ – отображенная часть графика функции $y = f(t)$).

Так как $h'(t_0) = 2$, то решая уравнение $\dfrac{2t_0}{2 - t_0^2} = 2$ находим $t_0 = 1$. Тогда $h(t_0) = 0$ и прямая $g(t, a) = 2(t + a)$ проходит через точку с координатами $(1;\, 0)$. При этом $a = -1$.

Ответ: $a = -1$.

8.

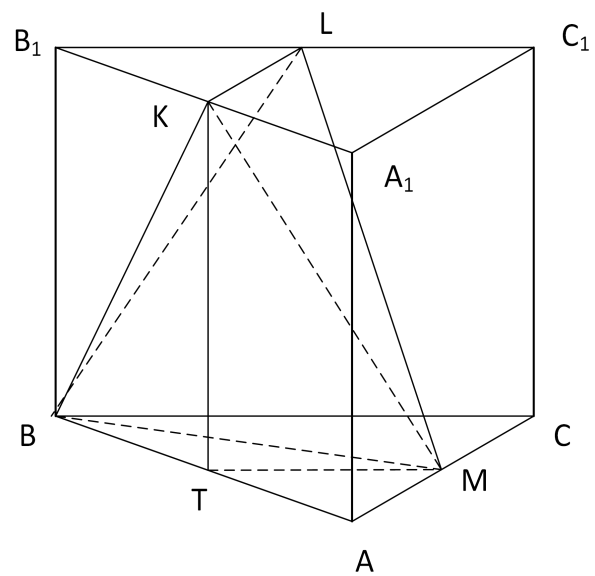


Рис. 1.16:

Высота треугольника ABC, $BM = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Обозначим $B_1K = a$, $BB_1 = h$, $KA_1 = 1 - a$. Из $\triangle ATM$ по теореме косинусов находим $TM^2 = (1-a)^2 - \dfrac{1}{2}(1-a) + \dfrac{1}{4}$.

По теореме Пифагора имеем: $BK^2 = h^2 + a^2$, $KM^2 = h^2 + TM^2$. Так как $BK = KM = BM = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, то имеем систему

$$\begin{cases} h^2 + a^2 = \dfrac{3}{4} \\ h^2 + (1-a)^2 - \dfrac{1}{2}(1-a) + \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ h = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Итак, имеем: $BM = BK = KM = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $ML = BL = \sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $KL = \dfrac{1}{2}A_1C_1 = \dfrac{1}{2}$.

Таким образом все боковые ребра тетраэдра $MBKL$ с основанием BKL равны, значит высота проецируется в центр описанной окружности. Пусть O – центр описанной окружности около $\triangle BKL$. Найдем площадь $\triangle BKL$ двумя способами. С одной стороны

$$S_{BKL} = \frac{1}{2}KL \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{11}}{4} = \frac{\sqrt{11}}{16}$$

с другой стороны

$$S_{BKL} = \frac{BK \cdot KL \cdot BL}{4R} \Rightarrow R = \frac{3}{2\sqrt{11}}$$

Зная радиус описанной около $\triangle BKL$ находим высоту тетраэдра $MBKL$

$$MO = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{9}{44}} = \sqrt{\frac{6}{11}}$$

Итак, $V_{MBKL} = \frac{1}{3} \cdot S_{BKL} \cdot MO = \frac{\sqrt{6}}{48}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{48}$.

