Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 заданияс кратким ответом повышенного уровня сложности и 7 заданий с развернутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

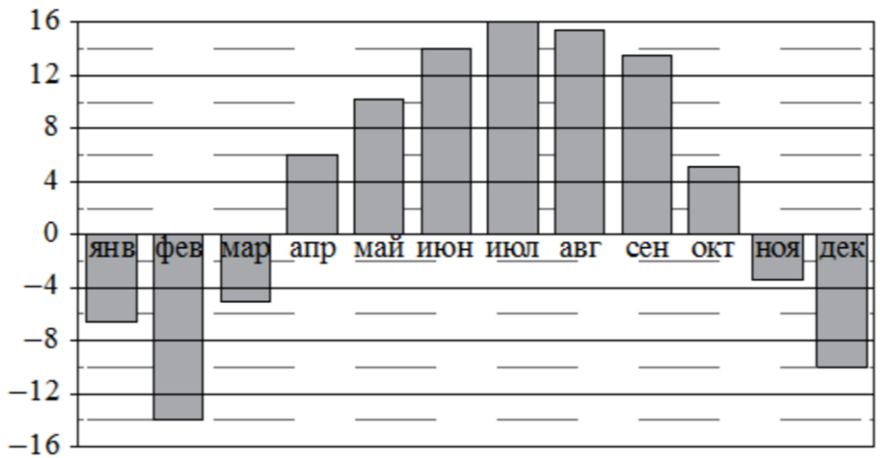
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Пакет молока стоит 40 рублей. Пенсионерам магазин делает скидку 15%. Сколько рублей заплатит пенсионер за пакет молока?

Ответ: ___________________________.

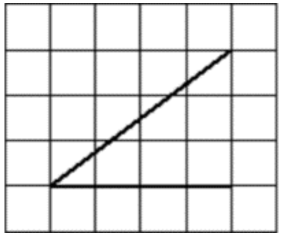
2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Нижнем Новгороде за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали – температура в градусах Цельсия. Определите по приведённой диаграмме, сколько было месяцев с положительной среднемесячной температурой.



Ответ: ___________________________.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180910

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён угол. Найдите синус этого угла.



Ответ: ___________________________.

4 Научная конференция проводится в 4 дня. Всего запланировано 80 докладов – первые два дня по 12 докладов, остальные распределены поровну между третьим и четвёртым днями. На конференции планируется доклад профессора М. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции?

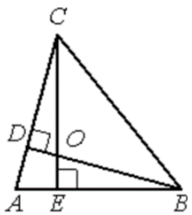
Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения

$3^{2x-16} = \frac{1}{81}$.

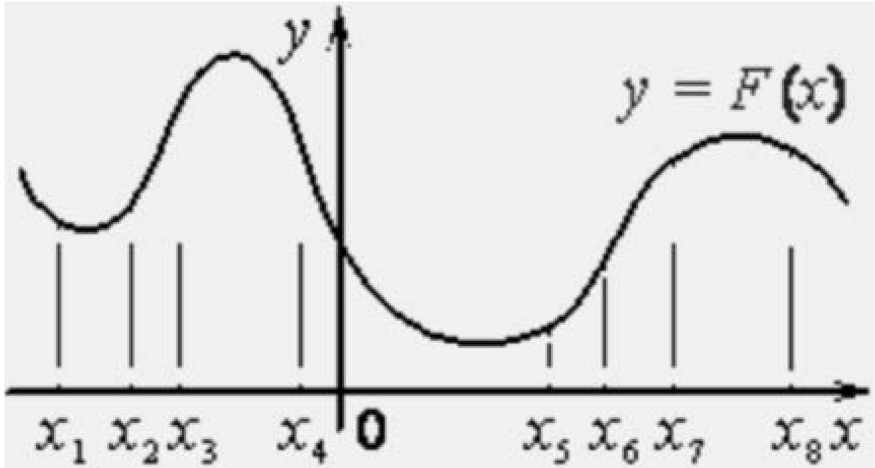
Ответ: ___________________________.

6 В остроугольном треугольнике ABCугол A равен $78°$, BDи CE –высоты, пересекающиеся в точке O. Найдите угол DOE. Ответ дайте в градусах.



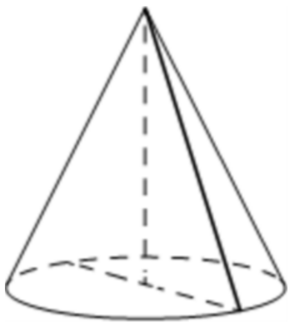
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график $y = F(x)$ одной из первообразных некоторой функции $f(x)$ и отмечены восемь точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8. В скольких из этих точек функция $f(x)$ отрицательна?



Ответ: ___________________________.

8 Высота конуса равна 24, а диаметр основания равен 90. Найдите образующую конуса.



Ответ: ___________________________.

9 Найдите значение выражения

$$\frac{\log_2 729}{\log_2 9}.$$

Ответ: ___________________________.

10 В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = at^2 + bt + H_0$, где $H_0 = 3$ м – начальный уровень воды, $a = \frac{1}{768}$ м/мин^2 и $b = -\frac{1}{8}$ м/мин – постоянные, t – время в минутах, прошедшее с момента открытия крана. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? Ответ приведите в минутах.

Ответ: ___________________________.

11 Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 30 км, одновременно выехали автомобилист и велосипедист. За час автомобилист проезжает на 70 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт В на 1 час 10 минут позже автомобилиста. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ___________________________.

12 Найдите наибольшее значение функции

$y = 6 + 12x - 4x\sqrt{x}$ на отрезке $[2; 11]$.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$\sqrt{2}\sin^3 x - \sqrt{2}\sin x + \cos^2 x = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 13. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C.

б) Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α.

15 Решите неравенство

$$\frac{\log_3(9x)\cdot\log_4(64x)}{5x^2 - |x|} \le 0.$$

16 Точка O – центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, I – центр вписанной в него окружности, H – точка пересечения высот. Известно, что $\angle BAC = \angle OBC + \angle OCB$.

а) Докажите, что точка H лежит на окружности, описанной около треугольника BOC.

б) Найдите угол OHI, если $\angle ABC = 70°$.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180910

17 Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят t^2 тыс. рублей в конце года $t(t = 1; 2; \dots)$. В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счёт в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счёте будет увеличиваться в $1 + r$ раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счёте была наибольшей. Расчёты показали, что для этого ценные бумаги нужно продавать строго в конце двадцать первого года. При каких положительных значениях r это возможно?

18 Найдите все значения a, при которых уравнение

$$6a + \sqrt{5 + 4x - x^2} = ax + 3$$

имеет единственный корень.

19 Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию $(n \geq 3)$.

а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 10?
б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 1000?
в) Найдите все возможные значения n, если сумма всех данных чисел равна 129.

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:

ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	7 лет репетиторской деятельности
Регалии:	Основатель проекта Школа Пифагора
Аккаунт ВК:	https://vk.com/eugene10
Сайт и доп. информация:	https://vk.com/shkolapifagora https://youtube.com/ШколаПифагора

Система оценивания

Ответы к заданиям 1-19

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Верно выполненные задания 13-15 максимум оцениваются в 2 балла, задания 16-17 – в 3 балла, а задания18-19 – в 4 балла.

№ задания	Ответ
1	34
2	7
3	0,6
4	0,35
5	6
6	102
7	3
8	51
9	3
10	48
11	20
12	22
13	а) $\frac{\pi}{2}+\pi n, \frac{\pi}{4}+2\pi n, \frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ n\in Z.$ б)$-2{,}5\pi;\ -1{,}5\pi;\ -1{,}75\pi;\ -1{,}25\pi$
14	44
15	$\left(0;\frac{1}{64}\right]\cup\left[\frac{1}{9};\frac{1}{5}\right)$
16	5
17	$\left(\frac{43}{441};\frac{41}{400}\right)$
18	$\{0\}\cup\left(\frac{3}{7};3\right]$
19	а) Да, например, 1 2 3 4, б) 44, в) 3; 6

Решения и критерии оценивания заданий13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависитот полноты решения и правильности ответа.
Общие требования к выполнению заданий с развёрнутымответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможныеслучаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записиформы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0баллов.
Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.
При выполнении задания могут использоватьсябездоказательстваи ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общегообразования.