Замечание. Данную задачу можно легко решить координатным способом. Введем систему координат с началом в точке B. Тогда

$$A\left(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2};\ 0\right),\ B(0;\ 0;\ 0),\ C(1;\ 0;\ 0),\ M\left(\frac{3}{4};\ \frac{\sqrt{3}}{4};\ 0\right),\ K\left(\frac{1}{4};\ \frac{\sqrt{3}}{4};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ L\left(\frac{1}{2};\ 0;\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Уравнение плоскости BKM имеем вид: $2x - 2\sqrt{3}y + \sqrt{2}z = 0$ Расстояние от точки L до плоскости BKL найдем по формуле

$$\rho = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Так как $\triangle BKM$ – правильный, то $S_{BKM} = \frac{BK^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{16}$. Итак,

$$V_{LBKM} = \frac{1}{3} \cdot S_{BKM} \cdot \rho = \frac{\sqrt{6}}{48}$$

Ответы к вариантам 2 – 4

Вариант 2. 1. $-1/2$. **2.** $2/3$. **3.** $x \in [-1; 0]$. **4.** $x = \frac{\pi k}{10}, k \in \mathbb{Z} \setminus (2\mathbb{Z} \cup 5\mathbb{Z})$. **5.** 4 км. **6.** $\sqrt{17} - 1$. **7.** $\left(1 + \sqrt{2} + \frac{\sqrt{11}}{3} + \frac{\sqrt{14}}{3}\right)^{-1}$. **8.** $a \neq 0$.

Вариант 3. 1. $-1/3$. **2.** $3/2$. **3.** $x \in [0; 1]$. **4.** $x = \frac{\pi k}{8}, k \in \mathbb{Z} \setminus 4\mathbb{Z}$. **5.** 4,4 км. **6.** 9. **7.** $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{11}}{4} + \frac{\sqrt{19}}{4}\right)^{-1}$. **8.** $a \neq 0$.

Вариант 4. 1. $-4/7$. **2.** $3/4$. **3.** $x \in [-1; 0]$. **4.** $x = \frac{\pi k}{14}, k \in \mathbb{Z} \setminus 7\mathbb{Z}$. **5.** 3 км. **6.** $\sqrt{10} - 1$. **7.** $\left(1 + \frac{7 + \sqrt{13}}{2\sqrt{2}}\right)^{-1}$. **8.** $a \neq 0$.

2012 год

Вариант 1

1. Пусть ax^2+bx-2 искомый квадртаный трехчлен. По теореме обратной теореме Виета, имеем

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=-\dfrac{2}{a} \end{cases} \iff \begin{cases} -\dfrac{4}{7}+\dfrac{5}{3}=-\dfrac{b}{a} \\ -\dfrac{4}{7}\cdot\dfrac{5}{3}=-\dfrac{2}{a} \end{cases} \iff \begin{cases} a=\dfrac{21}{10} \\ b=-\dfrac{23}{10} \end{cases}$$

Итак, квадртаный трехчлен имеет вид $\dfrac{21}{10}x^2-\dfrac{23}{10}x-2$.

Ответ: $\dfrac{21}{10}x^2-\dfrac{23}{10}x-2$.

2. $\log_2\log_{81}\dfrac{417}{139}=\log_2\log_{81}3=\log_2 2^{-2}=-2$.

Ответ: -2.

3. Данное неравенство равносильно совокупности

$$\left[\begin{aligned} &4-2^x=0 \\ &\begin{cases} 4-2^x>0 \\ 9^x-3^{x+2}+12\le 0 \end{cases} \end{aligned}\right. \iff \left[\begin{aligned} &x=2 \\ &\begin{cases} x<2 \\ (3^x-2)(3^x-7)\le 0 \end{cases} \end{aligned}\right. \iff \left[\begin{aligned} &x=2 \\ &\log_3 2\le x\le \log_3 7 \end{aligned}\right.$$

Итак, $x\in[\log_3 2;\,\log_3 7]\cup\{2\}$.

Ответ: $x\in[\log_3 2;\,\log_3 7]\cup\{2\}$.

4. Запишем уравнение в виде $\sin 3x+\sin x-\sqrt{2}\cos x=0$ и применем формулу $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$. Имеем

$$2\sin 2x\cos x-\sqrt{2}\cos x=0 \iff \left[\begin{aligned} &\cos x=0 \\ &\sin 2x=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right. \iff \left[\begin{aligned} &x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z} \\ &x=(-1)^k\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z} \end{aligned}\right.$$

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, $x=(-1)^k\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi k}{2}$, $n,\,k\in\mathbb{Z}$.