13 а) Решите уравнение

$\sqrt{2}\sin^3 x-\sqrt{2}\sin x+\cos^2 x=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right].$

.

Решение:

13 а) Решите уравнение $\sqrt{2}\sin^3 x - \sqrt{2}\sin x + \cos^2 x = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

2B5A99

$\sqrt{2}\cdot\sin^3 x - \sqrt{2}\cdot\sin x + 1 - \sin^2 x = 0$

$\sqrt{2}\cdot\sin x\cdot(\sin^2 x - 1) - (\sin^2 x - 1) = 0$

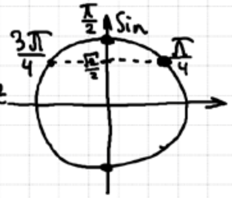
$(\sin^2 x - 1)\cdot(\sqrt{2}\cdot\sin x - 1) = 0$

$\sin^2 x - 1 = 0$ или $\sqrt{2}\cdot\sin x - 1 = 0$

$\sin^2 x = 1$; $\sqrt{2}\cdot\sin x = 1$

$\sin x = \pm 1$; $\sin x = \frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}$

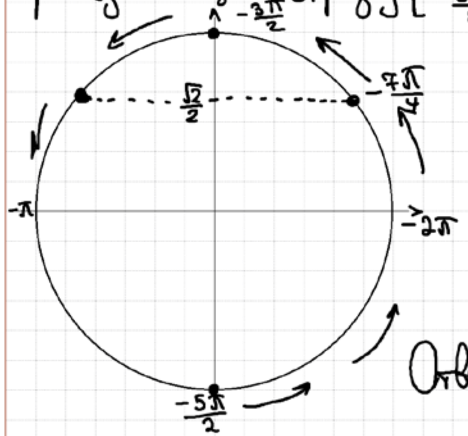
$x = \frac{\pi}{2} + \pi n; n\in Z$; $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$



$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n; n\in Z$

$x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n; n\in Z$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$



Получим числа:

$x = -\frac{5\pi}{2}$

$x = -2\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{-7\pi}{4}$

$x = -\frac{3\pi}{2}$

$x = -\frac{\pi}{1} - \frac{\pi}{4} = -\frac{5\pi}{4}$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$; $n\in Z$

б) $-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}; -\frac{7\pi}{4}; -\frac{5\pi}{4}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б* ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 13. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C.

б) Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α.

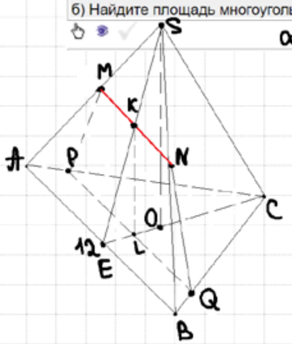
Решение:

14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 13. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении $5:1$, считая от точки C.

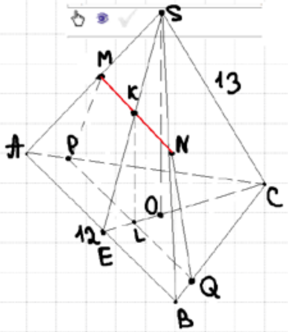
б) Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α.

32528E

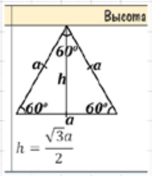


а) Пусть O — центр осн. пир.
$SE \cap MN = K$
Построим KL такую, что $KL \parallel SO$
Построим PQ такую, что $PQ \parallel AB$
MP
NQ
MNQP — сечение пирамиды пл. α
Рассмотрим $\triangle SOE$ — прямоугольный:
K — середина SE (т.к. MK — ср. линия $\triangle ASE$)
$KL \parallel SO$
$\Rightarrow$ KL — средняя линия
$\Rightarrow EL = LO$
Пусть $EL = x = LO$
$\Rightarrow EO = 2x$
$\frac{CO}{EO} = 2:1$ (по св-ву медиан)
$\Rightarrow CO = 4x$
$\Rightarrow CL = 4x + x = 5x$
$\frac{CL}{EL} = \frac{5}{1}$ ■

б) Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α.



S_{MNQP} — ?
$MN = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\cdot 12 = 6$
$PQ = \frac{5}{6}AB = \frac{5}{6}\cdot 12 = 10$
$CE = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 12 = 6\sqrt{3}$
$CO = \frac{2}{3}\cdot CE = \frac{2}{3}\cdot 6\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$
$SO = \sqrt{13^2 - (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{169 - 48} = 11$
$KL = \frac{1}{2}\cdot SO = \frac{11}{2}$
$S_{MNQP} = \frac{6+10}{2}\cdot\frac{11}{2} = \frac{\overset{4}{\cancel{16}}\cdot 11}{\cancel{4}} = 44$



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство

$$\frac{\log_3(9x)\cdot\log_4(64x)}{5x^2 - |x|} \le 0.$$

.

Решение:

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180910

15 Решите неравенство $\dfrac{\log_3(9x)\cdot\log_4(64x)}{5x^2-|x|}\le 0.$

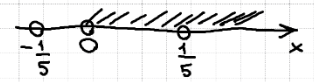
Должны выполняться условия:

① $9x>0$
$x>0$

② $64x>0$
$x>0$

③ $5x^2-|x|\ne 0$
$5\cdot|x|^2-|x|\ne 0$
$|x|\cdot(5|x|-1)\ne 0$
$x\ne 0$ $\quad 5|x|-1\ne 0$
$5|x|\ne 1$
$|x|\ne \frac{1}{5}$
$x\ne\pm\frac{1}{5}$

Найдём пересечение:



При $x\in\left(0;\frac{1}{5}\right)\cup\left(\frac{1}{5};+\infty\right)$ неравенство принимает вид:

$\dfrac{\log_3(9x)\cdot\log_4(64x)}{5x^2-|x|}\le 0.$

$\log_a b+\log_a c=\log_a b\cdot c$

$$\frac{(\log_3 9+\log_3 x)\cdot(\log_4 64+\log_4 x)}{5x^2-|x|}\le 0$$

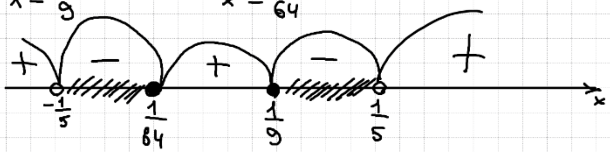
$$\frac{(2+\log_3 x)\cdot(3+\log_4 x)}{5x^2-|x|}\le 0$$

Найдём нули числителя и нули знаменателя:

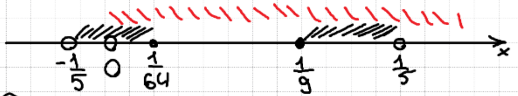
$2+\log_3 x=0$ $\quad 3+\log_4 x=0$ $\quad 5x^2-|x|\ne 0$

$\log_3 x=-2$ $\quad \log_4 x=-3$ $\quad x\ne\pm\frac{1}{5}$

$x=\frac{1}{9}$ $\quad x=\frac{1}{64}$



Учитывая ограничения, получаем:



Ответ: $x\in\left(0;\frac{1}{64}\right]\cup\left[\frac{1}{9};\frac{1}{5}\right)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Точка O —центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, I —центр вписанной в него окружности, H — точка пересечения высот. Известно, что $\angle BAC=\angle OBC+\angle OCB$.

а) Докажите, что точка H лежит на окружности, описанной около треугольника BOC.
б) Найдите угол OHI, если $\angle ABC=70°$.