5. Перепишем уравнение в виде $|-x|+|x+3y|+|6-3y|=6$. Заметим, что у нас записано равенство $|a|+|b|+|c|=a+b+c$, так как $-x+x+3y+6-3y=6$.

Очевидно, для любых вещественных чисел a, b, c верно равенство $|a|+|b|+|c|\ge a+b+c$, причем знак равенства достигается, когда все три числа нетрицательны, то есть $a\ge 0$, $b\ge 0$, $c\ge 0$.

Итак, имеем систему

$$\begin{cases} -x\ge 0 \\ x+3y\ge 0 \\ 6-3y\ge 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x\le 0 \\ y\ge -\dfrac{x}{3} \\ y\le 2 \end{cases}$$

Пересечение трех полуплоскостей, задаваемых системой дают прямоугольный треугольник, с катетами 2 и 6. То есть искомая площадь равна $S=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 6=6$.

Ответ: 6.

6. Обозначим $BD = BE = EC = x$, $AD = 2x$, $FG = y$, $\angle ABC = \alpha$. По теореме о касательной и секущей имеем систему

$$\begin{cases} AD^2 = AF \cdot AG \\ EC^2 = CG \cdot CF \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4x^2 = 5(5+y) \\ x^2 = 2(2+y) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{10} \\ y = 3 \end{cases}$$

Итак, $AB = 3x = 3\sqrt{10}$, $BC = 2x = 2\sqrt{10}$, $AC = 10$. В $\triangle ABC$ по теореме косинусов $\cos\alpha = \dfrac{1}{4}$. Так как центр окружности вписанной в угол лежит на биссектрисе угла, то $\angle OBD = \dfrac{\alpha}{2}$. По формуле $\cos\alpha = 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - 1$, находим $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{5}{8}}$, $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{3}{5}}$.

В прямоугольном $\triangle ODB : \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{OD}{DB}$. Значит $OD = R = \sqrt{6}$.

Ответ: $\sqrt{6}$.

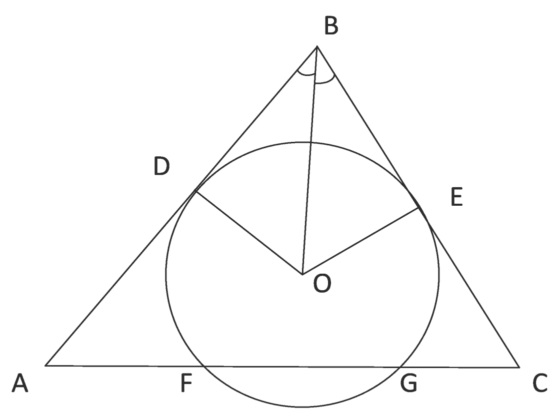


Рис. 1.17:

7. Очевидно уравнение имеет смысл лишь при $x \geq 0$, $y \geq 0$. Заметим, что пара чисел $x = y = 0$ независимо от значений параметра a является решением данного уравнения.

При $a < 0$, левая часть уравнения неотрицательна, в правая часть – неположительна, то есть единственным решением является $x = y = 0$.

При $a = 0$ уравнение имеет вид $\sqrt{3x} + 2\sqrt{y} = 0$. Данное уравнение имеет единственное решение $x = y = 0$.

При $a = \sqrt{3}$ все пары чисел $(x;\,0)$, $x \geq 0$ являются решением уравнения.

При $a = 2$ все пары чисел $(0;\,y)$, $y \geq 0$ являются решением уравнения.

Итак, все $a \leq 0$ – удовлетворяют условию задачи, $a = \sqrt{3}$, $a = 2$ – неудовлетворяют условию задачи.