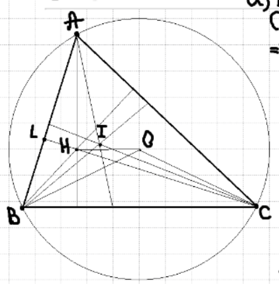
Решение:

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180910

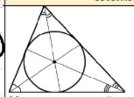
16 Точка O — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, I — центр вписанной в него окружности, H — точка пересечения высот. Известно, что $\angle BAC = \angle OBC + \angle OCB$.

а) Докажите, что точка H лежит на окружности, описанной около треугольника BOC.

б) Найдите угол OHI, если $\angle ABC = 70^\circ$.



Свойство



Центр вписанной в треугольник окружности – это точка пересечения биссектрис

а) $\triangle BOC$ – равнобедр.
(т.к. $BO = CO$ – радиусы)
$\Rightarrow \angle OBC = \angle OCB$

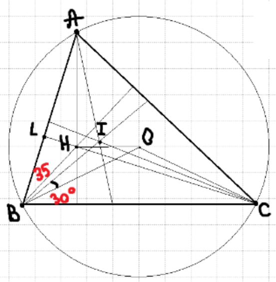
$\angle BOC$ – центральный и опирается на $\smile BC$
$\angle BAC$ – вписанный и опирается на $\smile BC$
$\Rightarrow \angle BOC = 2\angle BAC$

Запишем уравнение суммы углов в $\triangle BOC$:
$\angle OBC + \angle OCB + \angle BOC = 180^\circ$
$\angle BAC + 2\angle BAC = 180$
$3\angle BAC = 180$
$\angle BAC = 60^\circ$
$\Rightarrow \angle BOC = 120^\circ$
$\angle OBC = \angle OCB = 30^\circ$

Найдём $\angle BHC$:
$\angle ABH = 180 - 90 - 60 = 30^\circ$
$\angle LHB = 180 - 30^\circ - 90 = 60^\circ$
$\Rightarrow \angle BHC = 180 - 60 = 120^\circ$

$\angle BOC = \angle BHC = 120^\circ$
опираются на BC
$\Rightarrow$ четырёхугольник $BHOC$ можно вписать в окружность
$\Rightarrow$ точка H лежит на окружности, описанной около треугольника BOC.

б) Найдите угол OHI, если $\angle ABC = 70^\circ$.



Найдём $\angle BIC$
BI – биссектриса угла B
CI – биссектриса угла C
Рассмотрим $\triangle BIC$:
$\angle BIC = 180 - \left(\frac{\angle ABC + \angle ACB}{2}\right)$
$\angle BIC = 120$
$\Rightarrow$ т. I тоже лежит на окружности, которая описывает четырёхугольник $BHOC$
$\angle OHI = \angle OBI$ (вписанные и опираются на $\smile OI$)
$\angle ABI = \frac{1}{2}\angle B = 35^\circ$
$\angle OBC = 30^\circ$
$\Rightarrow \angle OBI = 70 - 35 - 30 = 5^\circ = \angle OHI$
Ответ: 5

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят t^2 тыс. рублей в конце года $t (t = 1; 2; \dots)$. В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счёт в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счёте будет увеличиваться в $1 + r$ раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счёте была наибольшей. Расчёты показали, что для этого ценные бумаги нужно продавать строго в конце двадцать первого года. При каких положительных значениях r это возможно?

Решение:

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180910

17 Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят t^2 тыс. рублей в конце года t ($t = 1;\ 2;\ \ldots$). В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счёт в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счёте будет увеличиваться в $1 + r$ раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счёте была наибольшей. Расчёты показали, что для этого ценные бумаги нужно продавать строго в конце двадцать первого года. При каких положительных значениях r это возможно?