При $a > 0$, $a \neq \sqrt{3}$, $a \neq 2$ для выполнения условия задачи уравнение $a\sqrt{x+y} = \sqrt{3x} + 2\sqrt{y}$ не должно иметь корней (одно решение есть всегда).

Поделим обе части уравнения на $y \neq 0$, получим

$$a\sqrt{\frac{x}{y} + 1} = \sqrt{\frac{3x}{y}} + 2$$

Сделаем замену переменной $\dfrac{x}{y} = t$, $t > 0$ и поделим обе части на $\sqrt{t+1}$. Получим уравнение

$$a = \frac{\sqrt{3}t + 2}{\sqrt{t+1}}$$

Рассмотри функцию $f(t) = \dfrac{\sqrt{3}t + 2}{\sqrt{t+1}}$, $t > 0$. Производная $f'(t) = \dfrac{\sqrt{3} - 2\sqrt{t}}{2\sqrt{t}(t+1)\sqrt{t+1}}$ обращается в ноль в точке $t = \dfrac{3}{4}$. При $0 < t < \dfrac{3}{4}$ $f'(t) > 0$, при $t > \dfrac{3}{4}$ $f'(t) < 0$, то есть $t = \dfrac{3}{4}$ – точка максимума и $f_{max} = f\left(\dfrac{3}{4}\right) = \sqrt{7}$. При $t \to +\infty$, $f(t) \to \sqrt{3}$. В нуле функция равна $f(0) = 2$.

Итак, $E(f) = (\sqrt{3};\, \sqrt{7}]$. Уравнение $a = f(t)$ не имеет корней при $a \notin E(f)$. Учитывая, что $a \leq 0$ удовлетворяют условию задачи, а так же, что $a \neq \sqrt{3}$, $a \neq 2$ заключаем $a \in (-\infty;\, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{7};\, +\infty)$.

Ответ: $a \in (-\infty;\, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{7};\, +\infty)$.

8.

Ответы к вариантам 2 – 4

Вариант 2. 1. $\dfrac{35}{11}x^2 - 4x - \dfrac{39}{11}$. **2.** 1. **3.** $x \in (-\infty; \log_3 2] \cup \{1\}$. **4.** $x = \dfrac{\pi k}{3}$, $x = \pm\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$. **5.** 4. **6.** $3 - \sqrt{5}$. **7.** $a \in (-\infty;\, 1) \cup (2;\, +\infty)$. **8.** $\dfrac{4}{5}\sqrt{7}$.

Вариант 3. 1. $\dfrac{28}{9}x^2 - \dfrac{43}{9}x - 5$. **2.** -1. **3.** $x \in \{-1\} \cup [\log_2 3;\, 2]$. **4.** $x = \pi k$, $x = (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{2}$, $k, n \in \mathbb{Z}$. **5.** 16. **6.** $\sqrt{\dfrac{15}{2}}$. **7.** $a \in (-\infty;\, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{5};\, +\infty)$. **8.** $\dfrac{5}{26}\sqrt{3}$.

Вариант 4. 1. $\dfrac{15}{17}x^2 - 7x - \dfrac{22}{7}$. **2.** 1. **3.** $x \in \{2\} \cup [\log_2 5; +\infty)$. **4.** $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi k}{3}$, $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$. **5.** 1. **6.** $6 + \sqrt{5}$. **7.** $a \in (-\infty;\, 1) \cup (\sqrt{3};\, +\infty)$. **8.** $\dfrac{5}{14}$.

2011 год

Вариант 1

1. Запишем выражение в виде $x^2 - \dfrac{5}{8}x - \dfrac{1}{8}$. Тогда имеем

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 - \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{5} - \frac{1}{8} = \frac{16}{25} - \frac{5}{8} = \frac{3}{200}$$

Ответ: $\dfrac{3}{200}$.

2. Раскрывая квадрат суммы получаем

$$\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 1 \iff \sin 2x = 0 \iff x = \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

3. Запишем уравнение в виде

$$\log_2(3x-4) = \log_2\sqrt{2-x}$$

С учетом ОДЗ, последнее уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 3x-4>0 \\ 3x-4=\sqrt{2-x} \end{cases} \iff \begin{cases} x>\dfrac{4}{3} \\ (3x-4)^2 = 2-x \end{cases} \iff \begin{cases} x>\dfrac{4}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{14}{9} \end{array}\right. \end{cases} \iff x=\frac{14}{9}$$

Ответ: $\dfrac{14}{9}$.

4. Перенося единицу влево, и приводя к общему знаменателю имеем неравенство

$$\frac{\sqrt{5x+3}-\sqrt{3x+2}}{\sqrt{3x+2}-1} > 0$$

Применяя метод замены множителя, имеем равносильную систему

$$\begin{cases} 5x+3\geq 0 \\ 3x+2\geq 0 \\ \dfrac{5x+3-(3x+2)}{3x+2-1} > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x\geq -\dfrac{3}{5} \\ \dfrac{2x+1}{3x+1} > 0 \end{cases} \iff x \in \left[-\frac{3}{5}; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$$

Ответ: $x \in \left[-\dfrac{3}{5}; -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$.

5. $ML = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (как средняя линия треугольника ABC). Так как CT – медиана и $ML \parallel AB$, то $MO = OL = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$. Обозначим $CK = 2x$, тогда $KT = x$, $CT = 3x$.

$\triangle MCL \sim \triangle ABC$ (по двум углам), значит

$$\frac{CO}{CT} = \frac{ML}{AB} = \frac{1}{2},\ CO = \frac{1}{2}CT = \frac{3x}{2},\ OK = 2x - \frac{3x}{2} = \frac{x}{2}$$

Так как около четырехугольника $MCLK$ можно описать окружность, то по свойству хорд имеем

$$MO\cdot OL = CO\cdot OK \iff \frac{3}{16} = \frac{3x^2}{4} \iff x = \frac{1}{2}$$

Итак, $CK = 2x = 1$.

Ответ: 1.

6. Деля числитель и знаменатель функции на $9^x > 0$, получим

$$f(x) = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - \left(\frac{2}{3}\right)^x + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

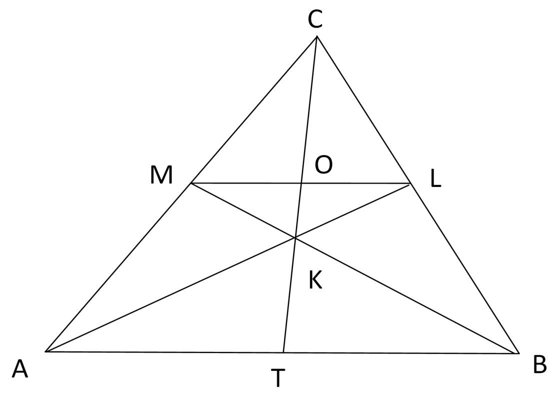


Рис. 1.18:

Дробь с положительным знаменателем принимает свое наибольшое значение при наименьшем значении знаменателя. То есть $f_{max} = \dfrac{4}{3}$, причем оно достигается при

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x - \frac{1}{2} = 0 \iff x = \log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{2} = \frac{1}{\log_2 3 - 1}$$

Ответ: $f_{max} = \dfrac{4}{3}$ при $x = \dfrac{1}{\log_2 3 - 1}$.