89F37B

Если продать в конце 1 года, то $1\cdot(1+r)^{24}$
2 года, то $4\cdot(1+r)^{23}$
3 года, то $9\cdot(1+r)^{22}$

Если продать в конце k-го года, то $k^2\cdot(1+r)^{25-k}$

$$y' = 2k\cdot(1+r)^{25-k} + k^2\cdot(1+r)^{25-k}\cdot\ln(1+r)\cdot(-1) = 0$$

1	2	3	4	5	6	7	8
$C' = 0$	$x' = 1$	$(Cx)' = C$	$(x^n)' = n\cdot x^{n-1}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(U\cdot V)' = U'V + UV'$	$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$	$(U(V))' = (U(V))'\cdot V'$
9	10	11	12	13	14	15	16
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(e^x)' = e^x$	$(a^x)' = a^x\cdot\ln a$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\log_a b)' = \frac{1}{b\cdot\ln a}$

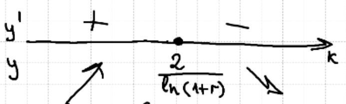
$$2k\cdot(1+r)^{25-k} - k^2\cdot(1+r)^{25-k}\cdot\ln(1+r) = 0$$

$$k\cdot(1+r)^{25-k}\cdot(2 - k\cdot\ln(1+r)) = 0$$

$$2 - k\cdot\ln(1+r) = 0$$

$$2 = k\cdot\ln(1+r)$$

$$k_{max} = \frac{2}{\ln(1+r)}$$



Продать выгоднее всего в 21 году, поэтому k_{max} должно быть ближе к 21, чем к другим целым числам

=> Если показать, что в 21-м году выгоднее продавать, чем в 20 и в 22 годы, то мы докажем, что в 21 году продавать выгоднее, чем в любой другой год

Если продать в конце 20-го года, то $400\cdot(1+r)^5$
Если продать в конце 21-го года, то $441\cdot(1+r)^4$
Если продать в конце 22-го года, то $484\cdot(1+r)^3$

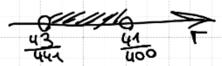
$$\begin{cases} 441\cdot(1+r)^4 > 400\cdot(1+r)^5 & \Big| : (1+r)^4 \\ 441\cdot(1+r)^4 > 484\cdot(1+r)^3 & \Big| : (1+r)^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 441 > 400\cdot(1+r) \\ 441\cdot(1+r) > 484 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 441 > 400 + 400r \\ 441 + 441r > 484 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 400r < 41 \\ 441r > 43 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r < \frac{41}{400} \\ r > \frac{43}{441} \end{cases}$$



Ответ: $r \in \left(\frac{43}{441};\ \frac{41}{400}\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при которых уравнение

$$6a + \sqrt{5 + 4x - x^2} = ax + 3$$

имеет единственный корень.

Решение:

18

Найдите все значения a, при которых уравнение

$6a+\sqrt{5+4x-x^2}=ax+3$

имеет единственный корень.

1C9A53

$\sqrt{5+4x-x^2}=ax-6a+3$

$\sqrt{(-x^2+4x-4)+4+5}=a\cdot x-6\cdot a+3$

$\sqrt{3^2-(x-2)^2}=a\cdot(x-6)+3$

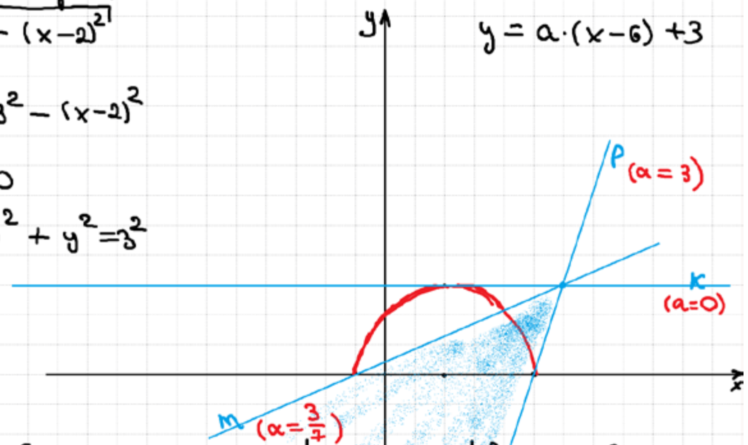
Решим графически:

$y=\sqrt{3^2-(x-2)^2}$

$\begin{cases} y\geq 0\\ y^2=3^2-(x-2)^2\end{cases}$

$\begin{cases} y\geq 0\\ (x-2)^2+y^2=3^2\end{cases}$

$y=a\cdot(x-6)+3$



Найдём значение параметра a у прямых p и m:

$y=ax-6a+3$

p:

$0=a\cdot 5-6\cdot a+3$

$a=3$

m:

$0=a\cdot(-1)-6\cdot a+3$

$7a=3$

$a=\frac{3}{7}$

Ответ: $a\in\{0\}\cup\left(\frac{3}{7};3\right]$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($n\geq 3$).

а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 10?
б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 1000?
в) Найдите все возможные значения n, если сумма всех данных чисел равна 129.

Решение:

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180910

19 Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($n > 3$).

а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 10?

б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 1000?

в) Найдите все возможные значения n, если сумма всех данных чисел равна 129.

$a_1 \ge 1$
$d \ge 1$

$a_n = a_1 + d(n-1)$ $\quad S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$

а) Если $n=3$, то

$a_3 = a_1 + d\cdot(3-1) = a_1 + 2d$

$S_3 = \frac{a_1 + a_1 + 2d}{2}\cdot 3 = 10$?

$(a_1 + d)\cdot 3 = 10$ Нет решений в натур. числах

Если $n=4$, то

$a_4 = a_1 + d\cdot(4-1) = a_1 + 3d$

$S_4 = \frac{a_1 + a_1 + 3d}{\cancel{2}}\cdot \cancel{4}^2 = 10$?

$4a_1 + 6d = 10$ $\quad a_1 = 1$ $\quad d = 1$

Получаем 1 2 3 4 ✓ Да

б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 1000?

$S_n < 1000$

$\frac{a_1 + a_1 + d\cdot(n-1)}{2}\cdot n < 1000 \quad |\cdot 2$

$(2a_1 + d\cdot(n-1))\cdot n < 2000$

чем меньше значение скобки — тем больше n

Пусть
$a_1 = 1$
$d = 1$

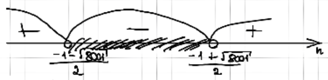
$(2\cdot 1 + 1\cdot(n-1))\cdot n < 2000$

$(n+1)\cdot n - 2000 < 0$

$n^2 + n - 2000 < 0$

$D = 8001$

$n_1 = \frac{-1+\sqrt{8001}}{2}$ $\quad n_2 = \frac{-1-\sqrt{8001}}{2}$



$89 < \sqrt{8001} < 90 \quad |-1$

$88 < -1 + \sqrt{8001} < 89 \quad |\cdot \frac{1}{2}$

$44 < \frac{-1+\sqrt{8001}}{2} < 44{,}5$

$\Rightarrow$ Наибольшее целое n, удовл. неравенству это $n = 44$

$S_{44} < 1000$

$\frac{1 + 1 + 1\cdot(44-1)}{2}\cdot 44 < 1000$

$45\cdot 22 < 1000$

$990 < 1000$

$\Rightarrow n = 44$ подходит

в) Найдите все возможные значения n, если сумма всех данных чисел равна 129.

$S_n = \frac{a_1 + a_1 + d\cdot(n-1)}{2}\cdot n = 129 \quad |\cdot 2$

$(2a_1 + d\cdot(n-1))\cdot n = 258$

Разложим

258	2
129	3
43	43
1	

$258 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 43$

Если $n=3$

$(2a_1 + 2d)\cdot 3 = 258$

$a_1 + d = 43$

Подходит, например $a_1 = 1$, $d = 42$

1 43 85

Если $n=6$

$(2a_1 + 5d)\cdot 6 = 258$

$2a_1 + 5d = 43$

Подходит, например $a_1 = 19$, $d = 1$

19 20 21 22 23 24

Если $n = 43$ ✗

$(2a_1 + 42d)\cdot 43 = 258$

$2a_1 + 42d = 6$

Нет решений в нат. числах

Если $n = 86$ ✗

$n = 129$ ✗

$n = 258$ ✗

Ответ: а) Да, 1 2 3 4; б) 44 в) 3; 6.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: - обоснованное решение п. а; - обоснованное решение п. б; - искомая оценка в п. в; - пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180910