7. Введем систему координат с вершиной в точке куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ так, как указанно на рисунке и расположим в кубе две сферы согласно условию задачи. Пусть $a = 5$ – сторона куба, $R = 2$ – радиус известно шара с центром в точке O_1 и r – радиус неизвестного шара с центром в точке O_2. Тогда центры шаров имееют координаты $O_1(2;\, 3;\, 2)$, $O_2(5 - r;\, r;\, r)$. Имеем

$$O_1O_2^2 = (r+2)^2 = (2-5+r)^2 + (3-r)^2 + (2-r)^2 \iff r_1 = 1,\, r_2 = 9$$

Если радиус равен $r = 9$ то шар не может располагаться внутри куба со стороной 5. Итак, искомый радиус равен $r = 1$.

Ответ: 1.

Замечание. Приведем решение из критериев, в котором не используется координатный способ.

Пусть $ABCD$ – квадрат, лежащий в основании куба и AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 – боковые ребра куба. Не уменьшая общности можно считать, что первый шар касается двух боковых граней куба, пересекающихся по отрезку AA_1, а второй шар – боковых граней, пересекающихся по ребру CC_1. Обозначим также точками O_1, O_2 центры первого и второго шаров соответственно.

Так как $AD \perp AA_1$ и $AB \perp AA_1$ то $\angle DAB$ есть плоский угол двугранного угла, образованного плоскостями AA_1B_1B и AA_1D_1D. Отсюда следует, что центр первого шара – O_1, как точка равноудалённая от этих плоскостей, лежит в биссектральной плоскости этого угла, то есть в плоскости AA_1C_1C. Точно так же плоскость ADC_1B_1 есть биссектральная плоскость двугранного угла, образованного плоскостями AA_1D_1D и $ABCD$. Первый шар касается этих плоскостей, значит, его центр – точка O_1, лежит в плоскости ADC_1B_1. Плоскости AA_1C_1C и ADC_1B_1, содержащие по доказанному точку O_1 имеют общие точки A и C_1, а потому пересекаются по прямой AC_1. Значит, точка O_1 лежит на отрезке AC_1. По тем же соображениям точка O_2 лежит на отрезке A_1C.

Плоскость AA_1C_1C проходит через ребро куба AA_1, перпендикулярное плоскости основания куба. Поэтому она перпендикулярна плоскости основания. Но тогда радиусы шаров, проведённые в точки K и L касания шаров с плоскостью основания лежат в плоскости AA_1C_1C, и точки касания K и L лежат на отрезке AC.

Для дальнейших вычислений удобно вынести прямоугольник AA_1C_1C на отдельный чертеж. Обозначим радиус второго шара буквой r. Треугольники AO_1K и AC_1C подобны. Поэтому $\dfrac{AK}{O_1K} = \dfrac{AC}{C_1C} = \sqrt{2}$ и $AK = \sqrt{2}O_1K = 2\sqrt{2}$. Точно так же находим $LC = \sqrt{2}O_2L = r\sqrt{2}$ и, значит, $KL = AC - AK - LC = (3-r)\sqrt{2}$. Так как шары по условию касаются друг друга, то расстояние между их центрами равно сумме радиусов шаров, то есть $O_1O_2 = 2 + r$. Выберем на прямой KO_1 точку M так, что $MO_2 \parallel KL$. Применяя к прямоугольному треугольнику MO_1O_2 теорему Пифагора, находим $O_1O_2^2 = MO_2^2 + MO_1^2$ или $(2+r)^2 = 2(3-r)^2 + (2-r)^2$. После возведения в квадраты и приведения подобных находим квадратное уравнение $r^2 - 10r + 9 = 0$, имеющее два корня $r_1 = 1$ и $r_2 = 9$. Учитывая, что по условию второй шар лежит внутри куба, заключаем, что равенство $r = 9$ невозможно. Поэтому $r = 1$.

Ответ: 1.

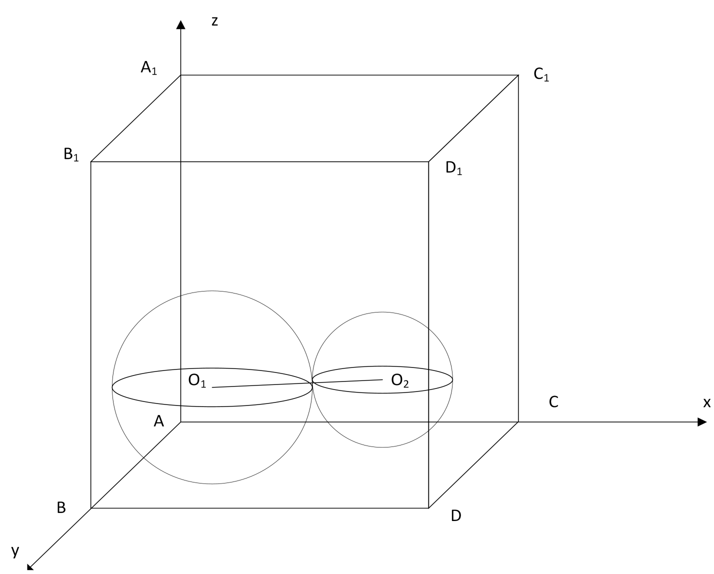


Рис. 1.19:

8. Обозначим $4x + 7y = a$. Подставляя в первое неравенство $x = \dfrac{1}{4}(a - 7y)$, получим неравенство

$$81y^2 - 6ay + a^2 - 8 \leq 0$$

Для того, чтобы последнее неравенство имело решение, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант был неотрицательным. Решая неравенство $D \geq 0$, имеем $|a| \leq 3$. Но из второго неравенства имеем $a \geq 3$, значит

$$a = 3,\ y = \frac{6a}{2 \cdot 81} = \frac{1}{9},\ x = \frac{1}{4}(a - 7y) = \frac{5}{9}$$

Ответ: $x = \frac{5}{9}$, $y = \frac{1}{9}$.

Замечание. Задачу можно решить не вводя параметр a. Преобразуем первое неравенство к виду

$$2x^2 + 4xy + 11y^2 \leq 1 \iff \frac{1}{9}(4x + 7y)^2 + \frac{2}{9}(x - 5y)^2 \leq 1$$

Так как из второго неравенства $4x + 7y \geq 3$, то $\frac{1}{9}(4x + 7y)^2 + \frac{2}{9}(x - 5y)^2 \geq 1$. Значит возможен, только знак равенства. Итак, имеем систему

$$\begin{cases} 4x + 7y = 3 \\ x - 5y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{5}{9} \\ y = \dfrac{1}{9} \end{cases}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что числа $x = \frac{5}{9}$, $y = \frac{1}{9}$ – решения системы.

Ответы к вариантам 2 – 4

Вариант 2. 1. $\frac{5}{164}$. **2.** $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. **3.** $\frac{5}{4}$. **4.** $\left[-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{4}; 1\right]$. **5.** 6. **6.** $\frac{1}{4}$, $x = \frac{\log_2 3 + 1}{1 - \log_2 3}$. **7.** $\frac{5 - \sqrt{15}}{2}$. **8.** $x = -\frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{12}$.

Вариант 3. 1. $-\frac{7}{228}$. **2.** $x = \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}$. **3.** $\frac{2}{9}$. **4.** $\left[\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right) \cup (1; +\infty)$. **5.** $\sqrt{3}$. **6.** $\frac{8}{7}$, $x = \frac{2}{1 - \log_2 5}$. **7.** $2 + \sqrt{7}$. **8.** $x = \frac{1}{6}$, $y = -\frac{1}{3}$.

Вариант 4. 1. $\frac{1}{228}$. **2.** $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. **3.** $\frac{3}{4}$. **4.** $[-2; -1) \cup \left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right]$. **5.** $2\sqrt{3}$. **6.** $\frac{5}{9}$, $x = \frac{\log_2 5 + 1}{\log_2 5 - 1}$. **7.** $\frac{3 - \sqrt{3}}{2}$. **8.** $x = -\frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{4}$.